This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

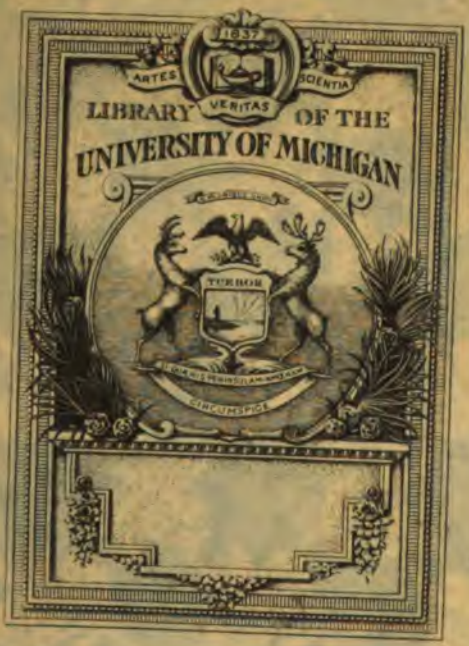
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

58263 3


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TURRIS
CIRCUMSPICE

QA
35
M356a

Friedrich Wilhelm Marpurgs,
Königl. Preuß. Kriegesraths,

1718-1795

Anfangsgründe des Progreßionalcalculs

überhaupt,
und
des figürlichen und combinatorischen besonders,
wie auch
des logarithmischen, trigonometrischen und

Decimalcalculs,

nebst der Lehre
von der Ausziehung der Wurzeln und der Construction der eckigten geometrischen

Körper.

Mit 44. Kupfertafeln.

Berlin und Stralsund,
bey Gottlieb August Lange.
1774.

Zuſchrift

an den Herrn

Peter Johann Hecker,

Lehrer der Mathematik

bey dem Pädagogio der Königl. Realſchule zu Berlin.

18 Feb 23. EHW
mathematics
Narrasawitz
9-29-29
9831
X 1525

Mein Herr und wehrteſter Freund,

Beunruhigen Sie ſich nicht zum voraus, und leſen Sie weiter. Sie werden finden, daß ich Ihrer Beſcheidenheit nicht durch ein einziges Compliment zu nahe treten werde. Nicht Ihren gelehrten Einſichten, ſondern bloß unſerer Freundſchaft will ich die Huldigung leiſten, und ich will nur das Vergnügen haben, Ihnen zu ſagen, daß, ſeit ich Ihre Freundſchaft erhalten, mir die Mathematik zehnmal ſo liebenswürdig ſcheinet, als vorher.

Sie haben, mein Herr, das Manuſcript dieſes Werks mit Ihrem Beyfall beehret. Sie müſſen ſich nun ſchon die Mühe geben, dieſes Werk noch einmal und zwar gedruckt zu leſen, theils um vergewiſſert zu

werden, ob Sie das was Sie mir davon gesagt haben, mit unverletztem mathematischen Gewissen sagen können, theils um zu sehen, in wie weit ich einige von Ihnen mir mitgetheilte vortrefliche Anmerkungen genutzet habe. Warum haben Sie mir nicht erlauben wollen, diese Anmerkungen besonders anzuzeichnen?

Fahren Sie fort, mein Herr, mir Ihre gütige Freundschaft zu gönnen, und seyn Sie von den Gesinnungen der lebhaften Hochachtung versichert, mit welcher ich die Ehre habe zu seyn

Mein Herr und wehrtester Freund,

Berlin,
den 1sten October
1773.

Ihr ganz ergebenster Diener,
Marpurg.

Vorbe-

Vorbericht.

Ich nehme mir die Freiheit dem Publico ein Werk zu überreichen, über deſſen Gegenſtände weit gelehrtere Ausarbeitungen, als die meinige, vorhanden ſind. Man wird aber auch geſtehen, daß jene gelehrte Ausarbeitungen nicht der Sphäre eines jeden Leſers entſprechen, der über einen oder andern hieher gehörigen Artikel einiger Erläuterung bedarf. Wenn die tiefſinnige Kunſt des unſterblichen Ueber dazu gemacht iſt, um durch ihre Hülfe die verſteckteſten mathematiſchen Wahrheiten zu entwickeln, warum will man ſolche, ſobald ſie entwickelt ſind, nicht auf ſolche Art der Welt vor Augen legen, daß ein jeder ohne Unbequemlichkeit davon Nutzen ziehen, und die Aufgaben nachrechnen kann. Es hat der numeriſche Calcul auch gewiß ſeine Schwierigkeiten, und ein illüſtrer Käſtner ſelbſt ſpottet über ein gewiſſes Individuum, das von nichts als Integralrechnungen ſchwatzte, und kaum eine Aufgabe aus der gemeinen Regel de tri ohne Fehler aufzulöſen im Stande war.

Vielleicht verlanget jemand, daß ich ihm von meiner Veranlaſſung zu gegenwärtiger Arbeit Rechenſchaft gebe,

Ille ego qui quondam cecini crepitantia Sorgi
Arma — — —

Es wurde hieſelbſt vor ungefähr zehn Jahren eine Königl. Zahlenlotterie errichtet. Da dieſe Art von Lotterie auf die Verbindungskunſt gegründet iſt, ſo entſchloß ich mich bey dieſem Vorfall, einen im Jahre 1756. über den combinatoriſchen Calcul entworfenen flüchtigen Aufſatz*) aufs neue durchzuarbeiten. Ich blätterte durch was von vielen vortreflichen Männern hierüber geſchrieben war, und da ich fand daß ſich ſelbige nur auf einen gewiſſen Theil der Verbindungskunſt ausgebreitet, und einen andern nur wie im Vorbeygehen berühret hatten, ſo ſuchte ich mich über dieſen Theil etwas weiter auszudehnen.

Ob dieſe Arbeit einen großen Nutzen mit ſich führet? — Es kann vielleicht in einigen Jahren geſchehen, daß man die bisherige Art der Zahlenlotterie hin und wieder umformet, und wiederholte Nummern in einem Glücksrade verſchlieſſet. An wie vielen Oertern Deutſchlands iſt ſolche nicht bereits in eine andere Geſtalt gegoſſen worden? Demjenigen, der die Regeln der Verbindungskunſt zuerſt in Ordnung gebracht, hat es wohl niemals geahndet, daß durch einen glücklichen Einfall des Benedetto Gentili ein ſo vortrefliches Inſtitut aus ſelbiger hervorgehen würde.**) Sollte meine Vermuthung, einem ſpeculirenden Unternehmer vorgearbeitet zu haben, nicht erfüllet werden, ſo wird der Gegenſtand meiner fruchtloſen Bemühungen wenigſtens nicht unwichtiger ſeyn, als das Mairanſche Problem: warum zwey Ziffern einer Zahl, die gegen einander umgekehrt werden, wie z. E. 12 und 21, oder 13 und 31, ſowohl ſimpel als wenn ſie zu Quadraten oder höhern Potenzen erhoben

*) In den hiſtor. krit. Beytr. ꝛc. III. Band, 2tes Stück.

**) Der Königl. Oberbaurath Herr Lambert (Einleitung in die Zuſätze zu den logar. und trigon. Tabellen,) iſt der Meinung, daß es von keinem geringen Nutzen ſeyn würde, ſämtliche figürliche Zahlen in Tabellen neben einander zu haben. Da alle combinatoriſche Zahlen figürliche Zahlen ſind, ſo gehören die aus der Combination wiederholter Größen entſpringenden Zahlen auch hieher. Sie können auch zur Erfindung beluſtigender Aufgaben angewendet werden.

erhoben werden, entweder um 9 oder das Multiplum von 9, beſtändig von einander differiren.

Ich ergreiffe den Faden meiner Geſchichte wieder, und melde nur noch kürzlich, daß mein Tractat von der Verbindungskunſt fertig ward, daß ich ihn auf die Seite legte und nicht ehe wieder in die Hände nahm, als bis ich unter verſchiedenen andern Aufſätzen, welche ich nach der Zeit in meinen Nebenſtunden ausgearbeitet habe, einige fand, welche ich, wegen Verwandtſchaft der Materien, mit dieſem Aufſatz in einen Band zuſammenſchmelzen konnte. Und das ſind denn nun die hier abgehandelten Artikel, deren einer, nemlich der von der Conſtruction der eckigten geometriſchen Körper, durch die Gelegenheit entſtanden, die ich vor einigen Jahren hatte, mit einem jungen Gelehrten, der anitzo in Halle mit gleichem Eifer der Rechtsgelahrtheit und der Mathematik obliegt, und die Hofnung ſeines Herrn Vaters, eines meiner würdigſten Freunde iſt, allerhand beluſtigende ſtereometriſche Verſuche anzuſtellen.

Ich erinnere mich bey dieſer Gelegenheit der mathematiſchen ꝛc. Beluſtigungen des berühmten Ozanam, welcher uns in Anſehung der Geometrie keine andere als ſcientifiſche Aufgaben, die nach meinen Gedanken nicht zu den beluſtigenden gerechnet werden können, und zwar aus der Longi- und Planimetrie, vorgeleget hat. Meines Erachtens kann bloß die Stereometrie vergnügende Kunſtſtücke gewähren, und es würde nicht uneben ſeyn, wenn ſich jemand die Mühe gäbe, zu des Hrn. Guyot mathematiſchen ꝛc. Beluſtigungen, in welchen nicht auf die Geometrie Bedacht genommen worden, einen Pendant aus der Stereometrie zu formiren. In den geometriſchen Tabellen des ehemaligen Inſpectoris bey dem Pädagogio zu Halle, Hrn. Sarganeck findet ſich ein gründlich überdachter Entwurf zu Anlegung eines Pappcabinets, welcher bey dieſer Gelegenheit zu nutzen ſeyn würde.

Vielleicht werden gewiſſe Aufgaben aus dem Progreßionalcalcul von einigen dahin gerechnet werden, wo ſie die Combination wiederholter Größen rechnen können. Es kann alles dieſes geſchehen; aber es iſt nicht meine Schuld, daß wie vielleicht in andern Wiſſenſchaften, alſo auch in der Mathematik Fragen aufgeworfen werden können, deren Beantwortung bloß zur Nahrung der Curioſität dienet, und die uns niemals ein Foglio bey der Banco zu Venedig verſchaffen werden.

Ob ich mich gleich bemühet habe, nirgends etwas heterodoxes vorzutragen, ſo können mir dennoch, aller Aufmerkſamkeit ungeachtet, Fehler von einer andern Beſchaffenheit entwiſchet ſeyn. Damit dieſe Fehler aus meinem Buche vertilget werden mögen, ſo erſuche ich alle diejenigen, die ſich die Mühe nehmen, einen Blick auf ſelbiges zu werfen, mir durch den Weg unſerer vortreflichen Wochen- Monats- oder Viertheiljahrsſchriften, die ich vielleicht alle leſe, meine Unachtſamkeiten, Ueberſichten oder wie ſie es ſonſt nennen wollen, gütigſt zu eröfnen. Ich werde nicht ermangeln, ſofort Anſtalt zu treffen, daß dieſem Uebel abgeholfen werde, und meinen gelehrten Herren Recenſenten alle mögliche Verbindlichkeit ſchuldig ſeyn.

Ich habe nunmehro genung von mir geredet. Die Reihe trift meine Leſer und ich empfehle mich.

Inhalt.

Inhalt.

Erſtes Buch,

welches die Anfangsgründe des Progreſſionalcalculs enthält.

Einleitung zu den Anfangsgründen des Progreſſionalcalculs — — — Seite 1

I. Abſchnitt. Von der einfachen arithmetiſchen Progreſſion und deren Eigenſchaften — — 12

II. Abſchnitt. Von der zuſammengeſetzten arithm. Progr. 29

III. Abſchnitt. Von der geometriſchen Progreſſion. 34

1. Artikel. Von den geometriſchen Potenzen und der Ausziehung ihrer Wurzeln überhaupt. — 42

2. Artikel. Von der Ausziehung der Wurzeln beſonders 52

3. Artikel. Von der Ausziehung der Wurzeln aus ſurden und gebrochnen Zahlen — 70

4. Artikel. Von den Eigenſchaften der geometriſchen Proportion und Progreſſion — 74

IV. Abſchnitt. Von dem aus der Verbindung einer arithmetiſchen und geometriſchen Progreſſion entſtehenden logarithmiſchen Calcul — — 86

V. Abſchnitt. Von dem trigonometriſchen Calcul 108

1. Artikel. Die Winkel eines rechtwinklichten Triangels zu berechnen. — — 124

2. Artikel. Die Seiten eines rechtwinklichten Triangels zu berechnen — — 128

3. Artikel. Die Winkel eines ſchiefwinklichten Triangels zu berechnen — — 131

4. Artikel. Die Seiten eines ſchiefwinklichten Triangels zu berechnen — — 139

Anhang. Die Secunden der Winkel zu finden 142

VI. Abſchnitt. Von der harmoniſchen Progreſſion 150

VII. Abſchnitt. Von der contraharmoniſchen Proportion 163

VIII. Abſchnitt. Von der erſten contrageometriſchen Proportion — — — 167

IX. Abſchnitt. Von der zweyten contrageometriſchen Proportion — — — 172

X. Abſchnitt. Von der erſten arithmetiſch-geometriſchen Proportion — — — 174

XI. Abſchnitt. Von der zweyten arithmetiſch-geometriſchen Proportion — — Seite 176
XII. Abſchnitt. Von der dritten arithmetiſch-geometriſchen Proportion — — 179
XIII. Abſchnitt. Von der contra arithmetiſchen Proportion 181

Zweytes Buch,

welches die Anfangsgründe des figürlichen Calculs enthält.

Einleitung. — 187
I. Abſchnitt. Von Erfindung der figürlichen Zahlen durch die Addition — — 188
II. Abſchnitt. Von den ſimpeln Polygonalzahlen 191
III. Abſchnitt. Von den ſimpeln Pyramidalzahlen 209
Anhang. Von den trapeziſchen Zahlen und deren Pyramiden — — 222
IV. Abſchnitt. Von den central Polygonalzahlen 228
V. Abſchnitt. Von den central Pyramidalzahlen 235
VI. Abſchnitt. Von den pyramidal Pyramidalzahlen, ſimpeln und vollen — — 239
VII. Abſchnitt. Von den arithmetiſchen Potenzen 242
VIII. Abſchnitt. Progreßionstabellen der aus der Addition entſtehenden Polygonal- und Pyramidalzahlen 246
IX. Abſchnitt. Von Erfindung der figürlichen Zahlen durch die Multiplication — — 252
X. Abſchnitt. Von der Progreßion der durch die Multiplication mit gleichen Factoren entſtehenden viereckigten flachen und körperlichen Zahlen, ihren geometriſchen Vorſtellungen und Eigenſchaften — — 257
XI. Abſchnitt. Von der Progreßion der durch die Multiplication mit ungleichen Factoren entſtehenden ſimpeln länglichten oder parallelogrammiſchen Zahlen 272
Anhang. Von den Pronikzahlen — 278
XII. Abſchnitt. Von den aus der Multiplication mit zwey ungleichen Factoren unter dreyen entſtehenden viereckigten priſmatiſchen Zahlen — — 280
XIII. Abſchnitt. Von den aus der Multiplication mit drey ungleichen Factoren entſtehenden parallelepipediſchen Zahlen — — — 283
XIV. Abſchnitt. Von den ſimpeln länglichten Pyramidalzahlen — — — 286
XV. Abſchnitt. Von den central länglichten Zahlen 293

XVI. Abſchnitt. Von den centroal länglichten Pyramidalzahlen — — — Seite 296
XVII. Abſchnitt. Von den Säulenförmigen oder Columnarzahlen — — — 300
XVIII. Abſchnitt. Von den Thurmförmigen oder Pyrgoidalzahlen — — — 304
XIX. Abſchnitt. Von den Polyedralzahlen — 307

Drittes Buch,

welches die Anfangsgründe des combinatoriſchen Calculs enthält.

Einleitung. 317
I. Abſchnitt. Von der ausſchlieſſenden Verbindung unähnlicher Größen — — 320
II. Abſchnitt. Von der abwechſelnden Verbindung unähnlicher oder verſchiedner Größen — 367
III. Abſchnitt. Von der ausſchlieſſenden Verbindung wiederholter Größen — — 375
1ſte Claſſe der Fälle. Wenn nur eine einzige Größe wiederholet, und ſolche zwey- oder mehrmal geſetzet wird — — — 379
2te Claſſe der Fälle. Wenn zwey und mehrere Größen wiederholet werden, und eine jede zweymal geſetzet wird — — — 393
3te Claſſe der Fälle. Wenn von den wiederholten Größen die eine mehrmal als die andere wiederholet wird — — — 406
IV. Abſchnitt Von der abwechſelnden Verbindung wiederholter Größen — — 407
1ſte Claſſe der Fälle. Wenn nicht mehr als eine einzige Größe zwey- oder mehrmal geſetzet wird 408
2te Claſſe der Fälle. Wenn zwey und mehrere Größen, eine ſo vielmal als die andere, wiederholet werden — — — 418
3te Claſſe der Fälle. Wenn von zwey und mehrern Größen die eine mehrmal als die andere wiederholet wird — — — 425

Vier-

Viertes Buch,

Von der Conſtruction der eckigten geometriſchen Körper.

Vorbericht — — — Seite 431

I. Abſchnitt. Von den regulären Figuren — 434

I. Artikel. Beſondere Regeln zur Erfindung regulärer Figuren aus der Zirkellinie, oder zur Einſchreibung regulärer Figuren in eine Zirkellinie 435

II. Artikel Beſondere Regeln zur Conſtruction regulärer Figuren über einer gegebnen geraden Linie 440

III. bis X. Artikel. Allgemeine Regel zur Conſtruction regulärer Figuren, durch den Gebrauch des krumlinichten Transporteur — 444

— — — durch den Gebrach des geradlinichten Transporteurs — 445

— — — durch den Gebrauch des Proportionalzirkels — — 448

— — — nach einer Methode des Clavius — — — 449

— — — nach der Methode Carls Renaldini — — — 450

— — — nach der Methode Burchards von Pirkenſtein — — 451

— — — durch den Bogen und die Perpendikuläre — — 451

— — — durch den Gebrauch der Sinuszahlen — — 453

Tabellen über das Verhältniß des Diameters eines Zirkels gegen die Seiten einer in dieſem Zirkel beſchriebnen regulären Figur. 453—455

II. Abſchnitt. Von den ſymmetriſchen Figuren. 457

1. Artikel. Von den geradeckigten ſymmetriſchen Figuren. — — — 459

2. Artikel. Von den ungeradeckigten ſymmetriſchen Figuren. — — 464

Anhang wegen der ſymmetriſchen Figuren. 468

III. Ab-

III. Abſchnitt. Von den irregulären Figuren. Seite 469
1. Anhang. Ueber die Theilung eines Bogens. 471
2. Anhang. Von den einſchreibbaren und umeinſchreibbaren Figuren. — 474
IV. Abſchnitt. Von der Entſtehung eines eckigten Körpers 475
V. Abſchnitt. Eintheilung der geometriſchen Körper. 481
VI. Abſchnitt. Von den eckigt ſphäriſchen Körpern 483
VII. Abſchnitt. Die eckigt ſphäriſchen Körper der 1ſten und 3ten Claſſe im Perimeter der Figuren gleich zu machen. — — — 493
VIII. Abſchnitt. Die fünf regulären Körper im Flächeninhalt einander gleich zu machen, — 499
und zwar
α) durch die geometriſche Conſtruction. 500
β) durch Hülfe des Calculs. — 505
1. Anhang. Das Verhältniß des Flächeninhalts der regulären Figuren zu dem Quadrat ihrer Seiten zu finden. — — — 507
Tabelle über das Verhältniß der quadrirten Seite einer regulären Figur gegen den Flächeninhalt dieſer Figur. — — 510
— — über das Verhältniß der quadrirten Grundlinie eines Centertriangels gegen ſeinen Flächeninhalt. — — 511
— — über das Verhältniß der Grundlinie eines Centertriangels gegen ſeine Höhe. 512
2. Anhang. Das Verhältniß des quadrirten Diameters eines Zirkels gegen den Inhalt einer in dieſem Zirkel beſchriebnen regulären Figur zu finden. 513
Tabelle über vorher bemeldtes Verhältniß. 515
3. Anhang. Das Verhältniß der Seite einer regulären Figur gegen die Seite einer andern von gleichem Inhalt, aber verſchiedner Anzahl von Ecken zu finden, oder eine Verwandlungstabelle der regulären Figuren zu berechnen. — 516
IX. Abſchnitt. Die 13 eckigt ſphäriſchen Körper der dritten Claſſe im Flächeninhalt einander gleich zu machen. 519

X. Abſchnitt. Die fünf regulären Körper in der Höhe aus der Mitte der Flächen einander gleich zu machen. Seite 521

XI. Abſchnitt. Die fünf regulären Körper in der Höhe aus den Ecken einander gleich zu machen. — 527

XII. Abſchnitt. Die fünf regulären Körper in dem cubiſchen Inhalt einander gleich zu machen, und eine Kugel von gleichem cubiſchen Inhalt zu berechnen. 530

Tabelle über das Verhältniß der Seiten der im cubiſchen Inhalt einander gleich zu machenden fünf regulären Körper. — — 536

XIII. Abſchnitt. Von den eckigt coniſchen Körpern oder von den Pyramiden — — 539

XIV. Abſchnitt. Die Pyramiden in gewiſſen Verhältniſſen einander gleich zu machen. — — 541

XV. Abſchnitt. Aus den Pyramiden andere Körper zu erfinden. — — — 549

XVI. Abſchnitt. Von den eckigt cylindriſchen, oder von den priſmatiſchen Körpern. — — 553

XVII. Abſchnitt. Die Priſmata im körperlichen Inhalt einander gleich zu machen — — 560

XVIII. Abſchnitt. Aus den Priſmatibus andere Körper zu erfinden. — — — 561

Von den Pyrgoidalkörpern. — 564

XIX. Abſchnitt. Von den eckigt ellipſoidiſchen Körpern. 566

Fünftes Buch,

welches die Anfangsgründe des Decimalcalculs enthält.

Einleitung — — — 573

1. Artikel. Von dem Decimalcalcul in ungezeichneten Decimalen. — — 576

2. Artikel. Von dem Decimalcalcul in gezeichneten Decimalen. — — 591

Erſtes

Erstes Buch,

welches

die Anfangsgründe

des

Progreßionalcalculs

enthält.

Einleitung
zu den Anfangsgründen des Progreßionalcalculs.

§. 1.

Eine Reihe von Zahlen, welche nach einer beſtändigen Regel auf einander folgen, wird eine **Zahlenreihe** oder **Progreßion von Zahlen**; jedes Glied einer ſolchen Reihe eine **Progreßionalzahl**, und derjenige Theil des Calculs, welcher die Lehre von den Progreßionalzahlen enthält, der **Progreßionalcalcul** genennet. So machen z. E. die Zahlen 2. 4. 6. 8. 10. eine Progreßion, und dieſe fünf Zahlen, als ſo viele Glieder der Progreßion, fünf Progreßionalzahlen. Wenn der Progreßionalcalcul durch allgemeine Zeichen, zu welchen man ſich der Buchſtaben bedienet, gelehret wird: ſo heißet er ein **litteral Progreßionalcalcul**; und wenn derſelbe durch beſondere Zeichen, welche eine beſtimmte Relation unter ſich haben, und dergleichen die Ziffern ſind, gelehret wird, ſo heißet er ein **Ziffer- oder numeriſcher Progreßionalcalcul**. Auf erſtere Art ſind viele Lehrſätze und Regeln, welche man hier finden wird, vom **Freyherrn von Wolf** (Element. Analyſ.) und auf leztere Art vom **Tacquet** (Arithmet. Theor. & Prax.) unter andern vorgetragen worden.

§. 2.

Eine Zahl, aus deren Einheiten eine geometriſche geradlinichte Figur gebildet werden kann, wird in Anſehung dieſer

ſer Eigenſchaft überhaupt eine figürliche Zahl; insbeſondere aber eine flache Zahl genennet, in ſofern ſich ſolche in eine flache Figur verſetzen läßet, und eine körperliche Zahl, in ſofern ſich ſolche in eine körperliche Figur verſetzen läßet. So iſt z. E. die Zahl 9 eine flache Zahl, in ſoweit aus ſelbiger durch 3×3 ein Quadrat gebildet werden kann; und die Zahl 27 eine körperliche Zahl, in ſoweit ſich aus ſelbiger durch 3×3×3 ein Cubus beſchreiben läßet. Da die flachen Figuren drey- vier- fünf- und mehreckigt ſeyn können: ſo werden die flachen Zahlen auch vielecktigte oder Polygonalzahlen genennet, und, obgleich die Vielecke eigentlich erſt vom Fünfeck anfangen, ſo nimmt dieſe Benennung doch allhier bereits bey der allererſten geradlinichten flachen Figur, welche die dreyeckigte iſt, ihren Anfang. Die Lehre von den figürlichen Zahlen heißet der figürliche Calcul.

Anmerkung.

Das Wort Fläche bezeichnet in der Geometrie jede Ausdehnung in die Länge und Breite allein; das Wort Körper jede Ausdehnung in die Länge, Breite und Dicke (d. i. Höhe oder Tiefe) zugleich, und das Wort Figur ſowohl eine Fläche, in ſoweit dieſe auf allen Seiten umgränzt oder eingeſchloßen iſt, als einen Körper. Um ſich nun beſtimmt auszudrücken, ſaget man in dem erſtern Falle Flächenfigur oder flache Figur, und in dem letztern körperliche Figur. Da eine Fläche entweder von geraden oder krummen Linien eingeſchloßen werden kann: ſo entſtehen daher geradlinichte und krummlinichte Figuren. Der figürliche Calcul erſtrecket ſich nur über die geradlinichten Figuren, oder über die, ſolche Figuren durch ihre Stellung unter ſich, nachahmenden Zahlen; und da eine geradlinichte Fläche oder Figur auch eine ebene Fläche oder ebene Figur, oder ſchlechtweg eine Ebene (planum) genennet wird: ſo geſchicht es daher, daß die flachen Zahlen auch ebene Zahlen, (numeri plani,) die körperlichen aber dichte Zahlen (numeri ſolidi) genennet werden, wiewohl dieſe Benennungen nur bey den durch die Multiplication entſtehenden figürlichen Zahlen hauptſächlich gebräuchlich ſind. So wird das Product zweyer Factoren oder Zahlen, z. E. 12 aus 3×4 eine ebene Zahl genennet; das Product dreyer Zahlen, z. E. 24 aus 2×3×4 eine dichte Zahl; das Product von vier Zahlen, z. E. 180 aus 2×3×5×6 eine eben ebene Zahl; das Product von fünf

Zahlen

Zahlen, z. E. 1260 aus 2×3×5×6×7 eine ebene dichte Zahl, u. ſ. w. Uebrigens iſt es einerley, ob die zwey, drey, vier, fünf und mehrere Factoren der Producte gleich oder ungleich ſind. Z. E. 9 aus 3×3 iſt auch eine ebene Zahl; 27 aus 3×3×3 eine dichte Zahl; 81 aus 3×3×3×3 eine eben ebene Zahl; und 243 aus 3×3×3×3×3 eine ebene dichte Zahl.

§. 3.

Eine Zahl, welche die Veränderungen einer andern Zahl in Abſicht auf die verſchiednen Verbindungen, deren die Einheiten dieſer andern Zahl unter ſich fähig ſind, ausdrücket, wird eine combinatoriſche Zahl genennet. So iſt z. E. die Zahl 6 in Anſehung der Zahl 3 eine combinatoriſche Zahl, indem die Einheiten der Zahl 3, die wir durch a b c vorſtellen wollen, je zwey und ohne Einſchränkung betrachtet, ſechsmal unter ſich verändert werden können, als

1. ab	3. ba	5. ca
2. ac	4. bc	6. cb

Die Lehre von den combinatoriſchen Zahlen heißet der combinatoriſche Calcul, oder die Lehre von den Verbindungen der Zahlen.

§. 4.

Beyderley Zahlen, die figürlichen und combinatoriſchen, haben die Eigenſchaft, daß ſie nach einer beſtändigen Regel auf einander folgen. Sie ſind alſo Progreßionalzahlen, und ſowohl der figürliche als combinatoriſche Calcul ſind Theile des Progreßionalcalculs.

Anmerkung.

Man wird in der Folge ſehen, daß alle combinatoriſche Zahlen die im §. 2. beſchriebene Eigenſchaft der figürlichen haben, aber nicht umgekehrt. Es iſt alſo eben ſo unrichtig, wenn man die Wörter figürlich und combinatoriſch für gleichgeltende Wörter brauchet, als wenn man die Wörter progreßional und figürlich unter einander vermenget.

§. 5.

Wir haben alſo von den Progreßionalzahlen an ſich zu handeln, ehe wir zum figürlichen Calcul, und von dieſem zum combinatoriſchen übergehen. Da ich mich bey Abhandlung dieſer Gegenſtände einiger in dem mathematiſchen

Calcul gebräuchlichen Schreibzeichen bedienet habe, um dadurch gewisse arithmetische Operationen abzukürzen: so schicke ich die Bedeutung derselben hiermit voran.

1) Das **Gleichheitszeichen** =, welches durch **gleich** gelesen wird.

2) Das **Vermehrungszeichen** +, welches durch **mehr** gelesen wird.

3) Das **Abziehungszeichen** —, welches zwischen zwey neben einander stehenden Zahlen durch **weniger** gelesen wird.

4) Das **Vervielfältigungszeichen** ×, welches durch **mal**, oder **vervielfältiget mit**, gelesen wird.

5) Das **Theilungszeichen** —; welches zwischen zwey über einander stehenden Zahlen durch **in**, oder **getheilt mit**, gelesen wird.

6) Das **Wurzelzeichen** $\sqrt{}$, in dessen Oefnung der Nahme einer verlangten Wurzel durch eine gleichlautende kleine Zahl geschrieben wird. Also wird durch $\sqrt[2]{}$ die zweyte oder die Quadratwurzel, (ob man gleich allhier die kleine Zahl insgemein wegläßet;) durch $\sqrt[3]{}$ die dritte oder die Cubikwurzel, u. s. w. angezeiget.

Sollten hin und wieder noch andere Zeichen vorkommen, so werden solche da, wo es, wenigstens zum erstenmal, geschicht, erkläret werden.

§. 6.

Alle Progreßionen sind fortgesetzte stetige Proportionen, und alle Proportionen entstehen aus der Gleichheit zweyer Verhältnisse. Ich werde diese Kunstwörter näher erklären, damit wir überall mit selbigen übereinstimmende Begriffe verbinden mögen — Die Vergleichung einer Zahlgröße mit einer andern wird ein **Verhältniß** oder eine **Ration** genennet. Es kann aber diese Vergleichung auf zweyerley Art geschehen, entweder durch die Subtraction oder Division. Durch die Subtraction findet man, **um wie viel**; und durch die Division **um wie vielmal** eine Zahl größer oder kleiner als die andere ist.

Im

Im erſtern Falle wird das Verhältniß ein **arithmetiſches**, und im leztern ein **geometriſches**; die gefundene dritte Größe aber, dort der **Unterſcheid**, die **Differenz** oder der **Reſt**; und hier der **Quotient** oder **Exponent** der Ration genennet. Anſtatt des Worts **Unterſcheid** findet man hin und wieder die Wörter **Exceß**, **Uebertretung** oder **Ueberſchuß**.

Es ſeyn die Zahlen 3 und 12.

Wenn dieſe beyde Größen durch die **Subtraction** mit einander verglichen werden: ſo kömmt die dritte relativiſche Größe 9, als der Unterſcheid der beyden Zahlen 3 und 12; und wenn ſie durch die **Diviſion** verglichen werden: ſo kömmt die dritte relativiſche Zahl 4, als der Quotient der beyden Zahlen 3 und 12. In dem erſtern Falle nun machen die beyden Zahlen 3 und 12 ein arithmetiſches, und in dem leztern ein geometriſches Verhältniß.

§. 7.

Die beyden Größen eines Verhältniſſes werden **Sätze**, **Glieder** oder **Termini** genennet. Iſt in ſelbigem das erſte Glied kleiner als das zweyte, ſo heißet es ein **zunehmendes**, **wachſendes** oder **aufſteigendes** Verhältniß, z. E. 3. 6. Iſt aber das erſte Glied größer als das zweyte: ſo heißet es ein **abnehmendes**, **fallendes** oder **abſteigendes** Verhältniß, z. E. 6. 3. Wenn man ſchlechtweg von einem Verhältniße redet, ſo verſtehet man insgemein ein zunehmendes. Wir werden hinführo die arithmetiſchen Verhältniſſe durch einen Punkt, z. E. 3. 6 und die geometriſchen durch ein Colon, z. E. 3:9 bemerken *).

§. 8.

Jedes Verhältniß iſt entweder **radikal** oder **irradikal**. Ein **radikal**- oder **Grundverhältniß** iſt, wenn die beyden Größen deſſelben nicht durch kleinere ganze Zahlen ausgedrücket werden können, z. E. 1.3. Ein **irradikal** oder **vergrößertes Verhältniß** iſt, wenn die beyden Größen deſſelben durch kleinere Zahlen ausgedrücket werden können. Die Auf-

*) Einige bedienen ſich des Subtractionszeichens bey den arithmetiſchen Verhältniſſen, und des Punkts bey den geometriſchen.

ſetzung eines vergrößerten Verhältniſſes in ſein Grundverhältniß, welches man eine Reduction oder Verkleinerung der Zahlen nennet, geſchicht durch einen gemeinſchaftlichen Theiler, z. E.

$$2)\frac{4 \cdot 6}{2 \cdot 3}$$

§. 9.

Wenn die kleinere Zahl eines geometriſchen Verhältniſſes in der größern mehr als einmal ganz enthalten iſt: ſo wird ein ſolches Verhältniß überhaupt ein vielfaches, insbeſondere aber 1) ein zweyfaches Verhältniß genennet, wenn die eine Zahl die andere zweymal enthält, z. E. 1:2 = 2:4 = 3:6 = 4:8 = 5:10 u. ſ. w. 2) ein dreyfaches Verhältniß, wenn die eine Zahl die andere dreymal enthält, z. E. 1:3 = 2:6 = 3:9 = 4:12 = 5:15 u. ſ. w. Die Anwendung iſt leicht weiter zu machen.

Erſte Anmerkung.

Alle vielfache geometriſche Verhältniſſe, in welchen die kleinere Zahl größer als 1 iſt, ſind vergrößerte Verhältniſſe.

Zweyte Anmerkung.

Was hier von der Vergrößerung und Vervielfachung der Verhältniſſe geſaget worden, findet ebenfalls ſtatt bey den von ihnen abſtammenden Proportionen und Progreſſionen.

§. 10.

Die Gleichheit zweyer Verhältniſſe wird eine Proportion genennet, und dieſe in eine ſtetige und unſtetige unterſchieden. 1) Eine ſtetige oder zuſammenhängende Proportion, welche von den ältern Mathematikern mit dem einzigen Worte Medietät benennet wird, iſt, wenn die mittlern Glieder gleich ſind, oder wenn der Hinterſatz des erſten Verhältniſſes zum Vorderſatz des zweyten wird. z. E.

arithmetiſche Verhältniſſe.	geometriſche Verhältniſſe.
3.6 = 6.9, welches kürzer durch ÷ 3.6.9 geſchrieben wird.	3:6 = 6:12, welches kürzer durch ∺ 3:6:12 geſchrieben wird.

2) Eine unſtetige oder abgeſonderte Proportion iſt, wenn die mittlern Glieder nicht gleich ſind, z. E.

arithme-

arithmetiſche Verhältniſſe. geometriſche Verhältniſſe.

3 . 6 = 12 . 15 3 : 6 = 4 : 8

Die beyden Sätze oder Glieder, welche einerley Nahmen führen, als die beyden Vorder- und die beyden Hinterſätze werden homologiſche oder gleichnamige Sätze genennet. So ſind z. E. in 3 . 6 = 12 . 15, die Zahlen 3 und 12, und hernach die Zahlen 6 und 15 homologiſche Glieder.

§. 11.

Die Zahlen einer Proportion werden überhaupt Proportionalzahlen genennet; insbeſondere aber nennet man die mittelſte Zahl einer ſtetigen Proportion eine Mittelproportionale. Unter den äußerſten Zahlen einer ſteigenden ſtetigen Proportion heißet die erſte die kleinere dritte Proportionale, und die dritte die größere dritte Proportionale; ſo wie umgekehrt in einer fallenden ſtetigen Proportion die erſte Zahl eine größere dritte Proportionale, und die dritte eine kleinere dritte Proportionale genennet wird.

§. 12.

Jede Proportion iſt entweder rein arithmetiſch, oder rein geometriſch, oder alterirt; 1) rein arithmetiſch, wenn die Differenz zweyer erſten Zahlen der Differenz zweyer andern gleich iſt, z. E. 3 . 6 = 12 . 15. 2) rein geometriſch, wenn der Quotient zweyer erſten Zahlen dem Quotienten zweyer andern gleich iſt, z. E. 3 : 6 = 4 : 8 und 3) alterirt. Dieſe Alteration iſt auf achterley Art bekannt, als

a) Wenn ſich die Differenz des kleinſten und mittelſten Gliedes gegen die Differenz des mittelſten und größten verhält, wie das kleinſte Glied gegen das größte. Wird eine harmoniſche Proportion genennet.

Anmerkung.

Ich zeige die acht Arten der Alteration hier bloß an, indem in der Folge von jeder ausführlich gehandelt werden wird.

b) Wenn ſich die Differenz des kleinſten und mittelſten Gliedes gegen die Differenz des mittelſten und größten verhält, wie das größte Glied gegen das kleinſte. Wird eine contraharmoniſche Proportion genennet.

c) Wenn ſich die Differenz des kleinſten und mittelſten Gliedes gegen die Differenz des mittelſten und größten verhält, wie das mittelſte Glied gegen das kleinſte. Wird eine erſte contrageometriſche Proportion genennet.

d) Wenn ſich die Differenz des kleinſten und mittelſten Gliedes gegen die Differenz des mittelſten und größten verhält, wie das größte Glied gegen das mittelſte. Wird eine zweyte contrageometriſche Proportion genennet.

e) Wenn ſich die Differenz des kleinſten und größten Gliedes gegen die Differenz des kleinſten und mittelſten verhält, wie das größte Glied gegen das kleinſte. Wird eine erſte arithmetiſch-geometriſche Proportion genennet.

f) Wenn ſich die Differenz des mittelſten und größten Gliedes gegen die Differenz des kleinſten und größten verhält, wie das kleinſte Glied gegen das größte. Wird eine zweyte arithmetiſch-geometriſche Proportion genennet.

g) Wenn ſich die Differenz des kleinſten und mittelſten Gliedes gegen die Differenz des kleinſten und größten verhält, wie das kleinſte Glied gegen das mittelſte. Wird eine dritte arithmetiſch-geometriſche Proportion genennet.

h) Wenn ſich bey ungleichen Differenzen dreyer Zahlen, die Differenz der beyden größten Glieder gegen die Differenz der beyden äußerſten verhält, wie das kleinſte Glied gegen das mittelſte. Wird eine contra arithmetiſche Proportion genennet.

§. 13.

Es giebt alſo zehnerley Proportionen, nemlich die beyden natürlichen oder reinen, d. i. die arithmetiſche und geometriſche, und die acht alterirten von (a) bis (h) —. Aus dem §. 1. iſt bekannt, daß eine Progreßion eine Reihe von Zahlen iſt, die nach einer beſtändigen Regel auf einander folgen. Ich bemerke allhier, daß die beſtändige Regel, nach welcher die Zahlen einer Progreßion einander folgen müßen, entweder eine arithmetiſche, oder geometriſche, oder alterirte Proportion iſt. Eine arithmetiſche Progreßion iſt alſo eine ſolche Progreßion, worinnen die Zahlen in ſtetiger arithmetiſchen

methiſchen Proportion, das iſt, mit gleichen Differenzen einander folgen; eine **geometriſche**, worinnen die Zahlen in ſtetiger geometriſchen Proportion, d. i. mit gleichen Quotienten einander folgen; und eine **alterirte Progreßion**, worinnen die Zahlen in einer ſtetigen alterirten Proportion einander folgen. — Jede Progreßion muß übrigens wenigſtens aus vier verſchiedenen Zahlen beſtehen, und jede Progreßion iſt nichts anders als eine fortgeſetzte ſtetige Proportion.

§. 14.

Die beſtändige Regel, nach welcher die Zahlen einer arithmetiſchen Progreßion auf einander folgen müßen, iſt, wie geſaget worden, die Gleichheit der Differenzen. Da dieſe Gleichheit der Differenzen nicht allezeit ſofort oder im erſten Grade, d. i. nach der allererſten Subtraction, ſondern öfters erſt im zweyten, dritten oder vierten Grade, u. ſ. w. das iſt, nach einer zwey- drey- oder viermal ꝛc. wiederhohlten Subtraction erſcheinet: ſo geſchicht es daher, daß die arithmetiſche Progreßion in die einfache und zuſammengeſetzte unterſchieden wird. Ich gebe ein Exempel von beyderley Gattungen.

Einfache arithmetiſche Progreßion.

	Differenz.
2	0
4	2
6	2
8	2
10	2

		Zuſammengeſetzte arithmetiſche Progreßion.	
		Erſte Differenzen.	Zweyte Differenzen.
2	1	0	0
4	3	2	0
6	6	3	1
8	10	4	1
10	15	5	1

Wenn man ſchlechtweg von einer arithmetiſchen Progreßion redet, wird allezeit die einfache verſtanden.

§. 15.

So wie es an ſich einerley iſt, mit was für einer Differenz eine arithmetiſche Progreßion, und mit was für einem Quotienten eine geometriſche gebildet wird, wenn nur dort die Differenz, und hier der Quotient einerley bleibt: ſo iſt es auch gleich viel, mit was für einer Zahl eine Progreßion anhebet, ob ſolches mit der Einheit oder einer andern Zahl

geſchicht. Wenn aber eine Progreßion mit einer gröſſern Zahl als 1 anhebet, ſo kann ſie entweder, nach Art der vergröſſerten Verhältniſſe, in kleinere Zahlen aufgelöſet werden oder nicht. So kann z. E. die arithmetiſche Progreßion 2. 4. 6. 8. 10 in 1. 2. 3. 4. 5 aufgelöſet werden, und iſt alſo eine vergröſſerte Progreßion. Hingegen kann die arithmetiſche Progreßion 2. 5. 8. 11. 14 nicht kleiner gemachet werden, und iſt alſo eine Grundprogreßion. So lange man aber mit einer Progreßion als bloßen Progreßion zu thun hat, ſie ſey von welcher Art ſie wolle, ſo brauchet man auf dieſen Unterſcheid nicht Acht zu haben, ſondern man muß die Zahlen in derjenigen Gröſſe laßen, worinnen ſie ſich befinden.

§. 16.

Hier folget annoch eine Erklärung verſchiedener Kunſtwörter. Die hier nicht vorkommenden werden gelegentlich erkläret werden.

1) **Einzelne Zahlen.** Hierunter verſtehet man jede Zahl für ſich, ohne in Abſicht auf eine andere betrachtet, z. E. 4, oder 13, oder 100.

2) **Natürliche Zahlen.** So nennet man die Folge der von 1 an ſich beſtändig um eine Einheit vermehrenden Zahlen 1. 2. 3. 4. 5. u. ſ. w. Dieſe Folge giebet die allererſte arithmetiſche Progreßion. Unter den natürlichen Zahlen werden die neun erſten, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9 **monadiſche oder einfache Zahlen** genennet.

3) **Zahl, Ziffer.** Durch **Zahl** wird eine Menge Einheiten oder Gröſſen von einer Art; durch **Ziffer** hingegen das bloße Zeichen verſtanden, woran man die in einer Zahl enthaltenen einzelnen Gröſſen erkennet. So machen z. E. die drey Zeichen 150 zwar drey Ziffern, aber nur eine einzige Zahl.

4) **Dekadiſche, artikulirte oder runde Zahlen.** So nennet man alle Zahlen, die ſich mit 10 auflöſen laßen, als 10. 20. 30; 100. 200. 3000 u. ſ. w. Alle Zahlen

len alſo, welche im erſten Grade, von der Rechten gegen die Linke gerechnet, eine 5 haben, und folglich ſich mit 5 aufheben laßen, ſind halbrunde oder halbdekadiſche Zahlen.

5) Gerade Zahlen ſind die ſich in zwey gleiche Zahlen theilen laßen, z. E. 2. 4. 6, und da dieſe Theilung überall mit 2 geſchicht, ſo beſchreibet man ſie auch als ſolche, die ſich durch 2 dividiren laßen. Ungerade Zahlen ſind, die ſich nicht in zwey gleiche Zahlen theilen laßen, oder die von einer geraden Zahl um eine Einheit differiren, z. E. 3. 5. 7. Ich merke bey dieſer Gelegenheit an, daß die geraden Zahlen nicht mit gleichen, und die ungeraden Zahlen nicht mit ungleichen vermenget werden müßen. Z. E. die Zahlen 3. 3 ſind gleiche, aber ungerade; hingegen 2. 4 ungleiche, aber gerade Zahlen, ob es ſonſten gleich geſchehen kann, daß zwey Zahlen zugleich gerade und gleich ſind, wie 2. 2, oder zugleich ungerade und ungleich, z. 3. 5. Es ſind nemlich gleiche Zahlen, die ohne Verletzung ihrer Größe einander ſubſtituiret werden können, z. E. 2. 2, 3. 3, 20. 20, und ungleiche, die nicht ohne Verletzung ihrer Größe einander können ſubſtituiret werden, z. E. 1. 2. 3. 4, 20. 30, 40. 50 u. ſ. w.

6) Eine abſtracte oder unbenannte Zahl heißet, die ohne Anwendung auf irgend eine andere Größe betrachtet wird, z. E. 10. 20. 30; und eine concrete oder benannte Zahl, die auf eine Größe angewendet wird, z. E. 10 Thaler, 20 Pfund.

7) Quadriren heißet eine Zahl zweymahl ſetzen, und in einander multipliciren, z. E. $3 \times 3 = 9$. Cubiren heißet eine Zahl dreymal ſetzen, und in einander multipliciren, z. E. $3 \times 3 \times 3 = 27$.

8) Halbiren oder mediren heißet eine Zahl mit 2 dividiren; und

duplíren eine Zahl mit 2 multipliciren;
tripliren — 3 — —

quadru-

quadrupliren	eine Zahl	mit 4	multipliciren;	
quintupliren	—	5	—	—
ſextupliren	—	6	—	—
ſeptupliren	—	7	—	—
octupliren	—	8	—	—
noncupliren	—	9	—	—
dekupliren	—	10	—	—
undekupliren	—	11	—	—
und dodekupliren	—	12	—	— u. ſ. w.

9) Die Wurzel oder Seite, Seiten- oder Lateralzahl heißet a) in der arithmetiſchen Progreßion die Anzahl der Glieder, aus welchen eine figürliche Zahl ſummiret worden. So iſt z. E. die Zahl 5 die Wurzel oder Seite von der Zahl 35, in ſoweit ſolche aus $1+3+6+10+15$, und alſo aus fünf Zahlen entſtanden iſt. b) In der geometriſchen Progreßion diejenige Zahl, die zwey- drey- oder mehrmahl geſetzt und in ſich multipliciret worden. So iſt z. E. die Zahl 3 die Wurzel von 9, in ſoweit $3\times3=9$, und zwar Quadratwurzel. So iſt eben dieſelbe Zahl ferner die Wurzel von 27, in ſoweit $3\times3\times3=27$, und zwar eine Cubikwurzel. In der Folge hievon ein mehreres.

Erſter Abſchnitt.

Von der einfachen arithmetiſchen Progreßion.

§. 17.

Es iſt nichts leichter, als eine einfache arithmetiſche Progreßion, das iſt, eine ſolche Progreßion, in welcher die Zahlen mit gleichen Differenzen im erſten Grade einander folgen, zu formiren, indem man nur das erſte Glied und die Differenz zu wißen braucht. Soll die Progreßion ſteigend ſeyn, ſo wird die Differenz zu dem gegebenen Gliede addiret;

addiret; dem kommenden Gliede aufs neue zugeſetzet, und auf ähnliche Art fortgefahren. Soll aber die Progreßion fallend ſeyn, ſo wird die Differenz von dem gegebenen erſten Gliede ſubtrahiret; von dem kommenden Gliede aufs neue abgezogen, und auf ähnliche Art fortgefahren. Auf dieſe Weiſe iſt die **ſteigende Progreßion** 1. 6. 11. 16. 21, von welcher das erſte Glied 1 und die Differenz 5 gegeben worden, durch $1+5=6$, $6+5=11$, u. ſ. w. entſtanden; und die **fallende Progreßion** 17. 13. 9. 5. 1, von welcher das erſte Glied 17 und die Differenz 4 gegeben worden, aus $17-4=13$, $13-4=9$ u. ſ. w.

§. 18.

Man unterſcheidet die einfachen arithmetiſchen Progreßionen in reguläre und irreguläre. a) **Reguläre** ſind, in welchen die Zahlen mit gleichen Differenzen zu- oder abnehmen, z. E. 1. 3. 5. 7. 9; oder 10. 8. 6. 4. 2. Wenn man ſchlechtweg von einer einfachen arithmetiſchen Progreßion ſpricht, ſo verſtehet man allezeit die reguläre. b) Die **irregulären** ſind auf verſchiedene Art möglich. Die merkwürdigſten darunter ſind:

1) Wenn die Zahlen mit zwey abwechſelnden Differenzen zunehmen, z. E. 1. 2. 4. 5. 7. (Da eine abnehmende Progreßion nichts anders, als eine umgekehrte zunehmende, und alſo leicht eine aus der andern zu erkennen iſt: ſo werde ich hinführo von keiner andern als der zunehmenden Progreßion allein Exempel geben.)

2) Wenn die Glieder wieder zurückgehen, z. E. 1. 3. 5. 7. 5. 3. 1.

§. 19.

Die vornehmſten Eigenſchaften der arithmetiſchen Proportion und Progreßion ſind:

1) Daß in jeder ſtetigen arithmetiſchen Proportion die Summe der beyden äuſſerſten Glieder dem Duplo der mittelſten Größe gleich iſt. Z. E. in ÷ 3. 6. 9. iſt $3+9=12$, und $6+6=12$.

2) Daß

2) Daß in jeder unſtetigen arithmetiſchen Proportion die Summe der beyden äußerſten Glieder der Summe der beyden mittelſten gleich iſt. Z. E. in 3. 6 = 9. 12. iſt 3 + 12 = 15, und 6 + 9 = 15.

3) Daß, da die einfache arithmetiſche Progreßion nichts anders als eine ſtetige arithmetiſche Proportion iſt, allezeit drey unmittelbar auf einander folgende Glieder eine ſtetige arithmetiſche Proportion formiren. Z. E. in 1. 4. 7. 10. 13 iſt 1. 4 = 4. 7, und 4. 7 = 7. 10, und 7. 10 = 10. 13.

4) Daß vier auf einander folgende Glieder einer Progreßion allezeit eine unſtetige Proportion formiren. Z. E. in 1. 4. 7. 10. 13 iſt 1. 4 = 7. 10, und 4. 7 = 10. 13.

5) Daß in allen gleich weit von einander abſtehenden Gliedern einer Progreßion ein gleiches arithmetiſches Verhältniß iſt. Z. E. in 1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22 iſt 1. 7 = 4. 10, ingleichen 1. 10 = 13. 22; ingleichen 4. 10 = 16. 22, u. ſ. w.

6) Daß die Summe jeder zwey Glieder einer Progreßion gleich iſt der Summe jeder zwey andern, in gleicher Weite von jenen abſtehenden, Glieder. Es ſey 1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22; ſo iſt 10 + 13 = 23, und 7 + 16 = 23, und 4 + 19 = 23, und 1 + 22 = 23.

7) Daß jedes Glied einer Progreßion die halbe Summe der in gleicher Weite von ſelbigem abſtehenden zwey Glieder iſt. Z. E. wenn 1. 4. 7. 10. 13. 16. 19, ſo iſt 10 die Hälfte von 7 + 13 = 20; von 4 + 16 = 20, und von 1 + 19 = 20.

8) Daß das Duplum eines jeden Gliedes einer Progreßion gleich iſt der Summe jeder zwey in gleicher Weite von ihm abſtehenden Glieder. Wenn 1. 4. 7. 10. 13. ſo iſt 4 + 4 = 1 + 7; 7 + 7 = 4 + 10, und 7 + 7 = 1 + 13.

9) Daß jedes Glied einer Progreßion das kleinſte Glied einmal, und die Differenz ſo vielmal enthält, als Glieder vorhergehen. Es ſey wiederum 1. 4. 7. 10. 13. 16.

Hier

Hier enthält das gröſste Glied 16 das kleinſte Glied 1 einmal, und die Differenz 3 fünfmal. Ferner enthält das Glied 13 das kleinſte Glied 1 einmal, und die Differenz 3 viermal; u. ſ. w.

§. 20.

Auf vorhergehende Eigenſchaften der einfachen arithmetiſchen Proportion und Progreſsion ſind folgende Aufgaben gegründet.

(I) Zwiſchen zwey gegebenen Gliedern einer verlangten ſtetigen arithmetiſchen Proportion die Mittelproportionale zu finden.

Halbiret die Summe der beyden gegebenen Gröſsen. Es ſey 3. 9. Wenn nun $3+9=12$ und $\frac{1}{2}^{2}=6$: ſo iſt die Zahl 6 die gefundne Mittelproportionale von 3. 9.

(II) Zu drey gegebenen Gliedern einer ſtetigen arithmetiſchen Proportion die vierte Proportionale zu finden. §. 21.

Ziehet das erſte Glied von der Summe des zweyten und dritten ab. Es ſey 3. 6. 9. Wenn nun $6+9=15$, und $15-3=12$, ſo iſt 12 die gefundne vierte Proportionale von 3. 6. 9.

(III) Eine einfache arithmetiſche Progreſsion zu ſummiren. §. 22.

Erſte Auflöſung. Multipliciret die Summe des erſten und lezten Gliedes mit der Anzahl der Glieder, und halbiret das Product. Zum Exempel:

Progreſsion. 2. 5. 8. 11. 14

16 Summe des lezten u. erſten Gliedes.
5 Anzahl der Glieder.
2)80
Gefundne Summe 40 = 2 + 5 + 8 + 11 + 14.

Zweyte

Zweyte Auflösung. Multipliciret die halbirte Summe der beyden äusserſten Glieder durch die Anzahl der Glieder. Zum Exempel:

Progreßion. 3.4.5.6.7.8.9

3

2) 12 Summe der äusserſten Glieder.

6 Halbirte Summe.

7 Anzahl der Glieder.

Gefundne Summe. 42=3+4+5+6+7+8+9.

Vorhergehende Canons ſind allgemein, es ſey die Anzahl der Glieder gerade oder ungerade. Hier ſind noch zwey beſondere Auflöſungen.

a) Wenn die Anzahl der Glieder gerade iſt. Multipliciret die Summe des erſten und lezten Gliedes durch die Hälfte der Glieder, z. E.

Progreßion. 2.4.6.8.10.12

2

14 Summe des lezten u. erſten Gliedes.

3 Hälfte der Glieder.

Gefundne Summe. 42=2+4+6+8+10+12.

b) Wenn die Anzahl der Glieder ungerade iſt. Multipliciret das mittelſte Glied mit der Anzahl aller Glieder. Es ſey die

Prog. 2.4.6.8.10.12.14

2

2) 16

8 Das mittelſte Glied.

7 Anzahl der Glieder.

Gefundne Summe. 56=2+4+6+8+10+12+14.

Das mittelſte Glied einer Progreßion wird gefunden, wenn die Summe der beyden äußerſten Glieder halbiret wird. Es ſey 3.7.11.15.19. Wenn nun 3+19=22, u. $\frac{22}{2}$=11: ſo iſt die Zahl 11 das mittelſte Glied dieſer Progreßion.

Erſte

Erſte Anmerkung.

Wenn die Progreßion aus den mit 1 anhebenden natürlichen Zahlen 1. 2. 3 4. ꝛc. beſtehet: ſo kann man, die Anzahl der Glieder mag gerade oder ungerade ſeyn, die Operation abkürzen, wenn man das gröſte Glied mit der zu allernächſt folgenden, nicht in der Progreßion enthaltnen, höhern Zahl multipliciret, und das Product mit 2 theilet. Z. E.

Es ſeyn die Zahlen 1. 2. 3. 4 u ſ. w. bis 12. Wenn nun $12 \times 13 = 156$, und $\frac{156}{2} = 78$, ſo iſt 78 die Summe aller Zahlen von 1 bis 12.

Zweyte Anmerkung.

Wenn die Progreßion aus den mit 1 anhebenden ungeraden Zahlen 1. 3. 5. 7. 9. u ſ. w. beſtehet: ſo brauchet man die Anzahl der Glieder nur zu quadriren, um die Summe der Progreßion zu haben. Es ſey 1. 3. 5. 7. 9. 11. Die Anzahl der Glieder iſt 6. Wenn nun $6 \times 6 = 36$: ſo iſt 36 die Summe von $1+3+5+7+9+11$.

Dritte Anmerkung.

Wenn die Progreßion aus den mit 2 anhebenden geraden Zahlen 2. 4. 6. 8. 10 ꝛc. beſtehet: ſo hat man die Summe der Progreßion, wenn die Anzahl der Glieder mit ſich ſelbſt + 1 multipliciret wird. Es ſeyn die Zahlen 2. 4. 6. 8. Die Anzahl der Glieder iſt 4, und $4+1=5$. Alſo $4 \times 5 = 20 = 2+4+6+8$.

(IV) Eine aus abwechſelnden Differenzen beſtehende irreguläre Progreßion zu ſummiren. §. 23.

(a) Wenn die Anzahl der Glieder gerade iſt.

Multipliciret die Summe der beyden äuſſerſten Glieder durch die Hälfte der Glieder.

Es ſey 4. 6. 9. 11. 14. 16. alſo 16

2 3 2 3 2

4

20 Summe der beyden äuſſerſten Glieder.

3 Hälfte der Glieder.

Gefundne Summe $60 = 4+6+9+11+14+16$.

(b) Wenn die Anzahl der Glieder ungerade iſt.

Multipliciret die Summe des gröſten und zweyten kleinen Gliedes mit der Hälfte der um 1 verminderten Anzahl der Glieder, und addiret das kleinſte Glied.

Es ſey 3. 5. 8. 10. 13. alſo 13 das gröſte Glied.

2 2 2 2

Die Hälfte der Glieder $\frac{5-1}{2} =$ 5 das zweyte kleine Glied.

18 Summe der beyden Glieder.

2

36

3 das kleinſte Glied.

Gefundne Summe 39 = 3 + 5 + 8 + 10 + 13.

(V.) Eine aus zurückgehenden Gliedern beſtehende irreguläre arithmetiſche Progreßion zu §. 24. ſummiren.

Dupliret die Summe der halben Progreßion, und ziehet von dem Product das mittelſte Glied ab. Es wird aber die halbe Progreßion bis zur mittelſten Zahl gerechnet.

Es ſey 1. 4. 7. 10. 7. 4. 1

3 3 3 3 3 3

Alſo 10. Bis zur Zahl 10 gehet die halbe Progreßion.

1

11

2

22 Summe der halben Progreßion. (§. 22)

2

44 Duplum der ſummirten halb. Progreßion.

10 Das mittelſte Glied.

Gefundne Sume 34 = 1 + 4 + 7 + 10 + 7 + 4 + 1.

Erſte Anmerkung.

Wenn die zurückgehende Progreßion aus den geraden Zahlen 2. 4. 6. 8 ꝛc. beſteht, und mit 2 anfänget: ſo brauchet man nur die gröſte Zahl mit ihrer Hälfte zu multipliciren. Es ſey 2. 4. 6. 8. 10. 8. 6. 4. 2. ſo iſt 10 × 5 = 50 die Summe der Progreßion.

Zweyte

Zweyte Anmerkung.

Wenn die zurückgehende Progreßion aus den ungeraden Zahlen 1. 3. 5. 7 ꝛc. beſteht, und mit 1 anfängt: ſo zerfället die gröſte Zahl in zwey um 1 differirende ungleiche Hälften. Quadriret jede Hälfte, und addiret die Producte.

Es ſey 1. 3. 5. 7. 5. 3. 1. Wenn nun die gröſte Zahl, allhier 7, in die beyden ungleichen Hälften 3 und 4 zerfället wird: ſo heiſſet es $3 \times 3 = 9$ und $4 \times 4 = 16$. Addiret die Quadrate 9 und 16; ſo kömmt 25 für die Summe der Progreßion. Das Zerfällen einer Zahl geſchicht allhier, wenn ſolche mit 2 getheilet wird. Der kommende ganze Quotient giebet die kleinere Hälfte, und der mit dem Reſt 1 vermehrte Quotient giebet die größere Hälfte. Z. E. die Zahl 7 zu zerfällen. Wenn in ſelbige mit 2 dividiret wird: ſo kömmt 3 mit dem Reſt 1. Die Zahl 3 iſt die kleinere Hälfte von 7; und wenn zur Zahl 3 der Reſt 1 addiret wird: ſo kömmt die Zahl 4 für die größere Hälfte.

(VI.) Aus den gegebenen äußerſten Gliedern, und der Anzahl der Glieder die Differenz und §. 25. alſo die Progreßion ſelbſt zu finden.

Subtrahiret die beyden Glieder von einander, und theilet den Reſt durch die Anzahl der Glieder — 1. Es ſeyen die zwey äußerſten Glieder 2 und 22; und die Anzahl der Glieder = 5. Dieſe um 1 vermindert, bleibt 4. Alſo

$$\begin{array}{r} 22 \\ 2 \\ \hline 20 \\ \hline 4) \\ 5 \end{array}$$ die gefundne Differenz der Progreßion

2. 7. 12. 17. 22.

(VII.) Aus den beyden äußerſten Gliedern einer gegebenen arithmetiſchen Progreßion §. 26. die Summe ihrer Differenzen zu finden.

Subtrahiret das kleinſte Glied von dem gröſten. Es

ſey die arithmetiſche Progreßion 3. 7. 11. 15. 19. Wenn nun 3 von 19 abgezogen wird: ſo bleibt 16 = 4+4+4+4 für die Summe der Differenzen.

(VIII.) Aus der Differenz und den beyden äuſſerſten Gliedern die Anzahl der Glieder zu finden. §. 27.

Subtrahiret das kleinſte Glied von dem größten; theilet den Reſt mit der Differenz, und addiret 1 zum Quotienten. Es ſey die Differenz = 6 und die beyden äußerſten Glieder 2 und 26. Alſo

$$\begin{array}{r} 26 \\ \underline{2} \\ 6)\,24 \\ 4 + 1 = 5 \end{array}$$

Anzahl der Glieder in der Progreßion (1) (2) (3) (4) (5) 2. 8. 14. 20. 26.

(IX.) Aus der Anzahl der Glieder, dem größten Gliede und der Differenz das kleinſte Glied, und mithin die Progreßion ſelbſt zu finden. §. 28.

Multipliciret die um 1 verminderte Anzahl der Glieder mit der Differenz der Progreßion, und ſubtrahiret das Product von dem größten Gliede. Es ſey die Anzahl der Glieder = 6; die 6 um 1 vermindert, bleibt 5. Die Differenz ſey 4 und das größte Glied 21. Alſo:

5 Anzahl der Glieder — 1
4 Differenz.

20, von 21 abgezogen, bleibt 1 für das gefundne kleinſte Glied. Demnach wird die Progreßion ſeyn 1. 5. 9. 13. 17. 21.

(X.) Aus der Anzahl der Glieder, dem kleinſten Gliede und der Differenz das größte Glied, und mithin die Progreßion ſelbſt zu finden. §. 29.

Multi-

Multipliciret die um 1 verminderte Anzahl der Glieder mit der Differenz, und addiret zum Product das kleinſte Glied. Es ſey die Anzahl der Glieder 12, welche — 1 = 11; die Differenz 2, und das kleinſte Glied 2. Alſo:

11
2 Differenz
22
2 kleinſtes Glied
24 das gefundne größte Glied, und die Progreßion wird ſeyn 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24.

(XI.) Aus der Anzahl der Glieder, der Differenz und der Summe der Progreßion, die beyden äußerſten Glieder und mithin die §. 30. Progreßion ſelbſt zu finden.

1) Dividiret die Summe der Progreßion durch die Anzahl der Glieder. Dupliret den Quotienten und behaltet das Product. 2) Multipliciret die Anzahl der Glieder — 1 mit der Differenz, und behaltet das Product. 3) Subtrahiret die Producte von einander. Die Hälfte des Reſtes giebt das kleinſte Glied, und wenn 4) dieſe Hälfte zu dem kleinern Product addiret wird: ſo kömmt das größte Glied. Z. E. es ſey die Anzahl der Glieder 5, die Differenz ſey 2, und die Summe 30. Stehet alſo:

1. Operat.

Anzahl der Glieder 5)30 Summe.
6
2
12 Product.

2. Operat.

4 Anz. d. Glieder — 1
2 Differenz
8 Product.

3. Operat.

12 größeres Product
8 kleineres Product
2)4
2 das gefundne kleinſte Glied.

4. Operat.

8 kleineres Product
2 gefundnes kleinſtes Glied
10 das gefundne größte Glied.

Die Progreßion iſt alſo 2. 4. 6. 8. 10.

(XII.) Aus der Anzahl der Glieder, dem kleinſten oder größten Gliede und der Differenz die Summe der Progreßion zu finden. §. 31.

1) Multipliciret die um 1 verminderte Anzahl der Glieder mit der Differenz. 2) Addiret zur Hälfte des Products das kleinſte Glied, und multipliciret das Collect mit der Anzahl aller Glieder. Es ſey zum Exempel die Anzahl aller Glieder 5; das kleinſte Glied 2, und die Differenz 3. Stehet alſo:

Anzahl der Glieder — 1 = 4
Differenz 3
12
2) 6 Hälfte des Products.
Kleinſtes Glied 2
8
5
40 gefundne Summe.

Oder, wenn anſtatt des kleinſten Gliedes das größte gegeben worden: ſo ſubtrahiret von ſelbigem die Hälfte des Products, und verfahret übrigens, wie vorhin. Es ſey aber das größte Glied 14. Stehet folglich alſo:

5 — 1 = 4
3
2) 12 14 Das größte Glied.
6 6
8
5
40 gefundne Summe.

(XIII.) Aus der Summe aller Glieder, ihrer Anzahl und dem größten Gliede das kleinſte, oder umgekehrt aus dem kleinſten Gliede das größte zu finden. §. 32.

Dividiret das Duplum der gegebnen Summe durch die Anzahl der Glieder. Ziehet man nun von dem Quotienten das

das kleinſte Glied ab, ſo bleibet das gröſte übrig; und ziehet man das gröſte ab, ſo bleibet das kleinſte übrig. Z. E. Es ſey die Summe der Progreßion 162; die Anzahl der Glieder 9, und das gröſte Glied 30: ſo iſt

Anzahl der Glieder 9) 324 Duplum der Summe
36
— 30 gröſtes Glied
6 gefundnes kleinſte Glied.

und im umgekehrten Falle:

9) 324
36
— 6 kleinſtes Glied.
30 gefundnes gröſte Glied.

(XIV.) Aus der Summe der Progreßion, und dem gröſten und kleinſten Gliede die Anzahl aller Glieder zu finden. §. 33.

Dividiret die duplirte Summe der Progreßion durch die Summe der beyden gegebenen Glieder. Der Quotient giebet die Anzahl aller Glieder. Es ſey die Summe der Progreßion 112; das gröſte Glied 28 und das kleinſte 4. Stehet alſo:

28
4
32

32) 224 Duplirte Summe der Progreßion.
7 Anzahl aller Glieder aus der Progreßion 4. 8. 12. 16. 20. 24. 28.

(XV.) Aus der Summe der Progreßion, ihrer Anzahl, und einem der beyden äuſſerſten Glieder die Differenz, und folglich die Progreßion ſelbſt zu finden. §. 34.

1) Multipliciret das gegebene kleinſte oder gröſte Glied durch die Anzahl aller Glieder. Iſt das kleinſte Glied gegeben, ſo ziehet das Product von der Summe aller Glieder; iſt aber das gröſte gegeben, dieſe Summe von dem Producte ab; und dupliret in beyden Fällen den kom-

menden Reſt. 2) Multipliciret die Anzahl aller Glieder mit ſich ſelbſt — 1, und dividiret mit dieſem Product in das Duplum aus der erſten Operation. Der Quotient iſt die geſuchte Differenz. Z. E. Es ſey die Summe aller Glieder 162; die Anzahl aller Glieder 9, und das kleinſte Glied 6, ſo iſt:

1) Die Anzahl aller Glieder × kleinſtes Glied = 9 × 6 = 54 Product.
Die Summe aller Glieder = 162

54 Product.
108
2
216 Duplum.

2) Die Anzahl der Glieder = 9,
und — 1 = 8. Alſo 9 × 8 = 72 Product. 72)216 Duplum ꝛc.
3 Die gefundene Differenz.

Die Progreßion wird alſo ſeyn 6.9.12.15.18.21.24.27.30.

Wenn nun anſtatt des kleinſten Gliedes das größte = 30 gegeben, ſo iſt die Operation folgende:

30 × 9 = 270
270 — 162 = 108
108 × 2 / 72 = 3 Differenz, und die Progreßion wie vorhin.

(XVI.) Aus den beyden äußerſten Gliedern und der Differenz, die Summe aller Glieder zu finden. §. 35.

1) Berechnet die Differenz der quadrirten beyden gegebenen Glieder, und dividiret ſolche durch das Duplum der gegebnen Differenz. 2) Addiret zum Quotienten die halbe Summe der beyden gegebnen Glieder. Das Collect giebet die Summe aller Glieder. Es ſeyn z. E. die beyden äuſſerſten Glieder 2 und 42, und die Differenz 5 der Progreßion 2.7.12.17.22.27.32.37.42.

So

So iſt: $42 \times 42 = 1764$
$- 2 \times 2 = 4$
Duplum der Differenz $10) \frac{1760}{176}$ Differenz der Quadrate.
$+ \frac{42+2}{2} = 22$
198 gefundene Summe der Progreßion.

(XVII.) Aus dem größten und kleinſten Gliede und der Summe aller Glieder die Differenz und folglich die Progreßion ſelbſt zu finden. §. 36.

1) Suchet, wie vorhin, die Differenz der quadrirten beyden Glieder. 2) Ziehet die Summe der beyden Glieder von dem Duplo der Summe aller Glieder ab, und dividiret mit dem Reſt in die vorhin gefundene Differenz der Quadrate. Der Quotient giebet die geſuchte Differenz. Z. E. es ſey das größte Glied 42, das kleinſte 2, und die Summe 198: ſo iſt

$42 \times 42 - 2 \times 2 = 1760$ Differenz der Quadrate.
$198 \times 2 = 396$
$- (42+2) = 44$
$352 \mid 1760$
5 Die gefundne Differenz.

(XVIII.) Aus dem kleinſten Gliede, der Differenz und der Summe einer Progreßion, die Anzahl der Glieder zu finden *). §. 37.

1) Subtrahiret die Differenz von dem Duplo des kleinſten Gliedes, wenn das Duplum des kleinſten Gliedes größer als die Differenz iſt; oder ſubtrahiret das Duplum des kleinſten Gliedes von der Differenz, wenn das Duplum des kleinſten Gliedes kleiner als die Differenz

*) Ich habe bey gegenwärtiger Aufgabe die Clausbergiſche Auflöſung, als die leichteſte, der Tacquet und Wolfiſchen, als der ſchwereſten vorgezogen.

ferenz iſt. 2) Quadriret den halben Reſt, und behaltet ſowohl das Quadrat als den halben Reſt. 3) Multiplicirt das Duplum der gegebenen Summe durch die Differenz, und addiret zum Product das Quadrat aus der zweyten Operation. 4) Ziehet aus dem Collect die Quadratwurzel; ſubtrahiret in dem obenbenannten erſten Falle den halben Reſt der zweyten Operation, und addiret ihn in dem zweyten, und dividiret die hier kommenden Zahl durch die gegebene Differenz. Der Quotient giebet die Anzahl der Glieder.

(a) Es ſey das kleinſte Glied 6, die Differenz 7, und die Summe der Progreßion 100. Hier iſt das Duplum des kleinſten Gliedes gröſſer als die Differenz.

1. Operat. 12 Duplum des kleinſten Gliedes.
7
2. Oper. 2) 5
$2\frac{1}{2}$ halber Reſt, deſſen Quadrat $6\frac{1}{4}$
3. Operat. 200 Duplum der Summe.
7
1400
$6\frac{1}{4}$ Quadrat
4. Oper. $\sqrt{1406\frac{1}{4}}$ Collect.
$37\frac{1}{2}$
ſubtrahirt $2\frac{1}{2}$ der halbe Reſt aus der 2. Oper.
7) 35
5 die gefundne Anzahl der Glieder der Progreßion
6. 13. 20. 27. 34.
Z Z Z Z

(b) Es ſey das kleinſte Glied 2, die Differenz 7 und die Summe der Progreßion 80. Hier iſt das

das Duplum des kleinſten Gliedes kleiner als die Differenz. 7 Differenz

$$\frac{4}{2)\ 3}$$

$1\frac{1}{2}$, deſſen $\square\ 2\frac{1}{4}$

$160 = 80 + 80$

$$\frac{7}{1120}$$

$2\frac{1}{4}$ das $\square$ wird addirt.

$$\sqrt{1122\frac{1}{4}}$$

$33\frac{1}{2}$

Addirt $1\frac{1}{2}$ halber Reſt.

$$7)\ 35$$

5 Anzahl der Glieder in der Progreßion

2. 9. 16. 23. 30.

7 7 7 7

(XIX.) Aus dem kleinſten Gliede, der Differenz und der Summe aller Glieder, das größte Glied zu finden. §. 38.

1) Subtrahiret die gegebene Differenz von dem kleinſten Gliede, oder umgekehrt das kleinſte Glied von der Differenz, wenn dieſe größer iſt. In beyden Fällen multipliciret den Reſt mit dem kleinſten Gliede. 2) Addiret im erſten Falle das gefundne Product zu dem Quadrat der halben Differenz; und ſubtrahiret es im zweyten Falle von eben demſelben. 3) Multipliciret das Duplum der gegebenen Summe aller Glieder mit der Differenz der Progreßion, und addiret das Product im erſten Falle zu dem Collect der zweyten Operation, und im zweyten Falle zu dem Reſt der zweyten Operation. 4) Ziehet aus dem Collect der vorhergehenden dritten Operation die Quadratwurzel, und ſubtrahiret von derſelben die halbe Differenz. Der Reſt iſt das geſuchte größte Glied.

Erſter Fall. Es ſey das kleinſte Glied 6, die Differenz 3, und die Summe 60: ſo iſt

1) $(6-3) \times 6 = 18$. Product.
2) $18 + (1\frac{1}{2})^2 = 18 + 2\frac{1}{4} = 20\frac{1}{4}$. Collect der zweyten Operation.
3) $60 \times 2 \times 3 = 360$ Product.
   $360 + 20\frac{1}{4} = 380\frac{1}{4}$. Collect der dritten Operation.
4) $\sqrt{\ } 380\frac{1}{4} = 19\frac{1}{2}$. Quadratwurzel.
   $19\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 18$. Das gefundne größte Glied.

Die Progreßion iſt alſo: 6. 9. 12. 15. 18.

Zweyter Fall. Es ſey das kleinſte Glied 2, die Differenz 5, und die Summe 87, ſo iſt

1) $(5-2) \times 2 = 6$ Product.
2) $(2\frac{1}{2})^2 - 6 = 6\frac{1}{4} - 6 = \frac{1}{4}$ Reſt der zweyten Operation.
3) $27 \times 2 \times 5 = 870$ Product.
   $870 + \frac{1}{4} = 870\frac{1}{4}$ Collect der dritten Operation.
4) $\sqrt{\ } 870\frac{1}{4} = 29\frac{1}{2}$. Quadratwurzel.
   $29\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 27$ Das gefundne größte Glied.

Die Progreßion iſt alſo: 2. 7. 12. 17. 22. 27.

Zweyter Abſchnitt.

Von der zuſammengeſetzten arithmetiſchen Progreßion.

§. 39.

Eine zuſammengeſetzte arithmetiſche Progreßion entſteht, wenn eine einfache ſummiret wird, und da jede zuſammengeſetzte aufs neue ſummiret werden kann: ſo ſind unendliche Arten zuſammengeſetzter Progreßionen möglich. Es iſt bey dieſer Summirung aber eine gewiſſe Vorſicht zu beobachten, nemlich, daß jedes erſte Glied einer gegebenen Progreßion allezeit für ſich allein gerechnet wird, ehe man es zum folgenden Gliede addiret; und bey jeder folgenden neuen Summirung muß in Anſehung des erſten Gliedes der zu ſummirenden Progreßion auf ähnliche Art verfahren werden. Es ſey die einfache Grundprogreßion 1. 2. 3. 4. 5, um ſolche in eine erſte, zweyte und dritte zuſammengeſetzte Progreßion zu verwandeln. Stehet alſo:

1=1	1=1	1=1
1+2=3	1+3=4	1+4=5
1+2+3=6	1+3+6=10	1+4+10=15
1+2+3+4=10	1+3+6+10=20	1+4+10+20=35
1+2+3+4+5=15	1+3+6+10+15=35	1+4+10+20+35=70

Die erſte zuſammengeſetzte Progreßion iſt alſo 1.3.6.10.15; die zweyte 1.4.10.20.35, und die dritte 1.5.15.35.70. Es wird aber jede erſte zuſammengeſetzte arithmetiſche Progreßion eine zweyſtuffige arithmetiſche Progreßion; jede zweyte zuſammengeſetzte eine dreyſtuffige; jede dritte eine vierſtuffige, u ſ. w. genennet.

§. 40.

Da wir die Conſtruction der zuſammengeſetzten arithmetiſchen Progreßion wiſſen, ſo werden wir wenig Mühe haben, eine Progreßion von dieſer Art auf ihre einfache Grundprogreßion zurückzuführen. Es iſt nemlich nichts

nichts weiter nöthig, als aus der gegebenen Progreßion die erſten Differenzen zu ziehen, aus den erſten Differenzen die zweyten, aus den zweyten die dritten, und damit ſo lange fortzufahren, bis die Differenzen gleich werden.

Ich gebe ein Exempel. Die Progreßion der Cubikzahlen 1. 8. 27. 64. 125. 216 in eine einfache arithmetiſche Progreßion aufzulöſen. Stehet alſo:

Progreß.	1ſte Differenzen.	2te Differenzen.	3te Differenzen.
1	0	0	0
8	7	0	0
27	19	12	0
64	37	18	6
125	61	24	6
216	91	30	6

§. 41.

Die Fälle, wo die Zurückführung einer zuſammengeſetzten Progreßion auf eine einfache hauptſächlich erfordert wird, ſind die beyden folgenden: 1) wenn eine zuſammengeſetzte Progreßion, deren lezte Differenzen nicht gegeben worden, weiter erſtrecket werden ſoll; 2) wenn aus der Mitte einer zuſammengeſetzten Progreßion einige Glieder gegeben werden, und der Anfang dieſer Progreßion gefunden werden ſoll. Es verſtehet ſich, daß in beyden Fällen, zumal im leztern, eine hinlängliche Anzahl von Gliedern gegeben wird, weil man ſonſten nicht auf die lezten Differenzen kommen kann. Ehe ich die Sache durch Exempel erläutere, muß ich wegen der Extrahirung der Differenzen einen allhier nöthigen Umſtand bemerken. Er beſtehet darinnen, daß, ſo wie bey der Conſtruction einer zuſammengeſetzten Progreßion jedes erſte Glied der zu ſummirenden Progreßion den erſten Platz in der ſummirten einnehmen mußte, und alſo für ſich beſonders aufzuführen war, ehe es zu dem folgenden Gliede addiret werden konnte, ſo allhier in Anſehung jeden erſten Gliedes ein gleiches geſchehen, und erſt vom zweyten Gliede an das Reſultat der Subtraction ſtatt finden muß. Auf dieſe Art muß bey Auflöſung der zuſammen-

ſammengeſetzten Progreßion 1. 5. 15. 35. 70 wie bey (a) und nicht, wie bey (b) verfahren werden.

(a)					(b)				
1	1	1	1		1	0	0	0	0
5	4	3	2	1	5	4	0	0	0
15	10	6	3	1	15	10	6	0	0
35	20	10	4	1	35	20	10	4	0
70	35	15	5	1	70	35	15	5	1

Doch iſt dieſer Umſtand nur bey aufſteigenden, nicht aber bey abſteigenden Progreßionen in Acht zu nehmen.

(I.) Es ſeyn die Zahlen 1. 6. 20. Die darinnen enthaltne zuſammengeſetzte Progreßion §. 42. weiter zu erſtrecken.

Wenn wir bey dieſer aufſteigenden Progreßion, nach vorhergehendem Unterricht, in Anſehung der Ausziehung der Differenzen operiren, ſo werden in dem lezten Fache der Differenzen die beyden gleichen Zahlen 2. 2, und in dem vorhergehenden die drey Zahlen 1. 3. 5. erſcheinen, als:

1	1	1	1	
6	5	4	3	2
20	14	9	5	2

Die beyden gleichen Zahlen verrathen eine vorhergehende einfache Progreßion, und da der Anfang zu einer ſolchen in den Zahlen 1. 3. 5. würklich vorhanden iſt, und dieſe Zahlen durch keine andern als 7. 9. 11. u. ſ. w. fortgeſetzet werden können: ſo legen wir die gefundne einfache Progreßion 1. 3. 5. 7. ꝛc. zum Grunde, um durch Summirung derſelben auf die gegebnen Zahlen 1. 6. 20 zu kommen, und alsdenn ſolche weiter zu erſtrecken. Dieſes wird nach §. 39. auf folgende Art geſchehen:

1	1	1	1
3	4	5	6
5	9	14	20
7	16	30	50 und ſo weiter.

(II.) Es

(II.) Es seyn die Zahlen einer zusammengesetzten Progreßion 1365. 1001. 715. 495. §. 43. 330. 210. Den Anfang dieser Progreßion zu finden.

Wenn wir bey dieser absteigenden Progreßion nach dem Unterricht im §. 41. in Ansehung der zu extrahirenden Differenzen verfahren: so kommen in dem lezten Fache der Differenzen die beyden gleichen Zahlen 1. 1 und in dem vorhergehenden die drey Zahlen 12. 11. 10, als:

1365	0	0	0	0
1001	364	0	0	0
715	286	78	0	0
495	220	66	12	0
330	165	55	11	1
210	120	45	10	1

Die beyden gleichen Zahlen 1. 1 verrathen eine vorhergehende einfache Progreßion, und da der Anfang zu einer solchen in den Zahlen 12. 11. 10 würklich vorhanden ist, und diese durch keine andere als 9. 8. 7 u. s. w. fortgesetzet werden können, so gehen wir bis auf die Zahlen 3. 2. 1, in welche sich solche endlich verliehren müssen, zurück, und summiren die einfache Progreßion 1. 2. 3. 4 ꝛc. so lange, bis wir auf die gegebene Zahlen 1365. 1001 ꝛc. kommen, wodurch wir denn versichert sind, daß die in dem Fache derselben vorhergehenden Zahlen der Anfang der abgebrochnen zusammengesetzten Progreßion 1365. 1001. ꝛc. sind. Man sehe folgende Vorstellung davon.

1	1	1	1
2	3	4	5
3	6	10	15
4	10	20	35
5	15	35	70
6	21	56	126
7	28	84	210
8	36	120	330
	u. s. w.		

Da in dem lezten Fache der Zusammensetzung die Zahlen 210. und 330 kommen, und solche die beyden lezten der gegebenen Zahlen 1365. 1001 ꝛc. sind: so ist klar, daß die Zahlen 1. 5. 15 ꝛc. der Anfang der Progreßionalzahlen 1365. 1001 ꝛc. sind, und daß alle diese Zahlen eine vierstuffige zusammengesetzte Progreßion machen. §. 44.

§. 44.

In der Lehre vom figürlichen Calcul werden Aufgaben vorkommen, die faſt alle in das Gebiet der zuſammengeſetzten arithmetiſchen Progreßion gehören. Ich füge alſo allhier nichts mehr, als folgende zwey hinzu.

(I.) Eine zuſammengeſetzte Progreßion zu ſummiren, in welcher die mit 1 anhebende Differenz, von einem Gliede zum andern, um eine Einheit zunimmt. §. 45.

1) Addiret 1 zur Anzahl der Glieder, und dividiret das Collect mit 3. 2) Multipliciret den Quotienten mit der Summe aller Differenzen, und addiret zum Product das mit der Anzahl der Glieder multiplicirte erſte Glied. Es ſey die Progreßion 1. 2. 4. 7. 11.

5 Anzahl der Glieder.
1 wird addirt.
6
3)
2

10 Summe der Differenzen
20
5
25 Summe der Progreßion.

1 Erſtes Glied
5 Anzahl der Glieder.
5 Product.

Die Summe der Differenzen zu finden, ſummiret ſo viele Zahlen von 1 an, als die um 1 verminderte Anzahl der Glieder beträget. Zum Exempel, in der vorhergehenden Aufgabe iſt die Anzahl der Glieder 5; und dieſe — 1 = 4. Alſo werden die vier Zahlen 1. 2. 3. 4 ſummiret, und das Collect giebt mit 10 die Summe der Differenzen.

(II.) Die Progreßion der Cubikzahlen nach ihrer natürlichen Ordnung von 1 an zu ſummiren. §. 46.

Summiret ſo viele einzelne Zahlen von 1 an, als Cubikzahlen gegeben worden, und quadriret das Collect. Z. E. es

ſeyn die vier erſten Cubikzahlen 1. 8. 27. 64. Alſo werden die vier erſten Zahlen 1. 2. 3. 4 ſummiret; kömmt 10, und da $10 \times 10 = 100$: ſo iſt die Summe von $1+8+27+64 = 100$.

Dritter Abſchnitt.

Von der geometriſchen Progreßion.

§. 47.

Eine **geometriſche Progreßion** iſt, worinnen die Zahlen in einer ſtetigen geometriſchen Proportion, oder mit gleichen Exponenten einander folgen. Sie wird formiret 1) **auffſteigend**, wenn das lezte Glied einer auffſteigenden ſtetigen geometriſchen Proportion mit dem Exponenten derſelben, und jedes kommende Glied aufs neue mit demſelben multipliciret wird. Z. E. Wenn die ſtetige Proportion $\dddot{=} 1 : 2 : 4$, deren Exponent $= 2$, ſo heißet es: $2 \times 4 = 8$, $2 \times 8 = 16$, $2 \times 16 = 32$, u. ſ. w. Die auffſteigende Progreßion iſt alsdenn $1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32$. 2) **Abſteigend**, wenn das lezte Glied einer abſteigenden ſtetigen geometriſchen Proportion mit dem Exponenten derſelben, und jedes kommende Glied aufs neue mit demſelben dividiret wird. Z. E. wenn die ſtetige Proportion $\dddot{=} 64 : 32 : 16$, deren Exponent $= 2$, ſo heiſſet es $\frac{16}{2} = 8$, $\frac{8}{2} = 4$, $\frac{4}{2} = 2$, und $\frac{2}{2} = 1$. Die abſteigende Progreßion iſt alſo: $64 : 32 : 16 : 8 : 4 : 2 : 1$.

§. 48.

Vermöge der Verſchiedenheit der Proportionen, wovon der Grund im Exponenten lieget, ſind alle geometriſche Progreßionen entweder zwey- drey- vier- oder mehrfach; z. E. **zweyfach**, wenn der Exponent $= 2$ iſt, als $1 : 2 : 4 : 8$; **dreyfach**, wenn der Exponent $= 3$ iſt, als $1 : 3 : 9 : 27$; **vierfach**, wenn der Exponent $= 4$ iſt, als $1 : 4 : 16 : 64$: **fünffach**, wenn der Exponent $= 5$ iſt, als $1 : 5 : 25 :$

125 u. ſ. w.; und alle dieſe Progreßionen erſcheinen entweder in ihren urſprünglichen oder in vergrößerten Zahlen; in ihren urſprünglichen Zahlen, als 1 : 2 : 4 : 8; in vergrößerten, als 3 : 6 : 12 : 24, oder 5 : 10 : 20 : 40, u. ſ. w.

§. 49.

Wenn von den urſprünglichen oder Grundprogreßionen die Einheit weggenommen wird: ſo beſtehet nicht allein jedes erſte Glied und der Exponent aus einerley Zahlen, z. E. in 2 : 4 : 8 : 16, oder in 3 : 9 : 27 : 81; ſondern die ganze Progreßion hat nicht mehr als eine einzige Zahl zum Grunde. Denn ob es gleich bey der Formirung der verſchiedenen Glieder heißet: 2 = 2, 2×2 = 4, 2×4 = 8, 2×8 = 16, 2×16 = 32, u. ſ. w. ſo hat man doch geſehen, daß der Multiplicator 4 aus 2×2 entſtanden iſt, und die 2 alſo ſchon zweymal geſetzet, und in ſich ſelbſt multipliciret worden; daß der Multiplicator 8 aus 2×2×2 entſtanden, und die 2 alſo ſchon dreymal geſetzet, und in ſich ſelbſt multipliciret worden. Eine Progreßion von dieſer Art erwächſet alſo aus lauter gleichen Factoren oder Multiplicatoren.

§. 50.

In ſolchen Progreßionen werden dreyerley Hauptarten von Zahlen, nach welchen alle übrige ihre Benennung erhalten, unterſchieden, nemlich Quadrat- Cubik- und Superſolidezahlen.

α) Quadrat- oder quadratiſche Zahlen ſind, die aus zwey, vier, acht, ſechszehn gleichen Factoren u. ſ. w. ſo wie die Anzahl derſelben in der zweyfachen geometriſchen Progreßion wächſet, beſtehen. Beſtehet die Quadratzahl nur aus zwey gleichen Factoren, z. E. die Zahl 4 aus 2×2, oder die Zahl 9 aus 3×3: ſo heißet ſie eine ſimple oder ſchlechtweg eine Quadratzahl. Beſtehet ſie aus vier gleichen Factoren, z. E. die Zahl 16 aus 2×2×2×2: ſo heißet ſie eine Biquadratzahl. Beſtehet ſie aus acht gleichen Factoren, z. E. die Zahl 256 aus

2×2×2×2×2×2×2×2: ſo heißet ſie eine Triquadratzahl, u. ſ. w.

β) Cubik- oder cubiſche Zahlen ſind, die aus drey, neun, ſieben und zwanzig, u. ſ. w. in dreyfacher geometriſchen Progreßion der Anzahl nach wachſenden gleichen Factoren beſtehen. Beſtehet die Cubikzahl nur aus drey gleichen Factoren, z. E. 8 aus 2×2×2, ſo heißet ſie eine ſimple oder ſchlechtweg eine Cubikzahl. Beſtehet ſie aus neun gleichen Factoren, z. E. 512 aus 2×2×2×2×2×2×2×2×2: ſo heißet ſie eine Bicubik- oder eine bicubiſche Zahl. Beſtehet ſie aus ſieben und zwanzig gleichen Factoren, z. E. 134217728 aus der 27 mal geſetzten 2: ſo heißet ſie eine Tricubik- oder eine tricubiſche Zahl u. ſ. w.

γ) Superſolidezahlen ſind, die aus fünf, ſieben, eilf, dreyzehn, ſiebzehn, neunzehn, u. ſ. w. mit den Primzahlen wachſenden gleichen Factoren hervorgebracht werden. Z. E. die Zahl 32 aus der fünfmal geſetzten 2; die Zahl 128, aus der ſiebenmal geſetzten 2, und ſo weiter.

Anmerkung.

Primzahlen ſind, die ſich durch keine andere Zahl als die 1 ausmeſſen laßen, oder welche ſich in keine Factores zerfällen laßen, durch deren Multiplication ſie entſtehen könnten. — Die Superſolidezahlen werden von einigen Auctoren Surſolidezahlen genennet. In der franzöſiſchen Sprache, wo das lateiniſche Wort *ſuper* durch *ſur* gegeben wird, iſt das Wort *ſurſolide* unſtreitig richtig; aber nicht in andern, wo das Wort *numerus ſurſolidus* allezeit eine vox hybrida ſeyn wird. Wenn nun annoch ſolide in ſoliſche verwandelt, und der Ausdruck Surſoliſche Zahl gebrauchet wird: ſo iſt dieſes ohne Zweifel doppelt falſch. Da die Nahmen der geometriſchen Zahlen figürlich ſind; der Begriff einer körperlichen Figur aber ſich nicht über drey Dimenſionen erſtrecket: ſo hat dieſer Umſtand zur Benennung derjenigen geometriſchen Progreßionalzahl, von welcher hier die Rede iſt, Gelegenheit gegeben, und welches Wort iſt dazu geſchickter, als das Wort überkörperlich oder ſuperſolide? Es wird dieſe Erklärung in der Folge deutlicher

cher werden, und zugleich erhellen, daß einige im Ausdruck gewiſſenhaftere Scribenten Unrecht gehabt haben, dem Wort ſuperſolide das Wort ſurdeſolide ſubſtituiren zu wollen, da ſich in den Superſolidenzahlen keine Eigenſchaft von demjenigen äußert, was man ſonſt allhier ſurde oder irrational nennet, es müßte denn deswegen ſeyn, weil ſie auf Primzahlen fallen.

§. 51.

Wir haben die drey Hauptarten von Zahlen in den geometriſchen Progreßionen kennen gelernet, und geſehen, wie bey jeder Hauptart eine gewiſſe Zahl zum Grunde lieget, aus deren wiederholten Multiplication in ſich ſelbſt jene Zahlen erwachſen. Dieſe zum Grunde liegende Zahl wird überhaupt die **Wurzel** einer Progreßion, insbeſondere aber eine **Quadratwurzel** genennet, in ſoweit ſie den Grund einer Quadratzahl enthält; eine **Cubikwurzel**, in ſoweit ſie den Grund einer Cubikzahl enthält, u. ſ. w. Auf dieſe Weiſe iſt die Zahl 2 die Wurzel der zweyfachen Progreßion 2:4:8:16; insbeſondere aber die Wurzel der Quadratzahl 4; oder der Cubikzahl 8, u. ſ. w.

§. 52.

Die geometriſchen Progreßionalzahlen werden, in Abſicht auf eben dieſelbe Progreßion betrachtet, in reine und vermiſchte unterſchieden. Man nennet ſie **rein**, wenn ſie entweder als bloße Quadrat- Cubik- oder Superſolidezahlen vorkommen; und **vermiſcht**, wenn ſie zugleich als Quadrat- und Cubikzahlen, oder als Quadrat und Superſolidezahlen; oder als Cubik- und Superſolidezahlen, oder endlich als Quadrat- Cubik- und Superſolidezahlen vorkommen. Z. E. in der zweyfachen Progreßion 2:4:8:16 ꝛc. kommt die Zahl 4 als eine reine Quadrat- die 8 als eine reine Cubik- und die 32 als eine reine Superſolidezahl vor. Hingegen iſt in eben dieſer Progreßion die Zahl 64 eine Quadratcubiſche; die Zahl 1024 eine Quadrat- A Superſolide; die Zahl 32768 eine Cubik- A Superſolide, und die Zahl 1073741824 eine Quadrat- Cubik- A Superſolidezahl. Um

dieſe Eintheilung, zu deren Verſtändniß ſchon vermittelſt des §. 50. vorbereitet worden, einzuſehen, merke man:

1) Daß jedes durch 2 theilbare, und folglich jedes gerade Ordnungsglied einer mit ihrem Exponenten anhebenden Progreßion, als das 2te, 4te, 6te, 8te u. ſ. w. eine quadratiſche Zahl enthält, ſie mag ſonſten ſimpel, oder bi- oder triquadratiſch ſeyn, u. ſ. w. Folglich ſind in der zweyfachen Progreßion 2:4:8:16 ꝛc. die Zahlen 4. 16. 64. 256. 1024. ꝛc. quadratiſche Zahlen.

2) Daß jedes durch 3 theilbare, und folglich das 3te, 6te, 9te, 12te, 15te Ordnungsglied u. ſ. w. eine cubiſche Zahl enthält, ſie mag nun ſimpel, oder bi- oder tricubiſch ſeyn, u. ſ. w. Folglich ſind in der Progreßion 2:4:8:16 ꝛc. die Zahlen 8. 64. 512. 4096. u. ſ. w. cubiſche Zahlen.

3) Daß jedes durch 6 theilbare Glied, als das 6te, 12te, 18te, 24te u. ſ. w. zugleich eine Quadrat- und Cubikzahl iſt, z. E. die Zahlen 64. 4096. 262144. 16777216 u. ſ. w. in der Progreßion 2:4:8:16.

4) Daß alle Glieder, die auf eine Primzahl fallen, z. E. auf 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23 u. ſ. w. weder Quadrat- noch Cubik- ſondern Superſolidezahlen ſind, z. E. die Zahlen 32. 128. 2048. 8192. 131072 u. ſ. w. in der Progreßion 2:4:8:16.

5) Daß alle Glieder, welche auf eine durch 2. 3. 4. ꝛc. multiplicirte Primzahl fallen, vermiſchte Zahlen von der Art ſind, als ſolche zum Anfang dieſes §. 52. beſchrieben worden. Wenn man z. E. die vier Primzahlen 5. 7. 11. 13, auf welche keine andre als Superſolidezahlen fallen, durch 2, 3, oder 4 multiplıciret, als:

Primzahlen	5.	7.	11.	13
durch 2 multipliciret	10.	14.	22.	26
durch 3 —	15.	21.	33.	39
durch 4 —	20.	28.	44.	52

u. ſ. w.

ſo geſchicht es dadurch, α) daß jedes 10te Glied als ein gerades durch 2 theilbares Glied, zwar eine Quadratzahl; aber als ein durch 2×5 aus der Primzahl 5 entſtandnes Glied, zugleich eine Superſolidezahl iſt; z. E. die in der Progreßion 2:4:8:16 auf das 10te Glied fallende Zahl 1024, welche ſowohl durch 32×32, als durch 4×4×4×4×4 zerfället werden kann. β) Daß jedes 15te Glied, als ein durch 3 theilbares Glied eine Cubikzahl, und als ein durch 3×5 von der Primzahl 5 herrührendes Glied, zugleich eine Superſolidezahl iſt; z. E. die in der Progreßion 2:4:8:16 ꝛc. auf das 15te Glied fallende Zahl 32768, welche ſowohl durch 32×32×32, als durch 8×8×8×8×8 aufgelöſet werden kann. γ) Daß jedes 30te Glied, als ein ſowohl durch 2 als 3 theilbares Glied, zwar eine Quadrat- und Cubikzahl; aber als ein durch 6×5 von der Primzahl 5 herrührendes Glied, zugleich eine Superſolidezahl iſt; z. E. die in der Progreßion 2:4:8:16 ꝛc. auf das 30te Glied fallende Zahl 1073741824, welche ſowohl durch 32768×32768 und durch 1024×1024×1024, als durch 64×64×64×64×64 aufgelöſet werden kann.

Wenn man in der Multiplication der Primzahlen nach voriger Art ſo weit kömmt, daß die Primzahl durch ſich ſelbſt multipliciret, und ſie alſo quadriret wird, z. E. die Primzahl 5 durch 5×5=25; ſo wird diejenige Zahl, die auf ein ſolches Glied fällt, z. E. allhier auf das 25te, eine A**Biſuperſolidezahl** genennet, z. E. die Zahl 33554432 aus 32×32×32×32×32 in der Progreßion 2:4:8:16. Wird bey fortgeſetzter Multiplication der Primzahl, ſolche dreymal geſetzet, und alſo cubiret, z. E. die Primzahl 5 durch 5×5×5=125: ſo wird diejenige Zahl, die auf ein ſolches Glied, allhier das 125te fällt, eine A**Triſuperſolidezahl** genennet, u. ſ. w. Man ſehe die **Anmerkung** zum §. 53.

§. 53.

Wir sind nunmehr im Stande, eine ganze Progreßion zu benennen, sie bestehe aus so viel Gliedern als sie wolle, und es sey eine zwey- drey- vier- oder mehrfache Progreßion, indem alles was von der einen in diesem Punkt gilt, auch von einer andern zu verstehen ist. Ich will die Progreßion 2:4:8:16 vom ersten bis zum 36ten Gliede, mit ihren nach obiger Anleitung eingerichteten Benennungen zum Exempel hersetzen, bey welchen die lateinischen Buchstaben A B C D, u. s. w. anstatt 1. 2. 3. 4 gebräuchet werden.

Ordnungszahl der Glieder.	Die Progreßion selbst.	Nahmen der Glieder.
1	2	Wurzel der Progreßion.
2	4	Quadratzahl.
3	8	Cubikzahl.
4	16	Biquadratzahl.
5	32	Erste Supersolidezahl, oder A Supersolidezahl.
6	64	Quadrat-Cubikzahl.
7	128	Zweyte oder B Supersolidezahl.
8	256	Triquadratzahl.
9	512	Bicubikzahl.
10	1024	Quadrat- erste oder A Supersolidezahl.
11	2048	Dritte oder C Supersolidezahl.
12	4096	Biquadrat-Cubikzahl.
13	8192	Vierte oder D Supersolidezahl.
14	16384	Quadrat- zweyte Supersolidezahl, oder Quadrat B Supersolidezahl.
15	32768	Cubik- erste Supersolidezahl.
16	65536	Quadriquadratzahl.
17	131072	Fünfte oder E Supersolidezahl.
18	262144	Quadrat- Bicubikzahl.
19	524288	Sechste oder F Supersolidezahl.
20	1048576	Biquadrat- A Supersolidezahl.

Ordnungszahl d. Glied	Die Progreßion ſelbſt.	Nahmen der Glieder.
21	2097152	Cubik- zweyte Superſolidezahl.. oder Cubik B Superſolidezahl.
22	4194304	Quadrat- dritte oder C Superſolidezahl.
23	8388608	Siebente oder G Superſolidezahl
24	16777216	Triquadrat-Cubikzahl.
25	33554432	A Biſuperſolidezahl.
26	67108864	Quadrat- vierte oder D Superſolidezahl.
27	134217728	Tricubikzahl.
28	268435456	Biquadrat- zweyte oder B Superſolidezahl.
29	536870912	Achte oder H Superſolidezahl.
30	1073741824	Quadr.-Cub.- A Superſolidezahl
31	2147483648	Neunte oder I Superſolidezahl.
32	4294967296	Quinquadratzahl.
33	8589934592	Cubik- dritte oder C Superſolidezahl.
34	17179869184	Quadrat- fünfte oder E Superſolidezahl.
35	34359738368	A Super B Superſolidezahl.
36	68719476736	Biquadrat - Bicubikzahl. u. ſ. w.

Anmerkung.

Um die Benennung der vermiſchten Potenzen deſto gewiſſer zu finden, zerfället das Ordnungsglied der verlangten Potenz, und ſetzet ihre Benennung aus den Factorer zuſammen. Z. E. um die 24te Zahlgröße zu benennen, ſaget $3 \times 8 = 24$. Wenn nun auf das 3te Ordnungsglied eine Cubic- und auf das 8te ein Triquadratzahl fällt: ſo heiſſet das 24te Glied eine Triquadrat-Cubikzahl. Das 35te Glied entſteht aus $5 \times 7 = 35$. Alſo ſaget A Super B Superſolidezahl; u. ſ. w. Noch eine Anmerkung, welche darinnen beſteht, daß, wie die in dem erſten Hundert auf Primzahlen fallende Superſolidezahlen mit einem einfachen Buchſtaben, als A, B, C, ꝛc. ſo die aus dem zweyten Hundert mit doppelten Buchſtaben, als AA, BB, CC, u. ſ. w. bezeichnet werden. So iſt z. E. die auf das 101ſte Glied fallende Zahlgröße eine AA Superſolidezahl; die auf das 103te fallende eine BB Superſolidezahl u. ſ. w.

§. 54.

Da die vorhergehenden Benennungen der geometriſchen Zahlgrößen viele Beſchwerlichkeit mit ſich führen, ſo iſt man ſchon ſeit langer Zeit gewohnt, ſie durch die Wörter **Dignität** oder **Potenz**, mit Hinzufügung des Grades, den ſie in der Progreßion einnehmen, zu characteriſiren. Hievon in dem folgenden Artikel.

Erſter Artikel.

Von den geometriſchen Potenzen und der Ausziehung ihrer Wurzeln überhaupt.

§. 55.

Die Wörter **Potenz** oder **Dignität** werden ſowohl bey der arithmetiſchen als geometriſchen Progreßion gebrauchet. Was ſie bey der erſten bedeuten, findet man in der Lehre vom figürlichen Calcul an ſeinem Ort beſchrieben. Allhier wird jedes Glied einer mit ihrem Exponenten anhebenden geometriſchen Progreßion durch einen dieſer Nahmen bezeichnet. So iſt z. E. in der Progreßion 2 : 4 : 8 : 16, die Zahl 2 die erſte Potenz oder die Wurzel; die Zahl 4 die zweyte Potenz; die Zahl 8 die dritte, und die Zahl 16 die vierte Potenz. Indeſſen pfleget man ſich bey den erſtern Potenzen ſowohl dieſer als der figürlichen Nahmen ohne Unbequemlichkeit vermiſcht zu bedienen, als: 5te **Potenz** oder **ſuperſolide Zahl**; 4te **Potenz** oder **Biquadratzahl**; 3te **Potenz** oder **Cubikzahl**; 2te **Potenz** oder **Quadratzahl**. Wenn übrigens, wie oben gezeiget worden, eine geometriſche Progreßion auf die Multiplication mit gleichen Factoren gegründet iſt: ſo kann man eine **Potenz** durch jedes Product aus gleichen Factoren oder Efficienten; und die **Wurzel** dieſer Potenz durch einen von dieſer Potenz abgeſonderten Factor beſchreiben. Auf dieſe Weiſe iſt das Product 4 aus 2×2 eine Potenz, und die Zahl 2 iſt die Wurzel derſelben. So iſt ferner das Product 8 aus $2 \times 2 \times 2$ eine Potenz, und die Zahl 2 iſt die Wurzel derſelben.

§. 56.

§. 56.

Zur Bezeichnung des Grades einer Zahlgröße oder deren Wurzel bedienet man ſich einer kleinen Ziffer. Wenn eine ſolche kleine Ziffer einer Zahl oben zur rechten Hand hinzugefüget wird, ſo zeiget ſolches, daß dieſe Zahl ſo viel mal geſetzet, und in ſich multipliciret werden ſoll, als die kleine Ziffer Einheiten in ſich faſſet. Iſt ſie alſo eine 2, ſo muß die Zahl zur zweyten Potenz erhoben, d. i. quadriret werden. Iſt ſie eine 3, ſo muß die Zahl zur dritten Potenz erhoben oder cubiret werden, u. ſ. w. Folglich ſind folgende Ausdrücke einerley:

$3^2 = 3 \times 3 = 9$ $\quad 2^2 = 2 \times 2 = 4$

$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$ $\quad 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ $\quad 2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16.$

Das heißet: daß die Zahl 3 zur zweyten Potenz erhoben, und alſo ihr Quadrat 9 geſuchet werden ſoll, u. ſ. w.

Wenn hernach das Zeichen $\sqrt{\ }$ zur Linken einer Zahlgröße geſetzet, und in die Oefnung deſſelben eine kleine Ziffer geſchrieben wird: ſo bedeutet dieſes, daß dieſe Zahlgröße eine Potenz von ſo viel Graden iſt, als die kleine Ziffer Einheiten in ſich hält, und daß ihre Wurzel darnach extrahiret werden ſoll. Es ſind alſo folgende Ausdrücke einerley:

$\sqrt[2]{9} = \sqrt[2]{3 \times 3} = 3$

$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3 \times 3 \times 3} = 3$

Das heiſſet: daß die Zahl 9 eine zweyte Potenz iſt, deren Quadratwurzel 3 geſuchet werden ſoll; und daß die Zahl 27 eine dritte Potenz iſt, deren Cubikwurzel 3 geſuchet werden ſoll.

Es werden dieſe kleine Ziffern die Kennziffern oder Exponenten einer Potenz genennet. Bey der Quadratwurzel aber bleibt insgemein die Kennziffer 2 weg, wie ſchon oben erinnert worden.

Anmerkung.

In den mathematiſchen Schriften voriger Zeit wird die Quadratzahl eine Zenszahl (numerus Zenſus), genennet, und durch Z bemerket; die Cubikzahl durch C; die Biquadratzahl (Zenſo-Zenſus) durch ZZ; die erſte Superſolidezahl durch Aß; die Quadrat-Cubikzahl (Zenſo-Cubus) durch ZC u. ſ. w.

§. 57.

§. 57.

Wir wollen die geometrischen Potenzen außerhalb den Progressionen betrachten, in welche sie gehören. Wie würde man es anzufangen haben, wenn man eine Potenz construiren wollte? Z. E. eine zweyte Potenz. Man mache ein Product von zwey gleichen Factoren. Eine dritte Potenz; man mache ein Product von drey gleichen Factoren, u. s. w. oder, welches einerley ist, man setze eine gegebne Zahl zweymal und multiplicire sie in sich selbst, um eine zweyte Potenz hervorzubringen; man setze eine gegebne Zahl dreymal, und multiplicire sie in sich selbst, um eine dritte Potenz hervorzubringen, u. s. w.

Wenn ein reiner Bruch, z. E. $\frac{3}{7}$ zu einer Potenz erhoben werden soll? Quadriret sowohl den Zähler als Nenner; kömmt $\frac{9}{49}$ für das Quadrat von $\frac{3}{7}$; cubiret sowohl den Zähler als Nenner; kömmt $\frac{27}{343}$ für den Cubus von $\frac{3}{7}$, und so weiter. Ist es ein unreiner Bruch, z. E. $2\frac{3}{4}$? Verwandelt ihn in den reinen $\frac{11}{4}$; quadriret sowohl den Zähler als Nenner, kömmt $\frac{121}{16}$, und dividiret mit dem Nenner in den Zähler; kömmt $7\frac{9}{16}$ für das Quadrat von $2\frac{3}{4}$. Cubiret sowohl den Zähler als Nenner von $\frac{11}{4}$, kömmt $\frac{1331}{64}$; und dividiret mit dem Nenner in den Zähler, kömmt $20\frac{51}{64}$ für den Cubus von dem unreinen Bruch $2\frac{3}{4}$, und so weiter. Hier folgen einige

Vortheile
bey Erhebung der Zahlen in höhere Potenzen.

α) Zerfället den Exponenten der gesuchten Dignität in mehrere Factoren. Z. E. es soll 2^{24}, das ist, die Zahl 2 soll zur 24sten Potenz erhoben werden. Also $24 = 3 \times 2 \times 2 \times 2$. Von diesen Factoren zeiget der eine z. E. die Zahl 3 die dritte Potenz an, zu welcher man die 2 erheben soll. Machet also $2^3 = 8$. Der folgende Factor 2 zeiget die Potenz an, zu welcher die eben gefundene $8 = 2^3$ wieder erhoben werden soll. Also $8^2 = 64$. und so weiter. Es wird die 24ste Potenz von 2 also auf folgende Art gefunden:

$2^3 = 8$

$2^3 = 8$
$8^2 = 64$
$64^2 = 4096$
$4096^2 = 16777216 = 2^{24}$.

Eben ſo findet man 2^{32} auf folgende Art,
weil $32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$.

$2^2 = 4$
$4^2 = 16$
$16^2 = 256$
$256^2 = 65536$
$65536^2 = 4294967296 = 2^{32}$

β) Wenn ſich der Exponent nicht auf vorhergehende Art durch die Diviſion zerfällen läſſet, ſo verfahret, wie folget,

wenn der Exponent klein iſt, z. E. 7.

Zerfället ihn durch die Subtraction in zwey oder mehr Zahlen oder Poſten, deren Summe dem Exponenten gleich iſt; z. E. die Zahl 7 in $4+3$. Jeder dieſer Poſten zeiget an, zu welchen Potenzen man die gegebne Wurzel erheben ſoll. Z. E. es ſoll 2^7 gefunden werden. Machet alſo $2^4 = 16$ und $2^3 = 8$, und multipliciret die dadurch gefundnen Potenzen in einander; folglich 16×8. Das Product iſt die gefundne Potenz der Zahl, $16 \times 8 = 128 = 2^7$.

wenn der Exponent groß iſt, z. E. 27. 31.

1) Suchet eine nicht viel höhere oder niedrigere Zahl, welche ſich in kleinere Factoren, und zwar, wo möglich, durch 2 und 3 zerfällen läſſet. Z. E. es wird verlanget 2^{27} und 2^{31}: ſo ſind für den Exponenten 27 die Zahl 24, für 31 aber die Zahl 32 ſolche Zahlen. 2) Zerfället dieſe Zahlen auf vorhin beſchriebene Art, und ſuchet die Potenz, welche ſie anzeigen, als $2^{24} = 16777216$, und $2^{32} = 4294967296$. 3) Hierauf ſuchet diejenige Potenz der gegebnen Zahl, deren Exponent der Zahl gleich iſt, um welche die in Factoren zerfällte Zahl entweder höher oder niedriger als der

Expo-

Exponent der verlangten Potenz ist. In den gegenwärtigen Exempeln macht man also, da $27 = 24 + 3$, und $31 = 32 - 1$, für 2^{24}, $2^3 = 8$ und $2^1 = 2$ für 2^{31}.

4) Ist jene Zahl, wie die Zahl 24, zu niedrig: so multipliciret, und ist sie zu hoch wie die Zahl 32, so dividiret die vermittelst der 2ten Operation gefundne Potenzen mit den in der 3ten Operation gefundnen. Im erstern Falle ist das Product und im leztern der Quotient die gefundne Potenz.

Also $2^{24} \times 2^3 = 16777216 \times 8 = 134217728 = 2^{27}$

$\frac{2^{32}}{2^1} = \frac{4294967296}{2} = 2147483648 = 2^{31}$.

§. 58.

So leicht es aber ist, eine Potenz hervorzubringen, weil uns die dazu nöthige Anzahl und Beschaffenheit der Factoren bekannt ist: so hat man gegentheils einiger Regeln vonnöthen, die Wurzeln aus den Potenzen zu ziehen, weil uns die Größen, woraus sie entstanden, unbekannt sind. Unter den vielerley zu diesem Behuf erfundenen Methoden, scheinet mir diejenige, welche auf den **Gebrauch der Trigonalzahlen** gegründet ist, wegen ihrer Leichtigkeit in der Ausübung, im Ziffercalcul die vorzüglichste zu seyn. Ich werde sie darlegen, wenn ich annoch einige Vortheile, vermittelst welcher man sich die Ausziehung gewisser höhern Potenzen erleichtern kann, und einige andere Sätze werde beygebracht haben.

§. 59.

Vortheile.

1) **Die Wurzel aus der vierten Potenz zu ziehen.** Da die vierte Potenz eine Biquadratzahl ist, so extrahiret die Quadratwurzel zweymal. Es sey die Zahl 16. Wenn aus selbiger die Quadratwurzel 4, und aus 4 die Quadratwurzel 2 gezogen wird: so ist 2 die Wurzel aus der vierten Potenz 16.

2) **Die Wurzel aus der sechsten Potenz zu ziehen.** Da die sechste Potenz eine Quadrat-Cubikzahl ist: so extra-

extrahiret die Quadrat- und aus ſelbiger die Cubikwurzel. Es ſey die Zahl 64. Wenn aus ſelbiger die Quadratwurzel 8, und aus 8 die Cubikwurzel 2 gezogen wird: ſo giebet dieſe 2 die Wurzel der ſechſten Potenz 64.

3) **Die Wurzel aus der achten Potenz zu ziehen.** Da die achte Potenz eine Triquadratzahl iſt: ſo extrahiret die Quadratwurzel dreymal. Es ſey die Zahl 256. Wenn aus ſelbiger die Quadratwurzel 16; aus 16 die Quadratwurzel 4, und aus 4 die Quadratwurzel 2 gezogen wird: ſo giebet dieſe 2 die Wurzel der achten Potenz 256.

4) **Die Wurzel aus der neunten Potenz zu ziehen.** Da die neunte Potenz eine Bicubikzahl iſt: ſo extrahiret zweymal die Cubikwurzel. Es ſey die Zahl 512. Wenn aus ſelbiger die Cubikzahl 8, und aus 8 die Cubikzahl 2 gezogen wird: ſo giebet dieſe 2 die Wurzel der neunten Potenz 512.

5) **Die Wurzel aus der zehnten Potenz zu ziehen.** Da die zehnte Potenz eine Quadrat- A Superſolidezahl iſt: ſo extrahiret die Quadratwurzel, und aus dieſer die A Superſolidewurzel, d. i. die Wurzel der fünften Potenz. Es ſey die Zahl 1024. Wenn aus ſelbiger die Quadratwurzel 32, und aus dieſer die A Superſolidewurzel 2 gezogen wird: ſo giebet die Zahl 2 die Wurzel der zehnten Potenz 1024.

6) **Die Wurzel aus der zwölften Potenz zu ziehen.** Da die zwölfte Potenz eine Biquadrat-Cubikzahl iſt: ſo extrahiret die Quadratwurzel zweymal, und daraus die Cubikwurzel. Es ſey die Zahl 4096. Wenn aus ſelbiger die Quadratwurzel 64, und aus 64 die Quadratwurzel 8, und aus 8 die Cubikwurzel 2 gezogen wird: ſo giebet dieſe 2 die Wurzel der zwölften Potenz 4096.

7) **Die Wurzel aus der vierzehnten Potenz zu ziehen.** Da die vierzehnte Potenz eine Quadrat- B Superſolide

perſolidezahl iſt: ſo extrahiret die Quadrat- und aus dieſer die B Superſolidewurzel. Es ſey die Zahl 16384. Wenn aus ſelbiger die Quadratwurzel 128, und aus ſelbiger die B Superſolidewurzel 2 gezogen wird: ſo giebet dieſe 2 die Wurzel der vierzehnten Potenz 16384.

8) **Generalregel, jede Wurzel einer Potenz, deren Exponent ſich zerfällen läſſet, am vortheilhafteſten auszuziehen.** 1) Zerfället den Exponenten der verlangten Potenz, und wo möglich dergeſtalt, daß die Zahlen 2 und 3 zu Factoren kommen. 2) Ziehet nach Maaßgabe der gefundnen Factoren, welche ſo viele Exponenten von Potenzen ſind, die Wurzeln eine nach der andern aus der gegebenen Zahl. Z. E. es wird verlanget $\sqrt[24]{}$ 16777216.

Da ſich die Zahl 24 zerfällen läßet durch $3 \times 8 = 3 \times 2 \times 2 \times 2$: ſo ziehet aus der Zahl 16777216 zuvörderſt die Cubikwurzel; oder, weil die Zahl groß und es einerley iſt, ob der Factor 3 oder 2 zuerſt genommen wird, ſo extrahiret zuerſt die Quadratwurzel 4096. Aus der Zahl 4096 ziehet hernach die Quadratwurzel 64; aus 64 die Quadratwurzel 8, und aus 8 endlich die Cubikwurzel 2, welche Zahl die 24te Wurzel aus 16777216 ſeyn wird.

Anmerkung.

Ein berühmter Jeſuit, **Paul Guldinus**, hat ſich die Mühe gegeben, die Quadratzahlen von 1 bis 100000000, und die Cubikzahlen von 1 bis 1000000000000 zuſammeln, und ſolche nebſt ihren Wurzeln von 1 bis 10000 in Tabellen zu ediren; und der Baron von Wolf hat dieſe Tabellen in dem zweyten Theile ſeines mathematiſchen Lexici ganz, und in ſeinen Tabulis ſinuum von 1 bis zur Wurzel 1000 abdrucken laſſen. Vermittelſt dieſer Tabellen kann man ſich nun unſtreitig alle Regeln erſparen, ſo lange eine verlangte Quadrat- oder Cubikwurzel innerhalb dem Umfang der Zahl 10000 oder 1000 enthalten iſt; eben ſo wie ſolches vermittelſt der gewöhnlichen Logarithmen geſchehen kann, ſo lange die Potenz, aus welcher eine Wurzel extrahiret werden ſoll, nicht die Zahl 10000000 überſchreitet. Da aber ſowohl jene

Tabel-

Tabellen, welche nur auf die vorzüglichſten Potenzen, das iſt, die quadratiſchen und cubiſchen eingerichtet ſind, und von deren Verfertigung in der Lehre vom figürlichen Calcul gehandelt werden wird, als die Logarithmen in ihre Gränzen eingeſchloſſen, und die Hülfsmittel, über dieſe Gränzen hinauszugehen, immer Regeln ſind: ſo ſcheinet es vortheilhafter zu ſeyn, die eigentlichen Regeln in Bereitſchaft zu haben, nach welchen ſich die Wurzel jeder Potenz, ſie ſey von was für einem Grade, und beſtehe aus ſo viel Zahlen, als ſie wolle, aus der erſten Hand finden läſſet.

§. 60.

Die Exempel, deren ich mich im vorhergehenden §. 59. bedienet habe, um gewiße Vortheile bey der Extraction der Wurzeln nachzuweiſen, enthalten lauter ganze Wurzelzahlen. Dieſer Umſtand findet nicht bey allen Zahlen ſtatt, indem zwar eine jede geſchickt iſt, zu einer Quadrat- Cubik- oder Biquadratzahl u. ſ. w. erhöhet zu werden; aber nicht eine jede juſt eine Quadrat- Cubik- oder Biquadratwurzel u. ſ. w. enthält. So kann z. E. die Zahl 69 durch 69 × 69 zu einer Quadratzahl 4761 erhöhet werden. Hingegen enthält die Zahl 69 nicht eine vollkommene Quadratwurzel, indem ſolche größer als 8 und kleiner als 9 iſt, und ſie alſo nur beynahe ausgedrücket werden kann. Man unterſcheidet alſo in Abſicht hierauf bey dem Geſchäft der Ausziehung der Wurzeln die Zahlen in rational und irrational oder ſurde Zahlen, und verſtehet unter den erſten diejenigen, die juſt eine Wurzel geben, ohne daß etwas übrig bleibt; und unter den lezten diejenigen, die nicht juſt eine Wurzel geben, ſondern einen Reſt laſſen. Unterdeſſen iſt dieſer Unterſcheid in Anſehung verſchiedener Zahlen hier nur relativiſch, indem manche Zahl zugleich rational und irrational ſeyn kann; z. E. die Zahl 36 iſt eine Rationalzahl, in ſoweit ſie als eine Quadratzahl betrachtet wird, und ihre Wurzel gerade 6 ohne Reſt iſt. Hingegen iſt eben dieſe Zahl 36 irrational, in ſo weit ſie als eine Cubikzahl betrachtet wird, indem ihre Wurzel in dieſem Falle zwiſchen 3 und 4 fällt, und nicht vollkommen beſtimmet werden kann. Es giebet aber auch Zahlen, die in jeder Betrachtung irrational ſind, z. E. alle Primzahlen, 5. 7. 11. 13 u. ſ. w. als aus

welchen ſich weder eine Quadrat- noch Cubik- noch andere Wurzel anders als durch die Annäherung ziehen läſſet. Was hier von den Potenzen in ganzen Zahlen geſaget worden, gilt auch von den gebrochnen, wenn aus ſelbigen eine Wurzel gezogen werden ſoll. So iſt z. E. der Bruch $\frac{2}{100}$ rational in Abſicht auf die Quadratwurzel $\frac{1}{10}$; der Bruch $\frac{1}{12}$ hingegen ein irrationaler Bruch.

§. 61.

Ich komme auf die Ausziehung der Wurzeln ſelbſt. Bey ſelbiger iſt zu beobachten:

(I.) Die Zuſammenzählung der Wurzelziffern. Dieſe geſchicht, wenn die Ziffern oder Figuren der Potenz von der Rechten gegen die Linke punktiret werden; und zwar wird in den Quadratzahlen jede dritte Ziffer und alſo die 1ſte, 3te, 5te, 7te u. ſ. w. in den Cubikzahlen jede vierte, und alſo die 1ſte, 4te, 7te, 10te u. ſ. w. und in den Biquadratzahlen jede fünfte; und alſo die 1ſte, 5te, 9te, 13te, u. ſ. w. punktiret. Vermittelſt dieſer Punktirung wird man finden, daß die Wurzel der Quadratzahl 841, oder 1024 aus zwey Ziffern beſteht, und die Wurzel der Quadratzahl 11025, und 109561 aus dreyen; daß die Wurzel der Cubikzahl 1331 oder 10648 oder 103823 aus zwey Ziffern, und die Wurzel der Cubikzahl 1030301, oder 10077696 oder 476379541 aus drey Ziffern beſteht, u. ſ. w. Man kann aber dieſer Punktirung überhoben ſeyn, wenn man die gegebene Potenz ſogleich nach folgender Anweiſung in Claſſen eintheilet, als woraus ſich die Anzahl der Ziffern einer Wurzel ebenfalls finden läßet.

(II.) Die Eintheilung der Potenz in Claſſen. Dieſe Eintheilung geſchicht ebenfalls von der Rechten zur Linken, und die Anzahl der Ziffern wird in jeder Claſſe dem Exponenten der Potenz gleich gemacht. Alſo kommen in einer Quadratzahl zwey Ziffern auf eine Claſſe; in einer Cubikzahl drey; in einer Biquadratzahl vier, u. ſ. w. Z. E.

Qua-

Quadratzahl 13|03|21. Cubikzahl 13|995|521. Ob die erſte Claſſe linker Hand ſo viele Ziffern enthält, als die folgenden, oder nicht, daran iſt nichts gelegen. Sie machet immer eine Claſſe aus, und ſo viele Claſſen kommen, ſo viele Theile hat die Wurzel.

(III.) Die Erfindung der erſten Wurzelziffer. Dieſe Ziffer wird nach Anleitung einer in der Folge darzulegenden Tabelle gefunden, in welcher die Wurzeln von 1 bis 10 enthalten ſind. Die übrigen Wurzelziffern werden auf andere Art geſuchet, und auf eben diejenige Art, als ſolches in Anſehung der zweyten Wurzelziffer geſchicht, wird auch die dritte, vierte und fünfte u. ſ. w. gefunden.

(IV.) Die Erfindung der zweyten und aller folgenden Wurzelziffern. Verfertiget einen arithmetiſchen Triangel nach der Art, wie bey Fig. 1. Tab. I. und brauchet denſelben, wie gelehret werden wird.

§. 62.

Die Trigonalzahlen, von welchen wir in der Lehre vom figürlichen Calcul handeln werden, und aus welchen der arithmetiſche Triangel zuſammengeſetzet iſt, erſcheinen nach der Art ihrer Entſtehung folgendergeſtalt zu Papier:

1							
2	1						
3	3	1					
4	6	4	1				
5	10	10	5	1			
6	15	20	15	6	1		
7	21	35	35	21	7	1	
8	28	56	70	56	28	8	u. ſ. w.

Wir laſſen aber von ſelbigen nicht allein die Einheiten weg, ſondern ſchreiben ſie annoch auf die Art, wie bey Fig. 1. Tab. I. in einen gleichſeitigen Triangel zuſammen, um ſie dadurch zu unſerm Zweck bequemer zu machen. In dieſem Triangel, der ſo weit ausgedehnet werden kann, als man verlanget, lauffen, mit den natürlichen Zahlen parallel, erſtlich die zweyten Trigonalpotenzen 3. 6. 10. 15, u. ſ. w. hernach die dritten

Trigonalpotenzen 4. 10. 20. 35, u. ſ. w. hernach die vierten Trigonalpotenzen 5. 15. 35. 70. u. ſ. w. Dieſe Anmerkung betraf die Conſtruction der Figur. In Anſehung ihres Gebrauchs, der bald näher beſtimmet werden wird, merken wir, daß wir α) bey den Quadratzahlen die erſte Trigonalwurzel allhier, nemlich die 2; β) bey den Cubikzahlen die zwey Trigonalen 3. 3; γ) bey den vierten Potenzen oder den Biquadratzahlen die Zahlen 4. 6. 4 aus dem Triangel; δ) bey den fünften Potenzen oder Superſolidezahlen die Zahlen 5. 10 10. 5 des Triangels, u. ſ. w. gebrauchen. Man darf alſo nur auf den Exponenten einer Potenz Acht geben, um ſofort zu wiſſen, (da die Seiten des Triangels mit den natürlichen Zahlen 2. 3. 4 ꝛc. fortgehen, wie die Exponenten der Potenzen,) welcher Reihe von Zahlen man zur Ausziehung einer Wurzel nöthig hat. Da die Trigonalen und ihre Wurzeln in dem arithmetiſchen Triangel unter einander vermiſchet werden: ſo werden dieſe Zahlen überhaupt Trigonalpotenzen oder in Abſicht auf das Geſchäft der Ausziehung der Wurzeln, die Genituren der Wurzeln genennet.

Zweyter Artikel.

Von der Ausziehung der Wurzeln beſonders.

§. 63.

Ich ſchicke eine Wurzeltabelle von 1 bis 10, für die Quadrat- Cubik- Biquadrat- Superſoliden- und Quadratcubikzahlen voran. Man kann ſich nach Anleitung derſelben eine ähnliche Tabelle für die folgenden Potenzen verfertigen. Den Gebrauch dieſer Tabelle findet man in der hinter jedem Exempel folgenden Erklärung der Operationen beſchrieben.

Wurzeln.	Quadratzahlen.	Cubikzahlen.	Biquadratzahlen.	Supersolidzahlen.	Quadratcubikzahlen.
1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64
3	9	27	81	243	729
4	16	64	256	1024	4096
5	25	125	625	3125	15625
6	36	216	1296	7776	46656
7	49	343	2401	16807	117649
8	64	512	4096	32768	262144
9	81	729	6561	59049	531441
10	100	1000	10000	100000	1000000

§. 64.

Es sey die Zahl 5929225, um aus selbiger die Quadratwurzel zu ziehen.

1. *Divid.*	5	92	92	25	(2435 die gefundne □wurzel.
	4	: :	: :	: :	
2. *Divid.*	192	: :	: :		
	176	: :	: :		
3. *Divid.*	1692	: :			
	1449	: :			
4. *Divid.*	24325				
	24325				
	0				

Es sey die Zahl 11943936, um aus selbiger die Quadratwurzel zu ziehen.

1. *Divid.*	1	19	39	36	(3456 die gefundne Quadratwurzel.
	9	: :	: :	: :	
2. *Divid.*	1094	: :	: :		
	256	: :	: :		
3. *Divid.*	13836	: :			
	3425	: :			
4. *Divid.*	41436				
	41436				
	0				

Erklärung der Operationen für das erste Exempel.

α) Um die erste Wurzelziffer, allhier 2, zu finden.

Suchet, nach Anleitung der im §. 63 dargelegten Wurzeltabelle, eine Quadratzahl, welche dem Dividuo 5 der ersten Classe linker Hand am nächsten kömmt; ist allhier 4. Setzet die Quadratwurzel 2 hinter den Bogen an die Stelle der ersten Wurzelziffer, und ziehet das Quadrat 4 von 5 ab. Schreibet zu dem Rest 1 die zweyte Classe 92 herunter; kömmt 192 für das zweyte Dividuum.

β) Um die zweyte Wurzelziffer, allhier 4, zu finden.

1) Dupliret die erſte Wurzelziffer, kömmt 4. Dividiret mit dem Duplo 4 in das zweyte Dividuum 192, oder vielmehr, ſehet wie vielmal das Duplum 4 in das, jedoch nicht weiter als bis zur erſten Ziffer der zweyten Claſſe reichende Dividuum 19 genommen werden kann, und ſetzet den gefundnen Quotienten 4 zur erſten Wurzelziffer 2.

2) Multipliciret unter einander die erſte und zweyte Wurzelziffer, und die zur Ausziehung der Quadratwurzeln nöthige Trigonalpotenz 2, als 2×4×2=16. Verlängert das Product 16 mit einer Null oder einem Punkt, und addiret dazu das Quadrat 16 der zweyten Wurzelziffer 4, als 160+16=176. Ziehet das Collect von dem zweyten Dividuo 192 ab, und ſetzet zu dem Reſt 16 die dritte Claſſe 92 herunter; kömmt 1692 für das dritte Dividuum.

γ) Um die dritte Wurzelziffer, allhier 3, zu finden.

1) Dupliret die beyden erſten zuſammengenommnen Wurzelziffern 24, kömmt 48. Dividiret mit dem Duplo 48 in die Zahlen 169 des dritten Dividui, und ſetzet den gefundnen Quotienten 3 an die Stelle der dritten Wurzelziffer.

2) Multipliciret unter einander die beyden erſten zuſammengenommnen Wurzelziffern 24, die dritte Wurzelziffer 3 und die Trigonalpotenz 2, als 24×3=72, und 72×2=144. Verlängert das Product 144 mit einer Null, und addiret dazu das Quadrat 9 der dritten Wurzelziffer 3, als 1440+9=1449. Ziehet das Collect 1449 von dem dritten Dividuo 1692 ab, und ſetzet zu dem Reſt 243 die vierte Claſſe herunter; kömmt 24325 für das vierte Dividuum.

δ) Um die vierte Wurzelziffer, allhier 5, zu finden.

1) Dupliret die drey erſten zuſammengenommnen Wurzelziffern 243, kömmt 486. Dividiret mit dem

dem Duplo 486 in die Zahlen 2432 des vierten Dividui, und ſetzet den gefundnen Quotienten 5 an die Stelle der vierten Wurzelziffer.

2) **Multipliciret** unter einander die drey erſten zuſammengenommnen **Wurzelziffern** 243, die vierte Wurzelziffer 5 und die Trigonalpotenz 2, als 243 × 5 × 2 = 2430. Verlängert das Product 2430 mit einer Null, und addiret dazu das **Quadrat** 25 der vierten **Wurzelziffer**, als 24300 + 25 = 24325. Da das Collect 24325 gegen das vierte Dividuum 24325 aufgehet: ſo iſt die gegebne Zahl 5929225 eine vollkommne Quadratzahl. Die **Probe** wird gemacht, wenn die herausgebrachte Wurzel 2435 mit ſich ſelbſt multipliciret wird.

Erſte Anmerkung.

Wenn nach geſchehener Subtraction von einer Claſſe nichts oder zu wenig übrig bleibet, ſo daß mit dem Duplo der gefundnen Wurzelziffern nicht dividiret werden kann, ſo iſt die folgende Wurzelziffer allezeit eine Null, und es können zwey, drey und mehr Nullen hinter einander kommen. Ich gebe ein Exempel, in welchem nach der Subtraction von der erſten Claſſe nichts übrig bleibt.

1. *Divid.*	59	08	01 (401 die gefundne Quadratwurzel.
	16	::	::
2. *Divid.*	008	::	
	0	::	
	809		
	801		
	0		

Zweyte Anmerkung.

Wenn nach der Subtraction nichts übrig bleibt, und die folgenden Zahlen des Quadrats lauter Nullen ſind: ſo ſetzet man der erſt gefundnen Wurzelziffer ſo viele Nullen zu, als annoch Claſſen vorhanden ſind, z. E.

36	00	00	00	(6000 die gefundne Quadratwurzel.
36				
0				

§. 65.

Es sey die Zahl 14437662875, um aus selbiger die Cubikwurzel zu ziehen.

1. Div.	14	437	662	875 (2435 die gefundne Cubikwurzel.
	8	:::	:::	:::
2. Div.	644	:::	:::	:::
	5824	:::	:::	:::
3. Div.	6136624	:::		
	524907	:::		
4. Divid.	88755875			
	88755875			
	0			

Es sey die Zahl 41278242816, um aus selbiger die Cubikwurzel zu ziehen.

	41	278	242	816 (3456 gefundene Cubikwurzel.
	27	:::	:::	:::
	14278	:::	:::	:::
	12304	:::	:::	:::
	1974242	:::		
	1759625	:::		
	214617816			
	214617816			
	0			

Erklärung der Operationen des vorhergehenden Exempels 14437662875.

α) Um die erste Wurzelziffer, allhier 2, zu finden.

Suchet, nach Anleitung der im §. 63 dargelegten Wurzeltabelle, eine Cubikzahl, welche dem Dividuo 14 der ersten Classe linker Hand am nächsten kömmt; ist allhier 8. Setzet die Cubikwurzel 2 hinter dem Bogen an die Stelle der ersten Wurzelziffer, und ziehet den Cubus 8 von 14 ab. Schreibet zu dem Rest 6 die zweyte Classe 437 herunter.

β) Um die zweyte Wurzelziffer, allhier 4, zu finden.

1) Tripliret das Quadrat der ersten Wurzelziffer, kömmt 12. Dividiret mit dem Triplo 12 in die Zahl 64 des zweyten Dividui, und setzet den gefundnen Quotienten 4 zur ersten Wurzelziffer 2.

2) Quadriret sowohl die erste als zweyte Wurzelziffer, als $2^2 = 4$, und $4^2 = 16$. Schreibet die erste Wurzelziffer 2 und ihr Quadrat 4 in umgekehrter Ordnung, und also das Quadrat 4 und die Wurzel 2 über die zweyte Wurzel und ihr Quadrat; multipliciret solche in dieser Stellung unter einander, und ein jedes Product mit der Trigonalpotenz 3 aus dem Triangel, als:

Quadrat

Quadrat der 1ſten Wurzel	4	Erſte Wurzel	2
zweyte Wurzel	4	Quadrat der 2ten Wurzel	16
	16		32
die Trigonale	3	die Trigonale	3
	48 erſtes Product.		96 zweytes Product.

Verlängert das erſte Product mit zwey Nullen, und das zweyte mit einer. Setzet beyde Producte zum Addiren übereinander, und füget den Cubus 64 von der zweyten Wurzelziffer 4 hinzu, als:

4800
960
64 = 4^3
5824 Collect.

Ziehet das Collect 5824 von dem zweyten Dividuo 6437 ab, und ſetzet zu dem Reſt die dritte Claſſe herunter.

γ) Um die dritte Wurzelziffer, allhier 3, zu finden.

1) Tripliret das Quadrat der beyden erſten zuſammengenommnen Wurzelziffern 24, als 24 X 24 = 576, und 3 X 576 = 1728. Dividiret mit dem Triplo 1728 in die Zahl 6136 des dritten Dividui, und ſetzet den gefundnen Quotienten 3 zu den beyden erſten Wurzelziffern 2 und 4.

2) Quadriret ſowohl die beyden erſten zuſammengenommnen Wurzelziffern 24, als die dritte Wurzelziffer 3. Setzet die Wurzel und ihre Producte, ſo wie vorhin geſchehen, in umgekehrter Ordnung über einander; multipliciret ſolche in dieſer Stellung unter einander, und ein jedes Product mit der Trigonalpotenz 3, als:

umgekehrt über einander.

24^2 = 576	576 □ der 1ſten Wurzel.	24 erſte Wurzel.	
und 3^3 = 9	3 zweyte Wurzel.	9 □ der 2ten Wurzel	
	1728	216	
	3 Trigonale	3 Trigonale	
	5184 erſtes Product.	648 zweytes Product.	

Verlängert das erſte Product mit zwey Nullen, und das zweyte mit einer. Setzet beyde Producte zum Addiren übereinander, und füget den Cubus 27 von der dritten Wurzelziffer 3 hinzu, als:

518400
6480
27
524907 Collect.

Ziehet das Collect 524907 von dem dritten Dividuo 613662 ab, und ſetzet zu dem Reſt die vierte Claſſe herunter.

δ) Um die vierte Wurzelziffer, allhier 5, zu finden.

1) Triplirt das Quadrat der drey erſten zuſammengenommnen Wurzelziffern 243, als $243^2 = 59049$, und $3 \times 59049 = 177147$. Dividiret mit dem Triplo 177147 in die Zahl 887558 des vierten Dividui, und ſetzet den gefundnen Quotienten 5 zu den drey erſten Wurzelziffern 2, 4 und 3.

2) Quadriret ſowohl die drey erſten zuſammengenommnen Wurzelziffern 243, als die vierte Wurzelziffer 5. Setzet die Wurzeln und ihre Producte nach bekannter Art, umgekehrt übereinander; und multipliciret die Producte der übereinander ſtehenden Zahlen mit der Trigonale 3, als:

umgekehrt über einander.

$243^2 = 59049$ und $5^2 = 25$

59049 □ der 1ſten Wurzel	243 1ſte Wurzel
5 zweyte Wurzel.	25 □ der 2ten Wurzel.
295245	1215
3 Trigonale	486
885735 erſtes Product.	6075
	3 Trigonale
	18225 2tes Prod.

Verlängert das erſte Product mit zwey Nullen, und das zweyte mit einer. Setzet beyde Producte zum Addiren über einander, und füget den Cubus 125 von der vierten Wurzelziffer 5 hinzu, als:

88573500

88573500
182250
125
88755875 Collect.

Da das abzuziehende Collect 88755875 gegen das vierte Dividuum aufgehet, ſo iſt ſolches ein Zeichen, daß die gegebne Zahl 14437662875 eine vollkommne Cubikzahl iſt. Die Probe wird gemacht, wenn die herausgebrachte Wurzel 2435 dreymal geſetzet und in ſich multipliciret wird.

Anmerkung.

Es ſind in der Lehre von der Ausziehung der Quadratwurzel ein paar Exempel gegeben worden, eines wo nach geſchehener Subtraction von einer Claſſe nichts übrig bleibt, und ein anderes, wo nach der Subtraction nicht allein nichts übrig bleibt, ſondern annoch die folgenden Ziffern des Quadrats lauter Nullen ſind. Wenn dieſes bey der Ausziehung der Cubikwurzel geſchiehet, ſo muß auf ähnliche Art wie dort verfahren werden.

§. 66.

Es ſey die Zahl 3486784401, um aus ſelbiger die vierte Wurzel, oder die Biquadratwurzel zu ziehen.

1. *Diuid.* 34 | 8678 | 4401 (243 die gefundne vierte Wurzel.
16 | :::: | ::::
2. *Diuid.* 188678 | :::: |
171776 | :::: |
3. *Diuid.* 16902 4401
169024401
0

α) Um die erſte Wurzelziffer, allhier 2, zu finden.

Suchet, nach Anleitung der im §. 63. dargelegten Wurzeltabelle, eine vierte Potenz, oder eine Biquadratzahl, welche dem Dividuo 34 der erſten Claſſe am nächſten kömmt. Dieſe Biquadratzahl iſt allhier $16 = 2^4$. Setzet die Wurzel 2 hinter dem Bogen an die Stelle der erſten Wurzelziffer. Ziehet das Biquadrat 16 von 34 ab, und ſetzet zu dem Reſt 18 die zweyte Claſſe 8678 herunter.

β) Um

β) Um die zweyte Wurzelziffer, allhier 4, zu finden.

1) Quadruplirt den Cubus 8 der ersten Wurzelziffer 2; dividiret mit dem Quadruplo 32 in die Zahlen 188 des zweyten Dividui, und setzet den gefundnen Quotienten 4 an die Stelle der zweyten Wurzelziffer.

2) Quadriret und cubiret sowohl die erste als zweyte Wurzelziffer. Die Wurzeln und ihre Producte werden allhier auf nachstehende Art einander folgen:

2. 4. 8, und 4. 16. 64.

Setzet die Wurzeln und ihre Producte in umgekehrter Ordnung zum Multipliciren über einander; nehmet aus dem arithmetischen Triangel die zur Ausziehung der Biquadratwurzel nöthigen Trigonalpotenzen 4, 6 und 4, und multipliciret nach der Reihe das Product der beyden ersten über einander stehenden Zahlen (8 und 4) durch die Trigonalpotenz 4; das Product der beyden andern (4 und 16) durch 6, und das Product der beyden lezten durch 4, als:

8	4	2
4	16	64
32	64	128
4	6	4
128	384	512
Erstes Product.	Zweytes Product.	Drittes Product.

Verlängert das erste Product mit drey Nullen, das zweyte mit zwey Nullen und das dritte mit einer Null. Setzet die dergestalt verlängerten Producte zum Addiren über einander; füget das Biquadrat 256 der zweyten Wurzelziffer 4 hinzu, als:

128000
38400
5120
256
171776 Collect.

und ziehet das Collect 171776 von dem zweyten Dividuo ab; bleibt 16902. Setzet zu dem Rest die dritte Classe 4401 herunter, kömmt 169024401 für das dritte Dividuum.

γ) Um

γ) Um die dritte Wurzelziffer, allhier 3, zu finden.

1) Quadruplirt den Cubus 13824 der beyden ersten zusammengenommnen Wurzelziffern 24; dividiret mit dem Quadruplo 55296 in die Zahlen 1690244 des dritten Dividui, und setzet den gefundnen Quotienten 3 zu den beyden ersten Wurzelziffern 2 und 4.

2) Quadriret und cubiret sowohl die beyden zusammengenommnen ersten Wurzelziffern 24, als die dritte 3, und setzet die Wurzel und ihre Producte in umgekehrter Ordnung zum Multipliciren über einander. Multipliciret das Product der beyden ersten über einander stehenden Zahlen durch die Trigonalpotenz 4; das Product der beyden andern durch 6, und das Product der beyden lezten durch 4, als:

Wurz.	□.	Cub.	in umgekehrter Ordnung.		
24	576	13824	13824	576	24
	und		3	9	27
3	9	27	41472	5184	168
			4	6	48
			165888	31104	648
			erstes Product.	zweytes Product	4
					2592
					drittes Product.

Verlängert das erste Product mit drey Nullen, das zweyte mit zweyen, und das dritte mit einer Null. Setzet die Posten zum Addiren über einander, und füget das Biquadrat 81 der dritten Wurzelziffer 3 hinzu, als:

165888000
3110400
25920
81
169024401 Collect.

Da das Collect gegen das dritte Dividuum aufgehet, so ist die gegebne Zahl 348678401 eine vollkommne Biquadratzahl, und die Probe wird gemacht, wenn die gefundne Wurzel 243 viermal gesetzet, und in sich multipliciret wird.

§. 67.

§. 67.

Es sey die Zahl 847288609443, um aus selbiger die fünfte Wurzel, oder die ASuperfolidewurzel zu ziehen.

1. *Divid.* 84|72886|09443 (243 die gefundne fünfte Wurzel.
32|:::::|:::::

2. *Divid.* 5277886|:::::
4762624|:::::

3. *Divid.* 510262094 43
510262094 43
0

α) **Um die erste Wurzelziffer, allhier 2, zu finden.**

Suchet, nach Anleitung der im §. 63. dargelegten Wurzeltabelle eine fünfte Potenz oder ASuperfolidezahl, welche dem Dividuo 84 der ersten Classe am nächsten kömmt. Ziehet sie von demselben ab, und setzet die Wurzel hinter den Bogen. Das übrige wie bey den vorigen Potenzen.

β) **Um die zweyte Wurzelziffer, allhier 4, zu finden.**

1) Quintuplirt das Biquadrat 16 der ersten Wurzelziffer 2, kömmt 80; dividiret mit dem Quintuplo 80 in die Zahlen 527 des zweyten Dividui, und setzet den gefundnen Quotienten 4 an die Stelle der 2ten Wurzelziffer.

2) Quadriret, cubiret und biquadriret sowohl die erste als zweyte Wurzelziffer. Die Wurzeln und ihre Producte werden allhier auf nachstehende Art folgen:

2. 4. 8. 16, und 4. 16. 64. 256.

Setzet die Wurzeln und ihre Producte, in umgekehrter Ordnung, zum Multipliciren über einander. Nehmet aus dem arithmetischen Triangel die zur Ausziehung der fünften Wurzel nöthigen Trigonalpotenzen 5. 10. 10. 5, und multipliciret nach der Reihe das Product der beyden ersten über einander stehenden Zahlen mit 5; das Product der beyden folgenden mit 10, und so weiter, als:

16	8	4	2
4	16	64	256
64	128	256	512
5	10	10	5
320	1280	2560	2560

Wer-

Verlängert das erste Product 320 mit vier Nullen; das zweyte 1280 mit dreyen; das dritte 2560 mit zweyen, und das vierte 2560 mit einer Null. Setzet die dergestalt verlängerten Producte zum Addiren über einander; füget die fünfte Potenz oder ASupersolides zahl 1024 der zweyten Wurzelziffer 4 hinzu, als:

3200000
1280000
256000
25600
1024

4762624 Collect.

und ziehet das Collect von dem zweyten Dividuo ab. Das übrige wie sonst.

γ) Um die dritte Wurzelziffer, allhier 3, zu finden.

1) Quintuplirt das Biquadrat 331776 der beyden ersten zusammengenommnen Wurzelziffern 24; dividiret mit dem Quintuplo 1658880 in die Zahl 5102620 des dritten Dividui, und setzet den Quotienten 3 zu den beyden ersten Wurzelziffern 2 und 4.

2) Quadriret, cubiret und biquadriret sowohl die beyden zusammengenommnen ersten Wurzelziffern 24, als die dritte Ziffer 3; setzet die Wurzeln und ihre Producte, in umgekehrter Ordnung, zum Multipliciren über einander, um sie untereinander und die Facta durch die Trigonalpotenzen 5. 10. 10. 5 nach der Ordnung zu multipliciren. Die Wurzeln und ihre Producte werden auf nachstehende Art einander folgen:

Wurzel.	□.	Cub.	Biquadr.
24.	576.	13824.	331776
und 3.	9.	27.	81.

Also umgekehrt

331776	13824	576	24
3	9	27	81
995328	124416	4032	24
5	10	1152	192
4976640	1244160	15552	1944
Erstes Product.	Zweytes Product.	10	5
		155520	9720 Viertes
		Drittes Product.	Product.

Verlängert die Producte mit Nullen, das erste mit vieren, das zweyte mit dreyen u. s. w. Setzet die dergestalt verlängerten Producte zum Addiren übereinander, und füget die fünfte Potenz oder die ASupersolidezahl 243 der dritten Wurzelziffer 3 hinzu, als:

49766400000
1244160000
15552000
97200
243

51026209443 Collect.

Da das abzuziehende Collect 51026209443 gegen das dritte Dividuum aufgehet, so ist die gegebne Zahl 847288609443 eine vollkommne fünfte Potenz oder ASupersolidezahl. Die Probe wird gemacht, wenn die gefundne Wurzel 243 fünfmal gesetzet und in sich multiplicirt wird.

§. 68.

Vorhergehende Exempel werden hinreichend seyn, das Geschäft der Ausziehung einer Wurzel, in Absicht auf die fünf ersten Potenzen, begreiflich zu machen. Ich will die dabey statt gefundnen Operationen kürzlich wiederholen, und zugleich die für einige folgende höhere Potenzen hinzufügen, damit man die Ordnung und Gradation der Verrichtungen von einer Potenz zur andern desto eher übersehen, und ohne weitere Exempel sich in den Stand setzen möge, eine sechste, siebente, achte oder neunte Wurzel u. s. w. auszuziehen. Es kömmt hierbey auf nichts mehr als zweyerley zu findende Dinge an, nemlich

1) auf die Erfindung der zweyten, dritten und folgenden Wurzelziffern. Denn die erste Wurzelziffer wird in allen Fällen aus einer Wurzeltabelle genommen, die man für jede Potenz in Bereitschaft haben muß. Es ist im §. 63. der Anfang einer solchen bis auf die sechste Potenz ausgedehnten Wurzeltabelle dargeleget worden, und man wird keine Mühe haben, selbige weiter fortzuführen.

2) Auf die Erfindung der von jedem Dividuo abzuziehenden Zahl, welche man schlechtweg den Subtrahenden nennet.

(A) Von

(A) Von der Erfindung der zweyten, dritten und folgenden Wurzelziffern. §. 69.

1) In den Quadratzahlen. Dupliret die erſte Wurzelziffer, und dividiret *) mit dem Duplo in das Dividuum der zweyten Claſſe. Der Quotient iſt die zweyte Wurzelziffer.

(Dupliret die beyden erſten Wurzelziffern, und dividiret mit dem Duplo in das Dividuum der dritten Claſſe. Der Quotient iſt die dritte Wurzelziffer.)

(Dupliret die drey erſten Wurzelziffern, und dividiret mit dem Duplo in das Dividuum der vierten Claſſe. Der Quotient iſt die vierte Wurzelziffer.)

(Dupliret die vier erſten Wurzelziffern, und dividiret mit dem Duplo in das Dividuum der fünften Claſſe. Der Quotient iſt die fünfte Wurzelziffer.) u. ſ. w.

2) In den Cubikzahlen. Tripliret das Quadrat der erſten Wurzelziffer, und dividiret mit dem Triplo in das Dividuum der zweyten Claſſe. Der Quotient iſt die zweyte Wurzelziffer.

(Tripliret das Quadrat der zwey erſten Wurzelziffern, und dividiret mit dem Triplo in das Dividuum der dritten Claſſe. Der Quotient iſt die dritte Wurzelziffer.

(Tripliret das Quadrat der drey erſten Wurzelziffern, und dividiret mit dem Triplo in das Dividuum der vierten Claſſe. Der Quotient iſt die vierte Wurzelziffer;) u. ſ. w. wie bey den Quadratzahlen.

3) In

*) Das Dividiren geſchieht nicht förmlich. Es erſtrecket ſich auch nur auf einen Theil des Dividui, nemlich bis auf die erſte Ziffer der folgenden Claſſe. Der Quotient muß ferner nur beynahe und niemals zu hoch genommen werden, beſonders in den höheren Potenzen. Wird derſelbe zu hoch genommen, ſo überſteiget der Subtrahends allezeit das Dividuum. Man muß ihn aber auch nicht zu niedrig nehmen, weil ſonſt die Dividua nicht getilget werden. Ein wenig Uebung, zumal in vollkommnen Potenzen, welche man ſich durch die Multiplicirung eben derſelben Zahl in einander ſelber bilden kann, verſchaffet allhier die beſten Einſichten.

3) In den Biquadratzahlen. Quadrupliret den Cubus der ersten Wurzelziffer. Dividiret mit dem Quadruplo in das Dividuum der zweyten Classe. Der Quotient ist die zweyte Wurzelziffer.

(Quadrupliret den Cubus der beyden ersten Wurzelziffern, und ꝛc. Quadruplirt den Cubus der drey ersten Wurzelziffern ꝛc. Ich werde hinführo diesen Proceß weglaßen)

4) In den fünften Potenzen oder ASupersolidezahlen. Quintuplirt das Biquadrat der ersten Wurzelziffer. Dividiret mit dem Quintuplo in das Dividuum der zweyten Classe. Der Quotient ist die zweyte Wurzelziffer.

5) In den Quadratcubikzahlen. Sextupliret die fünfte Potenz oder ASupersolidezahl der ersten Wurzelziffer, und dividiret, wie bekannt ist, um die zweyte Wurzelziffer zu finden.

6) In den siebenten Potenzen oder BSupersolidezahlen. Septuplirt die Quadratcubikzahl der ersten Wurzelziffer, und dividiret ꝛc.

7) In den achten Potenzen oder Triquadratzahlen. Octuplirt die siebente Potenz oder BSupersolidezahl der ersten Wurzelziffer, und dividiret ꝛc.

8) In den neunten Potenzen oder Bicubikzahlen. Nonuplirt die Triquadratzahl oder achte Potenz der ersten Wurzelziffer, und dividiret ꝛc.

9) In den zehnten Potenzen oder Quadrat-ASupersolidezahlen. Decuplirt die Bicubikzahl oder neunte Potenz der ersten Wurzelziffer, und dividiret ꝛc. und so weiter.

§. 70.

Man wird aus dem vorhergehenden sehen, α) daß die zu multiplicirende Potenz der ersten Wurzelziffer allezeit um einen Grad geringer ist, als die Potenz, deren Wurzel ausgezogen werden soll; und β) daß der Multiplicator dem Exponen-

ponenten der Potenz gleich ist, deren Wurzel gesuchet wird, z. E. die Potenz, deren Wurzel ausgezogen werden soll, ist eine Cubikzahl, oder eine Potenz vom dritten Grade. Wenn nun die Quadratzahl vor der Cubikzahl unmittelbar vorher gehet, und also um einen Grad kleiner ist, so ist das Quadrat der ersten Wurzelziffer die zu multiplicirende Potenz; und der Multiplicator dieser Potenz ist die Zahl 3; weil die Wurzel aus einer Cubikzahl gezogen werden soll, und der Exponent der Cubikwurzel die Zahl 3 ist.

(E) Von der Erfindung des Subtrahenden. §. 71.

1) In den Quadratzahlen Multiplicirt unter einander die erste und zweyte Wurzelziffer und die Trigonalpotenz 2. Verlängert das Product mit einer Null oder einem Punkt, und addirt dazu das Quadrat der zweyten Wurzelziffer. Das Collect ist der Subtrahende.

(So wie allhier die erste und zweyte Wurzelziffer, nebst der Trigonalpotenz 2 unter einander multipliciret worden sind, so werden, wenn die Wurzel aus mehr als zwey Ziffern besteht, hernach unter einander multipliciret, α) die beyden ersten zusammengenommnen Wurzelziffern, die dritte Wurzelziffer und die Trigonalpotenz 2. β) Die drey ersten Wurzelziffern, die vierte Wurzelziffer und die Trigonalpotenz 2. γ) Die vier ersten Wurzelziffern, die fünfte Wurzelziffer, und die Trigonalpotenz 2, u. s. w. Ueberall wird das Product mit einer Null verlängert, und das Quadrat der zuletzt gefundnen Wurzelziffer dazu addiret.)

2) In den Cubikzahlen. Quadriret sowohl die erste als zweyte Wurzelziffer; setzet die Wurzeln und Quadrate in umgekehrter Ordnung übereinander, so wie oben praktisch gezeiget worden, und multiplicirt ein jedes Product von ihnen durch die Trigonale 3. Das erste Product wird mit zwey Nullen, und das

zweyte mit einer verlängert. Zu der Summe der Producte wird allezeit der Cubus der zweyten Wurzelziffer hinzugefüget. Sämtliches Collect ist der Subtrahende.

(So wie allhier die erste und zweyte Wurzelziffer quadriret worden sind, so werden, wenn die Wurzel aus mehr als zwey Ziffern besteht, hernach quadriret α) die beyden ersten zusammengenommnen Wurzelziffern, und die dritte; β) die drey ersten zusammengenommnen Wurzelziffern, und die vierte, und so weiter. Ueberall werden die in umgekehrter Ordnung über einander geschriebnen Wurzeln und Quadrate unter sich, und ihre Producte durch die Trigonale 3 multipliciret; und zur Summe der Producte wird der Cubus der zulezt gefundnen Wurzel allezeit addiret.)

3) In den Biquadratzahlen. Quadriret und cubiret sowohl die erste als zweyte Wurzelziffer; multipliciret die Producte der in umgekehrter Ordnung über einander gesetzten Wurzeln, und deren Quadrat- und Cubikzahlen durch die Trigonalpotenzen 4, 6 und 4. Verlängert das erste Product mit drey Nullen; das folgende mit zweyen ꝛc. und addiret zur Summe der Producte das Biquadrat der zweyten Wurzelziffer. Sämtliches Collect ist der Subtrahende.

4) In den fünften Potenzen oder Asuperfolidzahlen. Quadriret, cubiret und biquadriret sowohl die erste als zweyte Wurzelziffer ꝛc. Die nöthigen Trigonalpotenzen sind allhier 5, 10, 10 und 5. Die Verlängerung der Producte fänget allhier mit vier Nullen an, und die zu den Producten hinzuzufügende Potenz ist die fünfte der zweyten Wurzelziffer.

5) In den sechsten Potenzen oder den Quadratcubikzahlen. Quadriret, cubiret, biquadriret und Asuperfolidiret sowohl die erste als zweyte Wurzelziffer

ziffer ꝛc. Die nöthigen Trigonalpotenzen ſind allhier 6, 15, 20, 15 und 6. Die Verlängerung der Producte fänget mit fünf Nullen an, und die zu den Producten hinzuzufügende Potenz iſt die ſechſte der zweyten Wurzelziffer.

6) In den ſiebenten Potenzen oder den BSuperſolidezahlen. Quadrirt, cubirt, biquadrirt, Asuperſolidirt und quadrocubirt ſowohl die erſte als zweyte Wurzelziffer ꝛc. Die nöthigen Trigonalpotenzen ſind allhier 7, 21, 35, 35, 21 und 7. Die Verlängerung der Producte fänget mit ſechs Nullen an, und die zu den Producten hinzuzufügende Potenz iſt die ſiebente der zweyten Wurzelziffer, und ſo weiter.

Anmerkung.

Man wird aus dem vorhergehenden ſehen, daß es, zur Erfindung des Subtrahenden, darauf ankommt, 1) ſowohl die erſte als zweyte Wurzelziffer derjenigen Potenz, deren Wurzel extrahiret wird, zu allen vorhergehenden Potenzen der Reihe nach zu erheben. Z. E. wenn die zu extrahirende Zahl eine Potenz von fünf Graden iſt, ſo muß jede beſagter zwey Wurzelziffern viererley Arten von Zahlen geben, und dieſe ſind; α) die Ziffern an ſich; β) ihre Quadrate; γ) ihre Cubi und δ) ihre Biquadrate. Was von der erſten und zweyten Wurzelziffer geſaget iſt, gilt in der Folge, wenn mehr Wurzelziffern kommen, von den beyden zuſammengenommnen erſten und der dritten; von den drey zuſammengenommnen erſten und der vierten, u. ſ. w. 2) Daß die hervorgebrachten Potenzen der erſten Ziffer in umgekehrter Ordnung über die hervorgebrachten Potenzen der zweyten geſetzet und multipliciret werden müſſen; 3) daß die verſchiednen Facta, der Reihe nach, durch die zur Ausziehung der vorhabenden Wurzel nöthige Trigonalpotenzen multipliciret werden müſſen; 4) daß das erſte der daher entſtehenden Producte mit ſoviel Nullen oder Puncten verlängert werden müſſe, als Trigonalpotenzen zur Multiplication erfordert worden; und daß den nach der Reihe folgenden andern Producten allezeit eine Null weniger angehänget wird. Dieſe Anhängung aber geſchicht deswegen, daß die hernach zu addirenden Producte gehörig unter einander geſchrieben werden können.

Das erſte Product iſt allezeit dasjenige, das aus der höchſten Potenz der erſten Wurzelziffer und aus der lezten Wurzelziffer erzeuget worden; und da die Wurzelziffer und ihre Producte allezeit nach der Reihe verzeichnet werden, ſo ſind die zweyten und dritten Producte leicht zu finden, ſobald das erſte gefunden iſt. 5) Daß zur Summe der vorigen Producte die Potenz der zweyten Wurzelziffer, nach dem Grade der zum Grunde liegenden Potenz, deren Wurzel extrahiret wird, hinzugefüget werden muß. Wenn z. E. eine Cubikzahl zum Grunde lieget, ſo iſt die hinzuzufügende Potenz der Cubus der zweyten Wurzelziffer; lieget eine Biquadratzahl zum Grunde, ſo iſt ſie das Biquadrat der zweyten Wurzelziffer, u. ſ. w. Damit man nicht zweymal addiren dürfe, ſo kann dieſe Potenz ſofort unter die vorigen zu addirenden Producte geſetzet werden, wie oben geſchehen iſt.

Dritter Artikel.

Von der Ausziehung der Wurzeln aus ſurden und gebrochnen Zahlen.

(I.) Aus einer ſurden Zahl die Quadratwurzel aufs nächſte auszuziehen; z. E. aus 2088. §. 72.

Die Zahl 2088 iſt zwiſchen den beyden vollkommnen Quadratzahlen 2116, deren Wurzel 46, und zwiſchen 2025, deren Wurzel 45 iſt, enthalten. Ob ſie nun gleich von der erſten nur um 28, und von der lezten um 63 differiret: ſo kann dennoch nicht die Zahl 46 für ihre Wurzel gelten, ſondern man muß die Zahl 45 mit dem Reſt 63 dafür nehmen, ſo wie ſolches aus dem Ausziehungsproceß, den jede unvollkomme Quadratzahl mit den vollkommnen gemein hat, reſultiret. Um aber dieſen Reſt zu würdigen, machet einen Bruch, und ſetzet den Reſt 63 zum Zähler, das Duplum 90 der Wurzel 45 aber zum Nenner, als $\frac{63}{90}$; und die Quadratwurzel der Zahl 2088 wird beynahe ſeyn $45\frac{63}{90}$ oder $45\frac{7}{10}$. Man kann zu dem Duplo auch eine Einheit addiren, als $\frac{63}{91}$. Wie aber in dem erſten Falle die Wurzel ein wenig zu groß iſt: ſo iſt ſie in dem andern etwas zu klein. Jedoch iſt es ſicherer, ſie ein wenig zu groß, als zu klein zu nehmen.

Andere

Andere Manier mit (gemeinen) Decimalbrüchen.

Vermehrt den Reſt 63 mit zwey Nullen, und ſetzet den Ausziehungsproceß fort; oder welches einerley iſt, vermehret die gegebne Zahl 2088 mit zwey Nullen, und ziehet aus 20|88|00 die Quadratwurzel; kömmt 456 mit einem Reſt von 864. Es muß aber die vermittelſt der, der Zahl 2088 angehängten, zwey Nullen, gefundne 6 in einen Bruch überſetzet, und die Zahl 10 zum Nenner darunter geſchrieben werden, als $\frac{6}{10}$; und alsdenn ſtellet ſich die Wurzel der ſurden Quadratzahl 2088 in den Zahlen $45\frac{6}{10}$ dar. Will man genauer gehen: ſo hänget man dem Reſt 864 wieder zwey Nullen an, und ſetzet den Ausziehungsproceß aufs neue fort. Man wird dadurch die Zahl 9, mit dem Reſt von 4239 erhalten. Füget die 9 dem vorigen Bruch hinzu, und verwandelt die 10 in 100: ſo kömmt $45\frac{69}{100}$ für die Wurzel. Dieſe Operationen können nun auf 1000, 10000, 100000 Theile, u. ſ. w. fortgeſetzet werden; wodurch man zwar der wahren Wurzel immer näher kommen, aber ſie niemals erreichen wird.

(II.) Aus einer ſurden Zahl die Cubikwurzel aufs nächſte auszuziehen; z. E. aus 24. §. 73.

Die Zahl 24 iſt zwiſchen den zwey vollkommnen Cubikzahlen 8 und 27 enthalten, deren Wurzeln 2 und 3 ſind. Ob ſie nun gleich von der 8 um 16, und von der 27 nur um 3 unterſchieden iſt: ſo hat ſie dennoch ihre Wurzel mit der Zahl 8 gemein. Selbige iſt alſo 2, jedoch mit dem Reſt 16, deſſen Wehrt auf folgende Art beſtimmet wird. 1) Machet einen Bruch, und ſetzet den Reſt 16 zum Zähler. 2) Triplirt die Wurzel 2, kömmt 6, und behaltet das Product. 3) Multiplicirt das Triplum 6 der Wurzel durch die Wurzel ſelbſt; kömmt 12. 4) Addiret die Producte der beyden vorhergehenden Operationen 6 und 12; kömmt die Zahl 18, welche der Nenner des Bruchs wird; und die Cubikwurzel der Zahl 24 wird demnach aufs nächſte $2\frac{16}{18} = 2\frac{8}{9}$ ſeyn.

Andere Manier mit (gemeinen) Decimalbrüchen.

Vermehret den Rest 16 mit drey Nullen, und setzet den Extractionsproceß fort; oder, welches einerley ist, vermehret die gegebne Zahl 24 mit drey Nullen, und ziehet aus 24|000 die Cubikwurzel; kömmt $2\frac{8}{10}$, mit einem Rest von 2048 für die Cubikwurzel. Soll diese noch näher bestimmet werden, so hänget wieder drey Nullen an den Rest 2048, und extrahiret daraus die Cubikwurzel; kömmt $2\frac{88}{100}$, mit einem Rest von 112128. Je weiter nun diese Operationen auf ähnliche Art, mit einer beständigen Vermehrung jeden Restes durch drey Nullen, erstrecket werden, desto näher wird man die Wurzel bekommen.

Anmerkung.

Auf eben die Art, als die Quadrat- und Cubikwurzel mit Decimalbrüchen aus surden Zahlen gezogen werden, kann man die Wurzeln der folgenden höhern Potenzen aus ähnlichen Zahlen finden, indem man den Rest allezeit mit so viel Nullen vermehret, als Ziffern für jede Classe dieser Potenzen erfordert werden, welches aus dem vorhergehenden sattsam bekannt ist.

Vortheil

Bey der Ausziehung der Wurzeln.

Die Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzeln aus surden Zahlen kann man sich durch die Tabellen, in welchen die Quadrate und Cubi, bis auf eine gewisse Zahl, z. E. bis auf 1000 oder 10000, wie beym Wolf, ausgerechnet sind, auf folgende Art erleichtern.

Gesetzt, es wird eine Cubikzahl gegeben, so suche man solche in der Columne der Cubikzahlen auf. Findet man die gegebne Zahl ganz, so ist sie eine vollkommne Cubikzahl, und die in derselben Reihe stehende Nummer vor der Columne der Quadrate ist ihre Wurzel. Findet man sie aber nicht ganz, so ist die gegebne Zahl eine unvollkommne Cubikzahl. Man nehme also aus den Tabellen den zunächst vorhergehenden kleinern Cubus von ebensoviel Ziffern, und ziehe ihn von dem gegebnen ab. Dem Rest hänge man, wenn man genau zu verfahren hat, Nullen an, und suche, wie vorher gelehret worden, die übrigen Decimaltheile der

Wurzel

Wurzel durch die Annäherung. Die Wurzel iſt alsdenn die Wurzel der aus der Tabelle genommnen kleinern Cubikzahl mit den durch Fortſetzung des Extractionsproceſſes gefundnen Decimalſtellen. Z. E. es ſey die gegebne Zahl 731439478: ſo iſt die in den Tabellen befindliche nächſt kleinere die Zahl 731432701, mit der Wurzel 901. Ziehet alſo die Cubikzahl von jener ab, und verfahret übrigens, wie gelehret worden, als:

731	439	478	000 . . . (901, . .
731	432	701	
0		6	777 | 000

Man hat ſich wenigſtens hierdurch die Ausrechnung der erſtern Wurzelziffern erſparet.

(III.) Aus einer gebrochnen Zahl die Quadratwurzel zu ziehen. §. 74.

Die gebrochne Zahl iſt entweder **rational** oder **irrationai**; jenes, wenn die beyden Theile des Bruchs Quadratzahlen ſind, und dieſes, wenn es keiner von beyden, oder nur einer iſt.

Es ſey der Bruch $\frac{225}{900}$. Wenn die Theile dieſes Bruchs unterſuchet werden, ſo findet es ſich, daß ſowohl der Zähler als Nenner vollkommne Quadrate ſind, und daß das erſtere Quadrat 225 die Zahl 15, und das leztere 900 die Zahl 30 zur Quadratwurzel hat. Die Quadratwurzel von $\frac{225}{900}$ iſt alſo $\frac{15}{30}$ oder in den kleinſten Zahlen $\frac{1}{2}$.

Es ſey der Bruch $\frac{8}{128}$. Hebet ihn auf durch 2, ſo kommt der Rationalbruch $\frac{4}{64}$, davon die Wurzel $\frac{2}{8}$ iſt.

Es ſey der Bruch $\frac{1225}{6}$. Ob hier gleich der Zähler 1225 ein Quadrat iſt, und die Zahl 35 zur Wurzel hat, ſo iſt es dennoch nicht der Nenner, und alſo muß hier auf eine andere Art verfahren werden. 1) Multipliciret alſo den Zähler 1225 in den Nenner 6; kömmt 7350. 2) Ziehet aus dem Product 7350 die Quadratwurzel; iſt beynahe $85\frac{125}{171}$. 3) Dividiret in die gefundne Wurzel $85\frac{125}{171}$ mit dem Nenner 6; kömmt $14\frac{48}{1113}$, für die Quadratwurzel des irrationalen Bruchs $\frac{1225}{6}$.

(IV.) Aus einer gebrochnen Zahl die Cubikwurzel zu ziehen. §. 75.

Die gebrochne Zahl ist entweder rational oder irrational; jenes wenn die beyden Theile des Bruchs Cubikzahlen sind; dieses, wenn es keiner von beyden oder nur einer ist.

Es sey der Bruch $\frac{2}{5}\frac{7}{4}$. Wenn die Theile des Bruchs untersuchet werden, so findet es sich, daß sowohl der Zähler als Nenner vollkommne Cubikzahlen sind, und das ersterer die Zahl 3, und lezterer die Zahl 4 zur Wurzel hat. Die Cubikwurzel von $\frac{2}{5}\frac{7}{4}$ ist also $= \frac{3}{4}$.

Es sey der Bruch $\frac{1}{7}\frac{6}{4}$. Wenn derselbe durch 2 aufgehoben wird: so kömmt der Rationalbruch $\frac{8}{1}\frac{}{7}$, davon die Wurzel $\frac{2}{7}$ ist.

Es sey der Bruch $\frac{5}{7}$. Bey diesem irrationalen Bruch wird auf folgende Art verfahren. 1) Multipliciret das Quadrat 49 des Nenners 7 durch den Zähler 5; kömmt 245. 2) Ziehet die Cubikwurzel aus 245; kömmt 6 mit dem Rest 29. 3) Subtrahiret die wahre Cubikzahl der Wurzel 6, das ist 216, von dem Cubus der zunächst folgenden höhern Zahl 7, und also von 343; ist die Differenz 127. 4) Setzet die vermittelst der zweyten Operation gefundne Cubikwurzel 6 mit dem Rest 29, und die vermittelst der dritten Operation gefundne Differenz 127, auf folgende Art bruchweise zusammen, als $6\frac{29}{127}$, und dividirt den ganzen Bruch durch den Nenner 7; kömmt $\frac{791}{889} = 1\frac{143}{217}$ für die nächste Cubikwurzel des Bruchs $\frac{5}{7}$.

(V.) Aus ganzen und gebrochnen Zahlen die Quadratwurzel zu ziehen, z. E. aus $2280\frac{1}{16}$. §. 76.

1) Verwandelt den unreinen Bruch $2280\frac{1}{16}$ in den reinen $\frac{36481}{16}$. 2) Ziehet sowohl aus dem Zähler 36481, als dem Nenner 16 die Quadratwurzel; kömmt dort 191 und hier 4. 3) Setzet die beyden gefundnen Quadratwurzeln bruchweise über einander, so ist die Zahl $\frac{191}{4}$, oder vermittelst der Reduction, (indem $\frac{191}{4} = 47\frac{3}{4}$) die Zahl $47\frac{3}{4}$ die Quadratwurzel von $2280\frac{1}{16}$.

(VI.) Aus

(VI) Aus ganzen und gebrochnen Zahlen die Cubikwurzel zu ziehen, z. E. aus $15\frac{1}{8}$. §. 77.

1) Verwandelt den unreinen Bruch $15\frac{1}{8}$ in den reinen $\frac{121}{8}$. 2) Ziehet ſowohl aus dem Zähler 125, als dem Nenner 8 die Cubikwurzel: kömmt dort 5 und hier 2. 3) Setzet die beyden gefundnen Cubikwurzeln 5 und 2 bruchweiſe über einander: ſo iſt die Zahl $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ die Cubikwurzel von $15\frac{1}{8}$.

Anmerkung.

Von den Decimalzahlen, und der Ausziehung der Wurzeln aus Decimalzahlen wird in dem Vten Buche beſonders gehandelt werden.

Vierter Artikel.

Von den Eigenſchaften der geometriſchen Proportion und Progreßion.

§. 78.

Die bekanntern Eigenſchaften der geometriſchen Proportion und Progreßion ſind,

1) daß in jeder unſtetigen geometriſchen Proportion das Product der beyden äuſſerſten Glieder dem Product der beyden mittelſten gleich iſt. Z. E. in $3:6=4:8$ iſt $3 \times 8 = 24$, und $6 \times 4 = 24$.

2) Daß in jeder ſtetigen geometriſchen Proportion das Product der beyden äuſſerſten Glieder dem Quadrat des mittelſten Gliedes gleich iſt. Z. E. in $\dddot{=} 3:6:12$ iſt $3 \times 12 = 36$, und $6 \times 6 = 36$.

3) Daß, da die geometriſche Progreßion nichts anders als eine fortgeſetzte ſtetige geometriſche Proportion iſt, allezeit drey unmittelbar auf einander folgende Glieder eine ſtetige geometriſche Proportion formiren. Z. E. wenn $1:3:9:27:81$, ſo iſt $1:3=3:9$, $3:9=9:27$, und $9:27=27:81$.

4) Daß vier auf einander folgende Glieder allezeit eine unſtetige geometriſche Proportion formiren. Z. E. wenn $1:3:9:27:81$, ſo iſt $1:3=9:27$, und $3:9=27:81$.

5) Daß in allen gleich weit von einander abſtehenden Gliedern

dern ein gleiches geometrisches Verhältniß ist. Z. E. in der Progreßion 1:3:9:27:81:243 ist 1:9=3:27, 1:27=3:81, und 1:81=3:243.

6) Daß das Quadrat eines jeden Gliedes dem Producte jeder zwey andern in gleicher Weite von selbigem abstehenden Glieder gleich ist, z. E. wenn 2:4:8:16:32:64, so ist 8 X 8=64, 4 X 16=64, 2 X 32=64.

7) Daß das Product zweyer äusserſten Glieder dem Product jeder zwey andern in gleicher Weite von jenen abstehenden Glieder gleich ist, z. E. in 2:4:8:16:32:64 ist 2 X 64=128, 4 X 32=128, 8 X 16=128.

8) Daß in einer mit der Einheit anhebenden geometrischen Progreßion, jedes Glied derselben von der Einheit und seinem Quadrat gleich weit entfernet ist. Z. E. in 1:2:4:8:16:32:64 ist das Glied 2 gleich weit von 1 und seinem Quadrat 4; das Glied 4 gleich weit von 1 und 16; das Glied 8 von 1 und 64.

9) Daß in einer nicht mit der Einheit anhebenden geometrischen Progreßion, jedes Glied derselben von seinem durch den Exponenten getheilten Quadrat, und dem ersten Gliede der Progreßion, gleich weit entfernet ist. So ist z. E. in 2:4:8:16:32:64:128:256, das Glied 4 gleich weit von 2 und $8=\frac{4^2}{2}$; das Glied 8 gleich weit von 2 und $32=\frac{8^2}{2}$; das Glied 16 gleich weit von 2 und $128=\frac{16^2}{2}$.

10) Daß ein jedes Glied der Progreßion gleich ist dem Product aus dem ersten Gliede in diejenige Potenz des Exponenten, deren Kennziffer der Anzahl der vor diesem Gliede vorhergehenden Glieder gleich ist. Z. E. in 2:4:8:16:32 ist das dritte Glied $=2 \times 2^2=8$; das fünfte Glied $=2 \times 2^4=32$. In der vergrößerten Progreßion 2:6:18:54:162 ist das dritte Glied $2 \times 3^2=18$; und das fünfte $=2 \times 3^4=162$.

11) Daß der Unterscheid der beyden äußersten Glieder gleich ist der Summe aller Glieder der Progreßion weniger das leztere, multiplicirt mit dem um 1 verminderten Exponenten.

nenten. Z. E. in der Progreßion 1:3:9:27:81 ist die Summe aller Glieder = 121. Nun ist 81 — 1 = (121 — 81) X (3 — 1) = 40 X 2 = 80.

§. 79.

Auf vorhergehende Eigenschaften der geometrischen Proportion und Progreßion sind folgende Aufgaben gegründet.

(I.) Zwischen zwey gegebnen Gliedern einer verlangten stetigen geometrischen Proportion die Mittelproportionale zu finden; oder zwischen zwey Zahlen eine Mittelproportionale zu finden.

Ziehet aus dem Product der beyden gegebenen Glieder die Quadratwurzel. Es sey 2 und 8. Wenn nun 2 X 8 = 16, und $\sqrt{16} = 4$: so ist 4 die gefundne Mittelproportionale.

(II.) Zwischen zwey gegebnen Zahlen, zwey, drey, vier, fünf und mehrere geometrische Mittelproportionale zu finden. §. 80.

Wenn nicht mehr als zwey Mittelproportionale gesuchet werden: so kann man auf folgende Art verfahren. 1) Quadriret die größte Zahl; multiplicirt das Quadrat mit der kleinsten Zahl, und extrahirt die Cubikwurzel: so kömmt die größere Mittelproportionale. 2) Quadriret die kleinste Zahl; multiplicirt das Quadrat durch die größte Zahl, und extrahiret die Cubikwurzel: so kömmt die kleinere Mittelproportionale. Z. E. zwischen 8 und 64 zwey Mittelproportionale zu finden. Stehet also:

64 X 64 = 4096, und 4096 X 8 = 32768

$\sqrt[3]{32768} = 32$ Die größere geometrische Mittelproportionale.

ferner 8 X 8 = 64, und 64 X 64 = 4096

$\sqrt[3]{4096} = 16$ Die kleinere geometrische Mittelproportionale.

Also: 8:16:32:64.

Wenn aber mehrere Mittelproportionale verlanget werden, so suchet man sie am bequemsten folgendergestalt. 1) Di-

vidiret

vidiret die gröſste Zahl durch die kleinſte, und extrahiret aus dem Quotienten die Wurzel derjenigen Potenz, deren Grad der mit 1 vermehrten Anzahl der verlangten Mittelproportionalen gleich iſt. (Z. E. wenn zwey Mittelproportionale geſuchet werden, ſo wird die Wurzel der dritten Potenz, oder die Cubikwurzel extrahiret; wenn drey Mittelproportionale geſuchet werden, ſo wird die Wurzel der vierten Potenz, oder die Biquadratwurzel extrahiret; wenn vier Mittelproportionale geſuchet werden, ſo wird die Wurzel der fünften Potenz extrahiret, u. ſ. w.) 2) Multipliciret die kleinſte der beyden gegebnen Zahlen durch die gefundne Wurzel ſo vielmal, als Mittelproportionale verlanget werden. Z. E. zwiſchen 2 und 256 ſechs geometriſche Mittelproportionale zu finden. Stehet alſo:

Die kleinſte Zahl 2) 256 Die gröſste Zahl.

$\sqrt[7]{128}$

2 Die gefundne Wurzel der ſiebenten
2 Die kleinſte Zahl. Potenz.

4 Erſte Mittelproportionale.
2

8 Zweyte — —
2

16 Dritte — —
2

32 Vierte — —
2

64 Fünfte — —
2

128 Sechſte. Alſo 2:4:8:16:32:64:128:256.

Anmerkung.

Wenn die gegebnen Zahlen keine Rationalpotenzen ſind, und alſo die Wurzel mit einem Reſt erſcheinet: ſo muß man die Wurzel in Decimaltheilen ſuchen. Man kann ſich auch zur Erleich-

Erleichterung des Calculs, mit Vortheil der Logarithmen bedienen, von welchen hernach gehandelt werden wird.

(III.) Zu drey gegebnen Gliedern einer verlangten unſtetigen geometriſchen Proportion die vierte Proportionale zu finden. §. 81.

Dividiret das Product des zweyten und dritten Gliedes mit dem erſten. Es ſey $3:6=4\ldots$ Wenn nun $6 \times 4 = 24$, und $\frac{24}{3} = 8$: ſo iſt 8 die gefundne vierte Proportionale, und das Exempel heiſſet $3:6=4:8$.

(IV.) Ein jedes, folglich auch das gröſte Glied einer Progreßion, deren erſtes Glied und der Exponent gegeben ſind, zu finden, ohne die vorhergehenden zu ſuchen. §. 82.

Erhebet den Exponenten zu derjenigen Potenz, deren Kennziffer der Anzahl der vorhergehenden Glieder gleich iſt, und multipliciret die gefundne Potenz mit dem erſten Gliede. Es ſey das erſte Glied $=2$; der Exponent $=3$, und es ſoll das ſechſte Glied gefunden werden: ſo iſt

$3^5 = 243$

$243 \times 2 = 486$. Das gefundne ſechſte Glied.

(V.) Wenn das erſte Glied und der Exponent einer Progreßion gegeben iſt, jedes entferntere ungerade Glied einer geometriſchen Progreßion zu finden, ohne die Multiplication mit dem Exponenten zu wiederholen. §. 83.

(a) Wenn die Progreßion mit der Einheit anhebet.

Es ſey das verlangte ungerade Glied das neunte. Quadriret das auf die mittelſte Zahl zwiſchen 1 und 9, und folglich auf 5 fallende Glied. Wenn nun zum Exempel in der mit 1 anhebenden zweyfachen Progreßion 1:2:4:8:16, auf die fünfte Zahl das Glied 16 fällt: ſo heiſſet es $16 \times 16 = 256$, und dieſes Product 256 iſt das verlangte neunte Glied. Quadriret das gefundne neunte Glied 256 aufs neue: ſo kömmt das ſiebzehnte Glied 65536; und quadriret das ſiebzehnte Glied 65536 aufs neue, ſo kömmt das drey- und dreyßigſte Glied, u. ſ. w.

(b) Wenn

(b) Wenn die Progreßion nicht mit der Einheit anhebet.

Es ſey das verlangte ungerade Glied das neunte. Quadriret das auf die mittelſte Zahl zwiſchen 1 und 9, und folglich auf 5 fallende Glied, und dividiret das Product durch das erſte Glied. Wenn nun zum Exempel in der Progreßion 2:4:8:16:32 auf die fünfte Zahl das Glied 32 fällt, und das erſte Glied der Progreßion die Zahl 2 iſt: ſo heißet es $32 \times 32 = \frac{1024}{2} = 512$. Quadriret das gefundne neunte Glied aufs neue, und dividiret mit dem erſten Gliede 2: ſo kömmt das ſiebzehnte Glied 131072, u. ſ. w.

(VI.) Wenn das erſte Glied und der Exponent einer Progreßion gegeben iſt, jedes entferntere gerade Glied einer geometriſchen Progreßion zu finden, ohne die Multiplication mit dem Exponenten zu wiederholen. §. 84.

(a) Wenn die Progreßion mit der Einheit anhebet.

Es ſey das verlangte gerade Glied das zwölfte. Quadriret das auf die Hälfte zwiſchen 1 und 12, und folglich das auf 6 fallende Glied, und multipliciret das Quadrat mit dem Exponenten. Wenn nun z. E. in der mit 1 anhebenden zweyfachen Progreßion 1:2:4:8:16:32, auf die ſechſte Zahl das Glied 32 fällt, und der Exponent der Progreßion eine 2 iſt: ſo heißet es $32 \times 32 = 1024$, und $2 \times 1024 = 2048$, welches letzte Product das verlangte zwölfte Glied ſeyn wird. Quadriret das gefundne zwölfte Glied 2048 aufs neue, und multipliciret mit dem Exponenten: ſo kömmt das vier und zwanzigſte Glied 8388608.

(b) Wenn die Progreßion nicht mit der Einheit anhebet, und das erſte Glied dem Exponenten gleich iſt.

Es ſey das verlangte gerade Glied das zwölfte. Quadriret das auf die Hälfte zwiſchen 1 und 12, und folglich das auf $\frac{12}{2} = 6$ fallende Glied. Wenn nun z. E. in der Progreßion 2:4:8:16:32:64, auf die ſechſte Zahl

das

das Glied 64 fällt: ſo heißet es $64 \times 64 = 4096$, welches Product das verlangte zwölfte Glied ſeyn wird. Quadriret ſolches aufs neue, ſo kömmt das vier und zwanzigſte Glied 16777216.

Wenn aber das erſte Glied dem Exponenten nicht gleich iſt, z. E. in der vergrößerten Progreßion 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486, ſo muß das auf vorhergehende Art beſtimmte mittelſte Glied quadriret, das Quadrat mit dem Exponenten multipliciret, und das Product durch das erſte Glied dividiret werden. Alſo um das zwölfte Glied dieſer Progreßion zu finden, heißet es:

$486^2 = 236196$

$\underline{\qquad\qquad 3}$

$2)\underline{708588}$

354294 die gefundne zwölfte Progreßionale.

Anmerkung.

Die vorhergehende Vte und VIte Aufgabe betreffen nur die zunehmende Progreßion. Wenn ſolche abnehmend iſt, ſo folgt man am bequemſten der Auflöſung der IVten Aufgabe, mit dem bloſſen Unterſcheid, daß man alsdenn das gegebene erſte Glied durch die Potenz der Exponenten dividirt.

(VII.) Eine geometriſche Progreßion, deren beyde äußerſte Glieder und der Exponent bekannt ſind, zu ſummiren. §. 85.

Subtrahiret das kleinſte Glied von dem größten; dividiret den Reſt mit dem um 1 verminderten Exponenten, und addiret das größte Glied zum Quotienten. Z. E. es ſey 1 : 3 : 9 : 27 : 81. Wenn nun der Exponent = 3, und $3 - 1 = 2$: ſo heißet es:

1 : 3 : 9 : 27 : 81

$\underline{\qquad 1}$

$2)\underline{\quad 80}$

40

$\underline{\quad 81}$

$121 = 81 + 27 + 9 + 3 + 1.$

(VIII.) Eine Progreßion, deren kleinſtes Glied, der Exponent und die Zahl der Glieder gegeben worden, zu ſummiren. §. 86.

1) Erhebet den Exponenten zu derjenigen Potenz, deren Grad der Anzahl aller Glieder gleich iſt; ziehet von der gefundnen Potenz eine Einheit ab, und multipliciret den Reſt mit dem kleinſten Gliede. 2) Theilet das Product mit dem um 1 verminderten Exponenten. Der Quotient giebet die geſuchte Summe. Es ſey das kleinſte Glied 3; der Exponent 2 und die Anzahl der Glieder 6: ſo iſt

1) $2^6 = 64$
$64 - 1 = 63$
$63 \times 3 = 189$
2) $\frac{189}{2-1} = 189$ Die Summe der Progreßion.

(IX.) Eine Progreßion, deren größtes Glied, der Exponent und die Anzahl aller Glieder gegeben worden, zu ſummiren. §. 87.

1) Erhebet den Exponenten zu einer Potenz von dem Grade, welcher der Anzahl aller Glieder gleich iſt, und behaltet auch die Potenz von dem um 1 geringern Grade. 2) Subtrahiret 1 von der erſtern Potenz, und multipliciret den Reſt mit dem größten Gliede. 3) Subtrahiret die leztere Potenz von der erſtern, und theilet mit dem Reſt das Product der zweyten Operation. Der Quotient iſt die verlangte Summe. Es ſey das größte Glied 96; der Exponent 2 und die Anzahl der Glieder 6. Stehet alſo:

1) $2^6 = 64$
$2^{6-1} = 2^5 = 32$
2) $(64 - 1) \times 96 = 6048$
3) $64 - 32 = 32$
$\frac{6048}{32} = 189$ Summe der Progreßion.

(X.)

(X.) Aus der Summe der Progreßion, dem Exponenten und dem kleinſten Gliede das gröſte zu finden. §. 88.

Multipliciret die Summe mit dem Exponenten — 1; addiret das kleinſte Glied, und dividiret mit dem Exponenten. Es ſey die Summe 120; der Exponent 3 und das kleinſte Glied 3: ſo iſt

Exponent 3 — 1 = 120 / 2 = 240

240 + 3 kleinſtes Glied. = 243

Exponent 3) 243

81 das gefundne gröſte Glied.

(XI.) Aus der Summe der Progreßion, dem Exponenten und dem gröſten Gliede das kleinſte zu finden. §. 89.

1) Ziehet das gröſte Glied von der Summe ab, und multipliciret den Reſt mit dem Exponenten — 1. 2) Ziehet das Product von dem gröſten Gliede ab. Es ſey die Summe 120; der Exponent 3, und das gröſte Glied 81: ſo iſt

120 − 81 = 39

39 / 2 = 3 − 1

78, und 81 − 78 = 3 Das gefundne kleinſte Glied.

(XII.) Aus der Summe der Progreßion, dem Exponenten, und der Anzahl der Glieder das gröſte Glied zu finden. §. 90.

1) Suchet diejenige Potenz des Exponenten, deren Grad der Anzahl der Glieder gleich iſt, und behaltet auch die Potenz von dem nächſt kleinern Grade. 2) Subtrahiret die leztere von der erſtern, und multipliciret den Reſt mit der Summe der Progreßion. 3) Subtrahiret 1 von der in der

ersten Operation gefundnen größern Potenz, und dividiret mit dem Rest in das Product der zweyten Operation. Es sey die Summe 189; der Exponent 2 und die Anzahl der Glieder 6:

so ist 1) $2^6 = 64$
$2^{6-1} = 32$
2) $64 - 32 = 32$
$32 \times 189 = 6048$
3) $64 - 1 = 63$
$\frac{6048}{63} = 96$ das gefundne größte Glied.

(XIII.) Aus dem größten Gliede, dem Exponenten und der Anzahl aller Glieder das kleinste zu finden. §. 91.

Erhebet den Exponenten zu derjenigen Potenz, deren Grad der Anzahl der Glieder — 1 gleich ist, und theilet mit der gefundnen Potenz das größte Glied. Wenn z. E. das größte Glied 2187, der Exponent 3, und die Anzahl der Glieder 7: so ist $3^6 = 729$

$\frac{2187}{729} = 3$ gefundnes kleinste Glied.

(XIV.) Aus der Summe der Progreßion, dem Exponenten und der Anzahl der Glieder das kleinste Glied zu finden. §. 92.

1) Multipliciret den um 1 verminderten Exponenten mit der gegebnen Summe. 2) Erhebet den Exponenten zu derjenigen Potenz, deren Grad der Anzahl der Glieder gleich ist, und subtrahiret 1 von der gefundnen Potenz. 3) Theilet mit dem Rest das Product der ersten Operation. Der Quotient ist das kleinste Glied. Wenn z. E. die Summe 363; der Exponent 3 und die Anzahl der Glieder 5: so ist

1) $363 \times 3 - 1 = 726$
2) $3^5 = 243$
3) $\frac{726}{243 - 1} = 3$ das gefundne kleinste Glied.

(XV.)

(XV.) Aus den beyden äuſſerſten Gliedern und dem Exponenten die Anzahl der Glieder zu finden. §. 93.

Subtrahiret den Logarithmus des kleinſten Gliedes von dem Logarithmus des gröſten; dividiret den Reſt mit dem Logarithmus des Exponenten, und addiret 1 zum Quotienten. Es ſey der Exponent 3, das kleinſte Glied 2, und das gröſte 54: ſo iſt

Logar. 54 = 1,7323938
— Logar. 2 = 0,3010300

Vom Exponent 3 iſt der Log. 0,4771812) 1,4313638

Quotient 3. Wenn nun 3 + 1 = 4: ſo iſt die Anzahl der Glieder = 4.

(XVI.) Aus der Summe aller Glieder, dem Exponenten und dem kleinſten Gliede die Anzahl aller Glieder zu finden. §. 94.

1) Multipliciret den um 1 verminderten Exponenten mit der Summe der Progreſſion, und addiret zum Product das kleinſte Glied. 2) Subtrahiret von dem Logarithmus der gefundnen Summe den Logarithmus des kleinſten Gliedes, und dividiret den Reſt durch den Logarithmus des Exponenten. Der Quotient giebet die Anzahl der Glieder. Wenn z. E. die Summe 363; der Exponent 3 und das kleinſte Glied 3: ſo iſt

1) 3 — 1 × 363 = 726
726 + 3 = 729
2) Logar. 729 = 2,8627875
— Logar. 3 = 0,4771212

Vom Exponent 3 iſt der Logar. 0,4771212) 2,3856063

Quotient 5. Die Anzahl der Glieder iſt alſo = 5.

(XVII.) Aus den beyden äuſſerſten Gliedern und der Summe der Progreſſion den Exponenten zu finden. §. 95.

Subtrahiret das gröſte und auch das kleinſte Glied von der Summe, und theilet einen Reſt durch den andern.

z. E. wenn die beyden äußersten Glieder 3 und 81, und die Summe 120: so iſt $120 - 3 = 117$

$120 - 81 = 39$

$\frac{117}{39} = 3$ der gefundne Exponent.

(XVIII.) Aus der Anzahl der Glieder, und den beyden äusserſten Gliedern, den Exponenten zu finden. §. 96.

Dividiret das gröſte Glied durch das kleinſte, und ziehet aus dem Quotienten die Wurzel derjenigen Potenz, deren Grad = der Anzahl der Glieder — 1. z. E. es ſey die Anzahl der Glieder 5; das kleinſte Glied 2401 und das gröſte 5764801: ſo iſt

$$2401) \frac{5764801}{2401}$$

$\sqrt[4]{\quad}$ 7 der gefundne Exponent der Progreßion 2401:16807:117649:823543:5764801.

Vierter Abſchnitt.

Von dem aus der Verbindung einer arithmetiſchen und geometriſchen Progreßion entſtehenden logarithmiſchen Calcul.

§. 97.

Wenn man eine arithmetiſche Progreßion mit einer geometriſchen vergleichet, z. E.

÷ 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10

≒ 1:2:4:8:16:32:64:128:256:512

ſo findet man, α) daß, wie in jeden vier auf einander folgenden arithmetiſchen Progreßionalen, z. E. in 3.4.5.6 die Summe der beyden äußeſten, der Summe der beyden mittel-

mittelſten gleich iſt, als $3+6=4+5$: ſo in jeden vier auf einander folgenden geometriſchen Progreßionalen, z. E. in 4 : 8 : 16 : 32, das Product der beyden äuſſerſten dem Product der beyden mittelſten gleich iſt, als $4\times 32=8\times 16$; und daß alſo in der arithmetiſchen Progreßion die Addition iſt, was in der geometriſchen die Multiplication. β) daß wie in jeden drey auf einander folgenden arithmetiſchen Progreßionalen, z. E. in 2. 3. 4 das Duplum 6 der mittlern Zahl 3, der Summe der beyden äuſſerſten $2+4$ gleich iſt, ſo in jeden drey auf einander folgenden geometriſchen Progreßionalen z. E. 2 : 4 : 8 das Quadrat 16 der mittelſten Zahl 4, dem Product der beyden äuſſerſten 2×8 gleich iſt; γ) daß, wie in jeden drey auf einander folgenden arithmetiſchen Progreßionalen, z. E. in 2. 3. 4. das Triplum 9 der mittlern Zahl 3, der Summe aller drey Zahlen $2+3+4$ gleich iſt, ſo in jeden drey auf einander folgenden geometriſchen Progreßionalen, z. E. in 2 : 4 : 8, der Cubus 64 von der mittelſten Zahl 4, dem Product aller drey Zahlen $2\times 4\times 8$ gleich iſt. δ) daß wie in jeden fünf auf einander folgenden arithmetiſchen Progreßionalen, z. E. in 1. 2. 3. 4. 5 das Quadruplum 12 des mittelſten Gliedes 3 der Summe der vier übrigen $1+2+4+5$ gleich iſt, ſo in jeden fünf auf einander folgenden geometriſchen Progreßionalen 1 : 2 : 4 : 8 : 16 das Biquadrat 256 der mittelſten Zahl 4, dem Product der vier übrigen $1\times 2\times 8\times 16$ gleich iſt. ε) daß, wie in jeden fünf auf einander folgenden arithmetiſchen Progreßionalen, z. E. in 1. 2. 3. 4. 5 das Quintuplum 15 des mittelſten Gliedes 3, der Summe aller fünf Glieder $1+2+3+4+5$ gleich iſt, ſo in jeden fünf auf einander folgenden geometriſchen Progreßionalen, z. E. in 1 : 2 : 4 : 8 : 16 das Superſolidum 1024 der mittelſten Zahl 4 dem Product aller fünf Zahlen $1\times 2\times 4\times 8\times 16$ gleich iſt, u. ſ. w.

und daß alſo vermöge $\beta|\gamma|\delta|\varepsilon|$, die Duplirung, Triplirung, Quadruplirung, Quintuplirung ꝛc. in der arithmetiſchen Progreßion

ist, was in der geometrischen die Quadrirung, Cubirung, Biquadrirung, Supersolidirung, u. s. w.

ζ) daß, wie in jeden drey auf einander folgenden arithmetischen Progreßionalen, z. E. in 2. 3. 4 das mittelste Glied 3 gleich ist, der durch 2 dividirten Summe der beyden äussersten, als $2+4=6$ und $\frac{6}{2}=3$: so in jeden drey geometrischen auf einander folgenden Progreßionalen, z. E. in 2:4:8 das mittelste Glied 4, die Quadratwurzel des Productes der beyden äussersten ist, als $2\times 8=16$, und $\sqrt{16}=4$ ist; und daß folglich in der arithmetischen Progreßion die Division mit 2 ist, was in der geometrischen das Ausziehen der Quadratwurzel. η) daß wie in jeden drey auf einander folgenden arithmetischen Progreßionalen, z. E. in 2. 3. 4. das mittelste Glied 3 gleich ist der durch 3 dividirten Summe aller drey Glieder, als $2+3+4=9$, und $\frac{9}{3}=3$: so in jeden drey auf einander folgenden geometrischen Progreßionalen, z. E. in 2:4:8 das mittelste Glied 4, die Cubikwurzel von dem Product aller drey Glieder ist, als $2\times 4\times 8=64$, und $\sqrt[3]{64}=4$, und daß folglich in der arithmetischen Progreßion die Division mit 3 ist, was in der geometrischen das Ausziehen der Cubikwurzel; u. s. w.

und daß also vermöge ζ) und η) das Dividiren in der arithmetischen Progreßion ist, was das Extrahiren der Wurzeln in der geometrischen.

§. 98.

Diese von Stiefeln vorlängst bemerkte Uebereinstimmung der arithmetischen und geometrischen Progreßion, welche noch auf mehrere Art möglich ist, hat in der der Folge der Zeit den Mathematikern zur Erfindung eines sehr vortheilhaften Calculs Gelegenheit gegeben, vermittelst wessen das Multipliciren in Addiren, das Dividiren in Subtrahiren, und das Ausziehen der Wurzeln in Dividiren verwandelt wird. Man hat ihn den logarithmischen Calcul

cul benennet, und die Benennung von dem Worte Logarithmus, (λογων *) αριθμος) welches ſo viel als Verhältnißzahl oder Exponent ſaget, und womit man die Zahlen einer mit Null anhebenden und mit der Differenz 1 fortgehenden arithmetiſchen Progreßion bezeichnet, in ſoweit ſolche mit den Zahlen einer mit 1 anhebenden geometriſchen verglichen werden, hergenommen. Es ſeyn z. E. die Progreßionen 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256

In dieſen beyden Progreßionen iſt die 0 aus der arithmetiſchen der Logarithmus von 1 aus der geometriſchen; die 1 aus der arithmetiſchen, der Logarithmus von 2 aus der geometriſchen, u. ſ. w; und wie vermittelſt der Verbindung der beyden Progreßionen das Multipliciren in Addiren, das Dividiren in Subtrahiren und das Ausziehen der Wurzeln in Dividiren verwandelt werden könne, iſt aus folgenden Exempeln zu erſehen.

1) Es ſeyn 4 und 16 aus der geometriſchen Progreßion, welche 2 und 4 zu Logarithmen haben. Wenn nun $2+4=6$: ſo zeiget die Zahl 6, wo wir das Product von 4×16 zu ſuchen haben, und wir finden ſolches unter dem Logarithmus 6 mit der Zahl 64.

2) Es ſoll die geometriſche Progreßionale 128 durch 16 dividiret werden. Da die Logarithmen von 128 und 16 die arithmetiſchen Progreßionalen 7 und 4 ſind: ſo ſubtrahiret 4 von 7, bleibt 3. Dieſe 3 iſt der Logarithmus von 8, und der Quotient $\frac{128}{16}$ iſt alſo $=8$.

3) Es ſoll aus der Zahl 16 die Quadratwurzel gezogen werden. Wenn nun eine Quadratzahl eine Potenz vom zweyten Grade, und der Logarithmus von der gegebenen Zahl 16 eine 4 iſt: ſo dividiret den Logarithmus 4 mit 2, kömmt 2. Suchet den Logarithmus 2, ſo ſtehet darunter die geometriſche Progreßionale 4, welche die Quadratwurzel von 16 iſt.

*) Das Wort λογος wird beym Euklides für das genommen, was bey uns Ration, Relation, oder Verhältniß genennet wird.

4) Es ſoll aus der Zahl 64 die Cubikwurzel gezogen werden. Wenn nun eine Cubikzahl eine Potenz von drey Graden, und der Logarithmus von der gegebnen Cubikzahl 64 eine 6 iſt: ſo dividiret 6 durch 3, kömmt 2. Suchet den Logarithmus von 2: ſo ſtehet darunter die geometriſche Progreßionale 4, welche die Cubikwurzel von 64 iſt u. ſ. w.

§. 99.

Da es einerley iſt, mit was für einem Exponenten die geometriſche Progreßion fortgehet, wenn nur die arithmetiſche einerley bleibet: ſo ſind unendliche Arten oder Syſtemen eines logarithmiſchen Calculs möglich. Man hat aber unter allen möglichen geometriſchen Fortſchreitungen die zehnfache erwählet, indem wir nach eins, zehn, hundert, tauſend ꝛc. zählen, und dieſe Fortſchreitung uns alſo natürlicher iſt, als alle andern. Die beyden zum Grunde gelegten Progreßionen ſind alſo:

arithmet. 0. 1. 2. 3. 4.

geometr. 1. 10. 100. 1000. 10000 u. ſ. w.

Es kömmt itzo darauf an, auf dieſe beyde Progreßionen ein logarithmiſches Calculſyſtem zu erbauen; und dieſes wird geſchehen, wenn diejenigen Zahlen, die zwiſchen die geometriſchen Progreßionalen 1 und 10, 10 und 100, 100 und 1000 u. ſ. w. fallen, und noch keine Logarithmen haben, und welche z. E. zwiſchen 1 und 10 die Zahlen 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9 ſind, auch mit Logarithmen verſehen werden. Denn es können dieſe Zwiſchenzahlen eben ſowohl als die andern, welche ihre Logarithmen haben, als Potenzen im Calcul vorkommen, und wir wiſſen weiter nichts, als daß z. E. die Logarithmen für 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9 größer ſeyn müſſen als 0, und kleiner als 1, und daß eben ſo die Logarithmen für die Zahlen von 11 bis 99 größer ſeyn müſſen als 1 und kleiner als 2, u. ſ. w.

§. 100.

Da die zu findenden Logarithmen für dieſe Zwiſchenzahlen nichts anders als unvermeidliche Brüche ſeyn können:

nen: so ist zuvörderst die Frage, solche so accurat als möglich zu machen, und hernach zum Nenner dieser Brüche die bequemste Zahl zu erwählen. Beydes wird geleistet werden, wenn man die Logarithmen in Decimalbrüchen suchet, und man, zum Exempel, den beyden zum Grunde gelegten Progreßionen mit einem Zusatz von sieben Nullen, durch welche die Stellen der Decimalbrüche angedeutet werden, folgende Gestalt giebet:

Logar. 0,0000000, 1,0000000, 2,0000000, 3,0000000 ꝛc.
Progreß. 1,0000000, 10,0000000, 100,0000000, 1000,0000000 ꝛc.

Nun müssen die Logarithmen für die bewußte Zwischenzahlen gesuchet werden. Dieses geschicht durch Berechnung der Mittelproportionalen sowohl zwischen den geometrischen Progreßionalzahlen als ihren Logarithmen, und was es mit diesem mühsamen Berechnungsgeschäfte für eine Bewandniß habe, wird man aus folgenden Exempeln sehen. Es soll der Logarithmus von der Zahl 9 gesuchet werden. Da derselbe zwischen 0 und 1 verstreckt ist, so wollen wir der 9 ebenfalls sieben Nullen zusetzen, um die Decimalstellen anzuzeigen, und alsdenn muß der Logarithmus von 9,0000000 zwischen 0,0000000 und 1,0000000 kommen. Es ist dieser Umstand nöthig zu wissen, indem wir uns mit dem Suchen der Mittelproportionalen so lange beschäftigen müssen, bis die Zahl 9.0000000 unter den geometrischen Proportionalen erscheinet.

1) Suchet die geometrische Mittelproportionale zwischen 1,0000000 und 10,0000000. Dieses geschicht, wenn nach der im §. 79. gegebenen Anweisung die beyden gegebenen Zahlen in einander multipliciret werden, und aus dem Product 10,|00|00|00|00|00|00|00 die Quadratwurzel gezogen wird. Diese Quadratwurzel ist $3,1622776\frac{3,8053824}{6,3245552}$, und weil der Bruch mehr als ein halbes beträget: so nimmt man 3,1622777.

2) Su-

2) Suchet die arithmetiſche Mittelproportionale zwiſchen 0,0000000 und 1,0000000. Dieſes geſchicht, wenn, nach der im §. 20. gegebnen Anweiſung, die beyden gegebnen Zahlen addiret werden, und das Collect halbiret wird; kömmt 0,5000000, welche Zahl der Logarithmus von der, vermittelſt vorhergehender Operation gefundnen Proportionale 3,1622777 ſeyn wird.

Der Augenſchein giebt, daß die gefundne Mittelproportionale viel kleiner als die Zahl 9,0000000 iſt, deren Logarithmus wir ſuchen. Wir müſſen alſo durch Erfindung einer neuen Mittelproportionale zwiſchen 3,1622777 und 10,0000000 der Wahrheit näher zu kommen bemüht ſeyn, und woferne dieſe neue Proportionale noch nicht 9,0000000 ſeyn ſollte, durch beſtändig wiederhohltes Suchen neuer Proportionalen zwiſchen den vorhergehenden, dieſe Operationen ſo lange fortſetzen, bis ſich die mit 7 Nullen vermehrte Zahl 9, nebſt ihrem Logarithmus entblößet. Es müſſen die neuen Proportionalen aber beſtändig zwiſchen denjenigen vorhergehenden, die der 9,0000000 am nächſten ſind, zum Exempel auf folgende Art, geſuchet werden. Um die Vorſtellung des Proceßes zu erleichtern, wollen wir die erſte geometriſche Grundzahl 1,0000000 nebſt ihrem Logarithmus 0,0000000 mit dem Buchſtaben A; die zweyte 10,0000000 und ihren Logarithmus 1,0000000 mit B, und die vorhin gefundne Mittelproportionale 3,1622777 und ihren Logarithmus 0,5000000 mit C bezeichnen, als:

	Proportionale.	Logarithmen.
A	1,0000000	0,0000000
C	3,1622777	0,5000000
B	10,0000000	1,0000000

3) Suchet die Mittelproportionalen und ihre Logarithmen

D	5,6234132	0,7500000	zwiſchen	B und C
E	7,4989421	0,8750000	—	B — D
F	8,6596432	0,9375000	—	B — E
G	9,3057204	0,9687500	—	B — F

H	8,9768713	0,9531250	zwiſchen	G	und	F
I	9,1398170	0,9609375	—	G	—	H
K	9,0579777	0,9570313	—	H	—	I
L	9,0173333	0,9550781	—	H	—	K
M	8,9970796	0,9541016	—	H	—	L
N	9,0072008	0,9545898	—	L	—	M
O	9,0021388	0,9543457	—	M	—	N
P	8,9996088	0,9542236	—	M	—	O
Q	9,0008737	0,9542847	—	O	—	P
R	9,0002412	0,9542542	—	P	—	Q
S	8,9999250	0,9542389	—	P	—	R
T	9,0000831	0,9542465	—	R	—	S
V	9,0000041	0,9542427	—	S	—	T
X	8,9999650	0,9542408	—	S	—	V
Y	8,9999845	0,9542417	—	V	—	X
Z	8,9999943	0,9542422	—	V	—	Y
a	8,9999992	0,9542425	—	V	—	Z
b	9,0000016	0,9542426	—	V	—	a
c	9,0000004	0,9542425	—	a	—	b
d	8,9999998	0,9542425	—	a	—	c
e	9,0000000	0,9542425	—	c	—	d

§. 101.

Da vermittelſt der lezten Operation die Zahl 9,0000000 unter den Proportionalen, und für ſelbige der Logarithmus 0,9542425 gekommen, ſo wird derſelbe für den Logarithmus der Zwiſchenzahl 9 angenommen, und wir haben nunmehr die Logarithmen von 1, 9 und 10. Laßt uns ſehen, was wir aus dem Logarithmus der Zahl 9 erfinden können. Es wird, vermöge Syſtems, der Logarithmus von der Zahl 3 ſeyn, und wir erhalten ihn, wenn der Logarithmus von 9 mit 2 dividiret wird. Das Verfahren gründet ſich auf das was im §. 98. No. 3) geſaget worden. Es fehlen uns annoch die Logarithmen von 2. 4. 5. 6. 7 und 8. Wenn nun der von 2 auf eben die Art, als der von 9 zwiſchen 1,0000000 und 10,0000000, nebſt deren Logarithmen 0,0000000 und 1,0000000 geſuchet, und zu dem Ende

die 2 mit ſieben Nullen vermehret wird, ſo wie es mit der 9 geſchehen: ſo kömmt ſolcher nach vieler Arbeit in den Zahlen 0,3010300, und wir nutzen ihn dergeſtallt, daß wir durch ihn die Logarithmen für 4, 5, 6 und 8 erfinden,

α) für 4, wenn der Logarithmus von 2 mit 2 vermehret wird. β) für 5, wenn derſelbe von dem der Zahl 10 zugehörigen Logarithmus abgezogen wird; γ) für 6, wenn er zu dem der Zahl 3 gehörigen Logarithmus addiret wird, und δ) für 8, wenn er zu dem Logarithmus von 4 addiret wird.

Alle dieſe Operationen gründen ſich auf das, was im §. 98. gelehret, und mit Exempeln erläutert worden.

§. 102.

Wir haben nunmehr die Logarithmen für 1. 2. 3. 4. 5. 6. 8. 9 und 10. Die einzige Zwiſchenzahl 7 fehlet uns annoch. Man ſuchet ſie alſo auf eben die Art, als man die 9 und 2 gefunden hat, und alsdenn machet man eine Digreßion in die Zehner, Hunderte, Tauſende, Zehntauſende u. ſ. w. und unterſuchet aufs genaueſte, was ſich in dem Raume von 1 bis 10000000 aus den bekannten Logarithmen von 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9 und 10 für neue Logarithmen finden laſſen. Dieſe Unterſuchung geſchicht nun auf eben die Art, als die 3 aus 9; die 4 aus 2; die 8 aus 2 und 4, und die 5 aus 2 und 10 gefunden worden. Ich will die Hauptoperationen kürzlich wiederhohlen, und ſie annoch mit einer neuen vermehren. Man wird bey allen vorhergehenden Logarithmen bemerket haben, daß ein jeder von ihnen aus acht Ziffern beſteht, und daß die erſte linker Hand von den ſieben übrigen, welche die Decimalbrüche enthalten, durch ein Comma *) abgeſondert iſt. Dieſe erſte Ziffer wird der Index oder die characteriſtiſche Ziffer oder die Kennziffer des Logarithmus genennet, und ſelbige iſt vermöge des angenommenen Syſtems

0 1 2 3 4
1 : 10 : 100 : 1000 : 10000

alſo

*) Man kann ſich auch eines Puncts, an ſtatt des Commatis, bedienen.

allezeit 1 weniger, als die Anzahl der Ziffern der ihr zugehörigen natürlichen Zahl. So haben z. E. alle Zahlen die aus 4 Ziffern bestehen, eine 3 zur Kennziffer des Logarithmus; die aus 3 bestehen, eine 2, u. s. w. Laßt uns itzo sehen, was man aus den Logarithmen von 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9 und 10 für neue Logarithmen erfinden kann.

1) Vermehret die Kennziffer der Logarithmen um eine Einheit, so kömmt der Logarithmus für die (vermittelst der Multiplication) um 10 erhöhte natürliche Zahl, welcher der Logarithmus angehöret. (Diese natürliche Zahlen werden in der Logarithmik insgemein die Absolutzahlen der Logarithmen genennet.) Vermehret die Kennziffer um zwey Einheiten, so kömmt der Logarithmus für die um 100 erhöhte natürliche Absolutzahl, u. s. w. Auf solche Art wird aus dem Logarithmus von 2 = 0,3010300 der Logarithmus 20 = 1,3010300, und der Logarithmus von 200 = 2,3010300, und der von 2000 = 3,3010300 u. s. w. erfunden.

2) Dupliret die Logarithmen, so kommen die Logarithmen für die Quadrate der Absolutzahlen; tripliret sie, so kommen die Logarithmen für die Cubikzahlen der Absolutzahlen; quadrupliret sie, so kommen die Logarithmen für die Biquadrate der Absolutzahlen, u. s. w. Auf diese Weise erhält man den Logarithmus für 49, wenn der von 7 dupliret wird, und den für 343, wenn der von 7 tripliret wird, u. s. w.

3) Addiret zwey oder mehr Logarithmen, so kommen die Logarithmen für das Product der Absolutzahlen. Es sey z. E. der Logarithmus von 7 und der von 9. Addiret beyde, so kömmt der für 63 = 7×9. Addiret annoch den von 5, so kömmt der für 315 = 7×9×5. und so weiter.

Was nun nicht durch diese drey Operationen gefunden wird, und dahin gehören alle Primzahlen von 11 an, muß wieder auf die Art gesuchet werden, als die Logarithmen für 9, 2 und

2 und 7 gesuchet worden, und das gefundne wird wieder angewendet, so wie die zehn erstern Logarithmen angewendet worden, u. s. w.

§. 103.

Wir haben aber nicht nöthig, uns diesen weitläuftigen Berechnungen zu unterziehen. Ein schottländischer Gelehrter, **Johann Neper, Baron von Merchiston**, welcher den logarithmischen Calcul erfunden, hat mit dem Beystande der berühmten Männer, **Heinrichs Brigge**, Professor der Mathematik zu Oxford, und **Adrians Vlacq**, eines Mathematikers in Holland, bereits alles dieses gethan. Die einzige Bemühung, die wir noch haben, besteht darinnen, daß, da diese Logarithmen, zwar bis auf 10000000 ausgerechnet, aber in den gewöhnlichen Tabellen, nur bis zur Absolutzahl 10000 zu finden sind, wir die Logarithmen von allen Zahlen, welche gröſſer als 10000 sind, suchen müssen. Hiezu ist uns aber von jenen vortreflichen Männern ein sehr leichtes Mittel, bey welchem alles weitläuftige Suchen von Mittelproportionalen wegfällt, an die Hand gegeben worden. Ich werde solches, nebst der Art, den Wehrt eines in den Tabellen nicht befindlichen Logarithmen zu finden, und der Anwendung der Logarithmen auf verschiedne Fälle, in folgenden Paragraphen darlegen.

(I.) Den Logarithmus zu einer Zahl von 5, 6 bis 7 Ziffern zu finden, z. E. zu 52128. §. 104.

1) Suchet in den Tabellen den Logarithmus zu den vier ersten Ziffern der Aufgabe, von der Linken nach der Rechten gerechnet, und also zu 5212. 2) Subtrahiret den gefundnen Logarithmus von dem nächst darauf folgenden höhern, und multipliciret die Differenz mit den restirenden Zahlen der Aufgabe, und also allhier mit 8. 3) Schneidet von dem Product so viele Ziffern recheer Hand ab, als in der ersten Operation zurücke blieben, und addiret den Rest zu dem erstgefundnen Logarithmus. 4) Vermehret die Kennziffer des Logarithmus um so viel Einheiten, als die

Anzahl

Anzahl der reſtirenden Zahlen der Aufgabe beträget: ſo iſt der Aufgabe genüget. Ich will die ganze Ausarbeitung herſetzen.

Logar. von 5213 = 3,7170877
— — 5212 = 3,7170044

833 Differenz
8 die reſtirende Zahl.

666|4 die Zahl 4 wird abgeſchnitten.

3,7170044

Kennziffer 3 + 1 = 4,7170710 der gefundne Logarithmus von 52128.

Wenn alſo der Logarithmus von 521284 geſuchet wird, ſo geſchicht die Operation, wie folget:

Logar. von 5213 = 3,7170877
— — 5212 = 3,7170044

833 Differenz
84 die reſtirenden Zahlen.

3332
6664

699|72 wird abgeſchnitten.

7170044

Kennziffer 3 + 2 = 5,7170743 der gefundne Logarithmus von 521284.

Anmerkung.

Wenn die gegebne Zahl, deren Logarithmus geſuchet wird, durch die Diviſion kann kleiner gemachet werden, ſo kann man den Logarithmus leichter finden, wenn man die Logarithmen der beyden Factoren addiret. So gehet z. E. in die Zahl 52128 die Zahl 8 gerade auf, und der Quotient iſt 6516. Addiret alſo den Logarithmus von 8 und den von 6516: ſo kommt ebenfalls der Logarithmus von 52128, als:

Logar. von 8 = 0,9030900
— — 6516 = 3,8139811
— — 52128 = 4,7170711.

Es gründet ſich dieſes auf das, was im §. 102. No. 3. geſaget worden.

(II.) Zu einem Logarithmus die Abſolutzahl oder den Wehrt von fünf, ſechs bis ſieben Ziffern zu finden, z. E. zu 6,6973884. §. 105.

1) Suchet in den Tabellen unter der Kennziffer 3 einen niedrigern Logarithmus, deſſen Ziffern den Ziffern des gegebnen Logarithmus, von der Linken gegen die Rechte gerechnet, am nächſten kommen. Die darneben ſtehende Abſolutzahl, allhier 4981, giebet die vier erſten Ziffern für den Wehrt des gegebnen Logarithmus. 2) Subtrahiret den gefundnen niedrigern Logarithmus von dem gegebnen höhern, ohne die Kennziffer gleichwohl zu ſubtrahiren, und vermehret die Differenz mit ſo viel Nullen, als die Differenz der Kennziffern beyder Logarithmen beträget. 3) Subtrahiret den gefundnen niedrigern Logarithmus von dem zunächſt folgenden höhern, und dividiret mit der Differenz in die, vermöge der vorigen Operation, mit Nullen vermehrte Differenz. 4) Setzet den Quotienten an die, vermittelſt der erſten Operation, zuerſt gefundne vier Ziffern: ſo giebet die ganze Zahl den Wehrt des gegebnen Logarithmus. Man ſehe folgende Ausarbeitung.

Der gegebne Log. 6,6973884 — Der gefundne
Der gefundne Log. 3,6973165=4981. — höhere Log. 3,6974037
Die mit drey Nullen vermehrte Differenz. 719000 : 872 — Der gefundne niedrigere 3,6973165
Quotient $824\frac{472}{872}$ — 872 Diff.

Wenn nun der Quotient 824, welchen wir wegen des mehr als ein halbes betragenden Bruches $\frac{472}{872}$ um eine Einheit vermehren, und alſo in 825 verwandeln können, den Zahlen 4981 des zuerſt gefundnen Logarithmen 3,6973165 angehänget wird: ſo wird der Wehrt des gegebnen Logarithmen 6,6973884 ſeyn = 4981825.

Erſte Anmerkung.

Wenn man den Wehrt eines Logarithmen ſuchet, und unter einer andern Kennziffer juſt die Ziffern findet, woraus der gegebne Logarithmus beſteht: ſo kann man gewiß ſeyn, daß die annoch daran fehlenden Ziffern Nullen ſind. Z. E. die Aufgabe iſt 4,8698182. Unter der Kennziffer 3 findet man

man 3,8698182, mit dem Wehrt von 7410. Da nun vermöge der Kennziffer, der Wehrt aus fünf Ziffern beſtehen muß: ſo darf man nur zu der Zahl 7410 eine Nulle hinzufügen, ſo bekömmt man 74100 für den Wehrt des Logarithmen 4,8698182.

Zweyte Anmerkung.

Wenn es ſich findet, daß der Reſt, mit welchem die Differenz der zuerſt von einander ſubtrahirten Logarithmen getheilet werden ſoll, gröſſer als die zu theilende Zahl iſt: ſo iſt ſolches ein Zeichen, daß man zu den ſchon gefundnen Ziffern nur eine Nulle hinzufügen darf. Z. E. den Wehrt des Logarithmen 4,8514474 zu finden. Stehet alſo:

Der gegebne Log.	4,8514474	3,8515030=7104
Der am nächſten damit übereinkomende	3,8514418=7103	3,8514418=7103
	56 Differenz	612
		560 die mit o vermehrte Differenz
	612)0	

Alſo iſt der Werth 71030.

(III.) Den Wehrt eines ſeiner Kennziffer nach in den gewöhnlichen Tabellen enthaltenen Logarithmen in Decimaltheilen zu finden; z. E. des Logar. 3,2887565, deſſen Abſolutzahl 1944.

§. 106.

1) Vermehret die Kennziffer 3 des Logarithmen um eine Einheit, wenn der Nenner des Bruchs eine 10 ſeyn ſoll; um zwey Einheiten, wenn er 100 ſeyn ſoll, u. ſ. w. 2) Suchet den Wehrt des Logarithmen nach den Regeln bey II), und nehmet die vier erſten Ziffern dieſes Wehrts zur ganzen Zahl, und die folgenden übrigen zum Zähler. So iſt in dem gegenwärtigen Exempel der Wehrt des gegebnen Logarithmen 3,2887565 die Abſolutzahl 19442, in ſofern die Kennziffer 3 um eine Einheit erhöhet, und alſo in 4 verwandelt wird. So iſt ferner die Abſolutzahl deſſelben 194427, in ſofern die Kennziffer 3 um zwey Einheiten erhöhet, und alſo in 5 verwandelt wird, u. ſ. w. 3) Sondert den Wehrt 1944 des gegebnen Logarithmen 3,2887565 von den durch die Erhöhung der Kennziffer

gefundnen mehrern Zahlen ab, ſo iſt der Wehrt des Logarithmen in Decimaltheilen im erſtern Falle $1944\frac{2}{10}$ oder 1944,2; und im leztern Falle $1944\frac{27}{100}$ oder 1944,27.

Anmerkung.

Wenn der gegebne Logarithmus, deſſen Abſolutzahl man in Decimaltheilen verlanget, eine kleinere Zahl als 3 iſt, und alſo entweder eine 2, 1 oder 0 zur Kennziffer hat: ſo brauchet man ihn nur unter der Kennziffer 3 zu ſuchen. Es ſey z. E. der Logarithmus 1,4540823, welcher weder unter der Kennziffer 1, noch unter der Kennziffer 2 in den Tabellen zu finden iſt. Wenn derſelbe nun unter der Kennziffer 3 geſuchet wird: ſo findet man die Abſolutzahl 2845, und der Wehrt des Logarithmen 1,4540823 iſt alſo in Decimaltheilen $28\frac{45}{100}$ oder 28,45.

Die vorhergehende Aufgabe bey (III) nebſt der dazu gehörigen Anmerkung verdienet eine vorzügliche Aufmerkſamkeit, da uns in gewiſſen Fällen eine ganze Zahl nicht genug thut, ſondern annoch der Bruch verlanget wird, und da hernach alle Logarithmen, deren lezte Ziffern rechter Hand nicht mit denen in den Tabellen übereinkommen, aus ganzen und gebrochnen Zahlen beſtehen.

(IV.) Den Logarithmus eines Decimalbruchs zu finden. §. 107.

1) Betrachtet den Decimalbruch als eine ganze Zahl, und ſuchet den dazu gehörigen Logarithmus. 2) Vermindert die Kennziffer des Logarithmus um ſo viel Einheiten, als die gegebne Zahl Decimalſtellen hat. Es ſeyn die Decimalbrüche

(a) (b) (c) (d) (e)

$9\frac{23521}{100000}$, $92\frac{3521}{10000}$, $923\frac{521}{1000}$, $9235\frac{21}{100}$, $92352\frac{1}{10}$

oder

(a) (b) (c) (d) (e)

9,23521, 92,3521, 923,521, 9235,21, 92352,1

Wenn nun der Logarithmus von der ganzen Zahl 923521 ſeyn wird = 5,9654468: ſo iſt der Logarithmus für den Decimalbruch

(a)

(a) 0,9654468 (c) 2,9654468 (e) 4,9654468
(b) 1,9654468 (d) 3,9654468

Anmerkung.

Wenn vor dem Decimalbruch keine ganze Zahl vorhergehet, d. i. wenn er rein iſt, ſo muß der Logarithmus des Zählers von dem Logarithmus des Nenners abgezogen, und die kommende Differenz negativ gemachet werden. Z. E. es ſey der Decimalbruch $0,3 = \frac{3}{10}$, ſo iſt

Logar. von 10 = 1,0000000
Logar. von 3 = 0,4771212
Logar. von 0,3 = — 0,5228788

(V.) Den Logarithmus eines gemeinen Bruchs zu finden. §. 108.

Iſt der Bruch ein eigentlicher reiner Bruch, ſo verfahret wie in der Anmerkung zur vorhergehenden Aufgabe. Iſt er aber uneigentlich, ſo wird der Logarithmus des Nenners von dem Logarithmen des Zählers abgezogen. Die Differenz bleibt poſitiv.

Z. E. α) wenn der eigentliche Bruch $\frac{3}{7}$, ſo iſt

Log. von 3 = 0,4771212
Log. von 2 = 0,3010300
Log. von $\frac{3}{7}$ = 0,1760912

β) Wenn der uneigentliche Bruch $\frac{15}{4}$, ſo iſt

Log. von 15 = 1,1760913
Log. von 4 = 0,6020600
Log. von $\frac{15}{4}$ = 0,5740313

Wenn die Aufgabe aus ganzen und gebrochnen Zahlen beſteht, z. E. aus $3\frac{1}{4}$, ſo wird der Bruch eingerichtet, und alſo allhier in $\frac{15}{4}$ verwandelt, und alsdenn verfahren, wie bey β) gezeiget worden.

(VI.) Den Wehrt eines negativen Logarithmus zu finden. §. 109.

Es wird derſelbe in Decimalbrüchen geſuchet, und gefunden, 1) wenn man den gegebnen Logarithmus, als einen poſitiven, von dem Logarithmus einer der dekadiſchen Zahlen 10, 100, 1000 u. ſ. w. abziehet. Es muß aber die Kennziffer des Logarithmus dieſer dekadiſchen Zahl von der Kennziffer des gegebnen Logarithmus um 4 unterſchieden ſeyn. 2) Wenn man den Wehrt des Reſtes unter den Logarithmen aufſuchet. Um ſolchen genau zu haben, kann nach Seite

Wenn wir die Kennziffer 1 des Logarithmen in 2 verwandeln, ſo kömmt für den Wehrt $10\frac{3}{10}$; verwandeln wir ſie in 3, ſo kömmt $10\frac{34}{100}$, und wenn wir ſie in 4 verwandeln, kömmt $10\frac{344}{1000}$ für die Quadratwurzel der furden Zahl 107.

β) Die Cubikwurzel aus 4 zu ziehen. §. 112.

Log. von 4 = 0,6020600

3) 0,2006866$\frac{2}{3}$

Wenn wir die Kennziffer 0 des gefundnen Logarithmus, deſſen Wehrt zwiſchen 1 und 2 fällt, in 3 verwandeln: ſo wird ſich die verlangte Cubikwurzel der Zahl 4 in $1\frac{587}{1000}$, und wenn wir ſie in 4 verwandeln, ſehr nahe in $1\frac{5874}{10000}$ darſtellen.

(IX.) Zwiſchen zwey Zahlen eine geometriſche Mittelproportionale zu finden. §. 113.

Z. E. zwiſchen 20 und 80.

Addiret die Logarithmen von 20 und 80, und theilet den kommenden Logarithmus durch 2, als:

1,3010300 Log. von 20.
1,9030900 Log. von 80.

2) 3,2041200

1,6020600 Log. von 40, und alſo iſt 40 die Mittelproportionale zwiſchen 20 und 80.

(X.) Zwiſchen zwey Zahlen ſo viele Mittelproportionale als man verlanget zu finden. §. 114.

Subtrahiret den Logarithmus der kleinern Zahl von dem Logarithmus der größern; dividiret den kommenden Logarithmus durch die mit 1 vermehrte Anzahl der verlangten Mittelproportionalen, und addiret den kommenden Logarithmus zu dem Logarithmus der gegebnen kleinern Zahl, ſo kömmt der Logarithmus der erſten Mittelproportionale. Zu ſelbigem addiret den durch die Theilung gefundenen Logar., ſo kömmt der Logarithmus der zweyten Mittelproportionale. Fahret auf ähnliche Art fort. Z. E. es ſollen zwiſchen 64 und 2048 vier Mittelproportionale gefunden werden. Die Ausarbeitung folget.

Logar. von 2048 = 3,3113299
Logar. von 64 = 1,8061800

4 + 1 = 5) 1,5051499
0,3010299 4/7

Logar. von 64 = 1,8061800
— von 128 = 2,1072099 4/7
0,3010299 4/7
— von 256 = 2,4082399 1/7
0,3010299 4/7
— von 512 = 2,7092699 2/7
0,3010299 4/7
— von 1024 = 3,0102999 1/7
0,3010299 4/7
— von 2048 = 3,3113299–

Also 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048.

(XI.) Nach der Regel de tri in Logarithmen zu rechnen, oder zu drey gegebenen Zahlen die vierte geometrische Proportionale zu finden. §. 115.

Addiret die Logarithmen des zweyten und dritten Satzes, und subtrahiret von dem kommenden Logarithmus den Logarithmus des ersten Satzes. Z. E. zu 3. 5. 6 die vierte Proportionale zu finden. Stehet also:

5 = Log. 0,6989700
6 = Log. 0,7781512
1,4771212
3 = Log. 0,4771212

Die gefundne Proportionale 10 = Log. 1,0000000 Also 3 : 5 = 6 : 10.

§. 116.

Wir haben bisher gesehen, mit was für Bequemlichkeit man die Logarithmen gebrauchen kann, wenn man grosse Zahlen zu multipliciren und zu dividiren, und Wurzeln auszuziehen hat, in welcher Absicht denn auch, besonders zum

zum Vortheil der Trigonometrie, die Logarithmen erfunden ſind. Ich füge anitzo eine Regel hinzu, nach welcher man vermittelſt der Logarithmen auch addiren und ſubtrahiren kann, die Zahlen mögen rational, oder irrational, ganz oder gebrochen ſeyn; ein Vortheil, der bey Addirung und Subtrahirung der Zahlen einer Potenz von Erheblichkeit iſt. Auch die Logarithmen der Primzahlen über 10000 können durch ſie gefunden werden. Die Regel iſt von dem Freyherrn von Wolf; von ſelbigem den Actis Eruditorum vom Jahre 1715 einverleibet worden, und iſt, ſoviel ich weiß, eben noch nicht ſehr bekannt.

(I.) Den Logarithmus der Summe zweyer Zahlen zu finden. §. 117.

1) Halbiret die Logarithmen beyder Zahlen; vermehret die Kennziffer des einen (es iſt willkührlich, weſſen von beyden,) um 10, und ſubtrahiret von demſelben die andere gefundne Hälfte.

2) Suchet unter den Logarithmen der Tangenten denjenigen auf, der dem eben gefundnen Reſt am nächſten kommt, und behaltet den daneben ſtehenden Logarithmen des Sinus.

3) Dieſen ziehet von dem in der erſten Operation um 10 vermehrten Logarithmen ab, und multipliciret den Reſt mit 2. Das Product iſt der geſuchte Logarithmus.

Es ſeyn die beyden Zahlen 487 und 313.

1ſte Operat. Log. von 487 = 2,6875290.
Die um 10 vermehrte Hälfte = 11,3437645
Log. von 313 = 2,4955443.
Deſſen Hälfte = 1,2477722
Differenz beyder Hälften = 10,0959923.

2te Operation.

Dem Log. 10,0959923 kommt am nächſten der Logar. der Tangente von 51° 17′ und der daneben ſtehende Logarithmus des Sinus iſt 9,8928329.

3te Operation.

11,3437645
— 9,8922329
1,4515316
2
2,9030632 gefundner Logarith. der Summe von 313 + 487 = 800.

Anmerkung.

Will man den Logarithmus noch genauer haben, so nehme man bey der zweyten Operation zugleich den Logarithmen des Cosinus; ziehe denselben von der andern in der ersten Operation gefundenen Hälfte, nachdem man auch diese um 10 vermehret, ab, und addire den Rest zu dem Rest der dritten Operation. Die Summe giebt den Logarithmus noch genauer. Stehet also:

Die um 10 vermehrte Hälfte des Log. von 313 = 11,2477722
Der Logar. des Cosinus von 51° 17′ = 9,7962062
Rest 1,4515660
Rest der 3ten Operation 1,4515316
Summe 2,9030976
gefundner Logarithmus der Summe.

Der durch diese Operation gefundne Logarithmus von 800 weicht von demjenigen, der in den logarithmischen Tafeln angegeben ist, nemlich 2,9030900 nur um 7 Millionentheile ab, der in der dritten Operation gefundene aber um 27 dergleichen Theile.

(11.) Den Logarithmus der Differenz zweyer Zahlen zu finden. §. 118.

1) Halbiret die Logarithmen der gegebenen Zahlen; vermehret die Kennziffer der gefundenen Hälfte des Logarithmen der kleinern Zahl um 10, und subtrahiret die andere gefundene Hälfte.

2) Suchet unter den Logarithmen der Sinusse denjenigen auf, der dem eben gefundenen Rest am nächsten kommt, und suchet den Logarithmus des dazu gehörigen Cosinus.

3) Diesen addiret zu der Hälfte des Logarithmen der grössern Zahl, und dupliret die Summe, nachdem zuvor

ihre

ihre Kennziffer um 10 vermindert worden. Dieſes Duplum iſt der geſuchte Logarithmus.

Es ſeyn die Zahlen 4099 und 1111.

1ſte Operat. Log. von 1111 = 3,0457140.
Die um 10 vermehrte Hälfte deſſelben 11,5228570.
Log. von 4099 = 3,6126779.
Die Hälfte deſſelben 1,8063390
Reſt 9,7165180

2te Operation.

Der gefundene Reſt 9,7165180 kommt am nächſten dem Logar. des Sinus von 31°22′. Der Logarithmus des dazu gehörigen Coſinus iſt 9,9313835.

3te Operation.

Logar. des Coſ. von 31°22′ = 9,9313835
Hälfte des Logar. von 4099 = 1,8063390
Summe 11,7377225
— 10,
1,7377225
2
3,4754450 gefundene
Logar. der Differenz 4099 — 1111.

Anmerkung zu beyden Aufgaben.

Iſt der Logarithmus der Summen oder Differenzen der Quadratzahlen, Cubikzahlen u. ſ. w. zweyer Wurzeln zu finden, ſo multiplicirt man zuvörderſt die Logarithmen der Wurzeln mit dem Exponenten der gegebenen Dignitäten, und verfährt alsdenn übrigens nach allen dreyen angezeigten Operationen.

Fünfter Abschnitt.

Von dem trigonometrischen Calcul.

(Da der im vorhergehenden Abschnitt erklärte logarithmische Calcul hauptsächlich zum Behuf des trigonometrischen erfunden worden ist, und wir in der Folge der Hülfe dieses lezstern bey gewissen Fällen bedürfen werden: so ist solches die Ursache, warum ich den trigonometrischen Calcul allhier kürzlich einschalte, obgleich derselbe sonsten kein Progreßionalcalcul ist.)

§. 119.

Der trigonometrische Calcul ist auf den Gebrauch gewisser Linien gegründet, vermittelst welcher man aus drey gegebenen Stücken eines Triangels, worunter allezeit eine Seite seyn muß, die drey übrigen finden kann. Diese Linien heissen Sinusse, Tangenten und Secanten ꝛc.; und die Stücke oder Bestandtheile eines Triangels sind drey Seiten und drey Winkel. Wenn sich nun unter den gegebenen Theilen oder Stücken eines Triangels allezeit eine Seite befinden muß: so sind die Fälle, wobey der trigonometrische Calcul statt findet, folgende:

1) wenn eine Seite und zwey Winkel bekannt sind;
2) wenn zwey Seiten und ein Winkel, und
3) wenn alle drey Seiten bekannt sind.

§. 120.

Die Peripherie eines Zirkels wird in 360 Grade, jeder Grad in 60 Minuten, jede Minute in 60 Secunden, u. s. w. und folglich jeder Halbzirkel in 180 Grade, und jeder Quadrant in 90 Grade eingetheilet. So wie nun die Seiten eines geradelinichten Triangels nach Ruthen, Schuhen, Zollen und Linien auf einem Maaßstabe gemessen werden: so werden die geradelinichten Winkel, auf dem Papier, vermittelst eines Halbzirkels oder Transporteurs gemessen, und man saget, daß ein Winkel so viel Grade, oder Grade und Minuten hat, als der Bogen eines Zirkels enthält, dessen Center in der Spitze des Winkels lieget, und dessen Endpunkte

punkte in die Schenkel deſſelben fallen. Es iſt alſo ein Bogen das Maaß eines Winkels, und es iſt einerley, ob dieſer Bogen mit einem kleinern oder gröſſern Radius gezogen wird, und folglich ob er nahe an der Winkelſpitze oder weit davon ab ſtehet. Z. E. wenn der Winkel x oder BAC bey Fig. 4. Tab. XL. iſt = 45° nach dem Bogen CB, ſo iſt er es auch nach dem Bogen DE oder GF.

Erſte Anmerkung.

Die Grade, Minuten und Secunden werden wie die Ruthen, Schuhe, Zolle und Linien durch 0, I, II u. ſ. w. gezeichnet. Alſo wird ein Winkel von 45 Graden, 30 Minuten und 20 Secunden durch 45°, 30′, 20″; und eine Seitengröſſe von 12 Ruthen 9 Fuß und 5 Zoll durch 12^I 9^II 5^III geſchrieben, oder ſchlechtweg durch 1295″, wenn vom Decimalmaaß die Rede iſt.

Zweyte Anmerkung.

Ein Winkel pfleget auf dreyerley verſchiedne Art bezeichnet zu werden, als 1) mit einem Buchſtaben auſſerhalb der beyden Schenkel, wie z. E. bey Fig. 6. Tab. XL der Winkel von 53°, 8′ mit A, oder der von 36°, 52′ mit C bezeichnet iſt; 2) mit drey Buchſtaben, von welchen der mittelſte allezeit die Spitze des Winkels andeutet. So kann z. E. der vorige Winkel A von 53°, 8′ bey Fig. 6. Tab. XL durch BAC oder CAB, aber nicht durch BCA oder CBA bezeichnet werden; und der vorige Winkel C von 36°, 52′ kann durch ACB, oder BCA, aber nicht durch ABC oder BAC bezeichnet werden, 3) mit einem der kleinern Buchſtaben x, y, z, m, n, r, o u. ſ. w. innerhalb der beyden Schenkel. Auf dieſe Art iſt bey Fig. 4. Tab. XL der Winkel von 45° mit einem x bemerket worden.

§. 121.

Es ſey der Zirkel bey Fig. 1. Tab. XLIII. nun nach Anleitung der in ſelbigem gezogenen Linien die trigonometriſchen Linien und andere zu ihrer mehrern Einſicht nöthige Kunſtwörter zu erklären.

1) Sinus rectus eines Bogens oder Winkels, welcher durch dieſen Bogen gemeſſen wird. Man nennet ihn insgemein ſchlechtweg Sinus, (welches Wort durch Eckmaaßlinie überſetzet wird,) und verſtehet

ſtehet darunter eine Perpendikuläre, welche man aus dem einen Ende eines Bogens, womit man einen Winkel ausmißt, auf denjenigen Diameter des Zirkels ziehe, welcher durch das andere Ende des Bogens geht. Es ſey bey Fig. 1. Tab. XLIII. der Winkel ECB oder y, welcher durch den Bogen EB ausgemeſſen werden ſoll. Wenn nun aus dem Endpunkt E dieſes Bogens die Perpendikuläre EG auf den Diameter BCA gezogen wird: ſo iſt dieſe Perpendikuläre EG der Sinus des Bogens EB oder des Winkels y. Es ſey ferner der Winkel x oder DCE, welcher durch den Bogen DE ausgemeſſen werden ſoll. Wenn nun aus dem Endpunkt E dieſes Bogens die Perpendikuläre EF auf den Diameter DCM gezogen wird: ſo iſt dieſe Perpendikuläre EF der Sinus des Bogens DE oder des Winkels x. Von dem Bogen DB oder AD iſt alſo die Linie DC der Sinus. Da nun dieſe Linie der **Radius**, folglich der **größte** unter allen Sinuſſen iſt, und alle Radien einander gleich ſind: ſo wird der Radius überhaupt der **Sinus totus** oder **maximus** genennet.

Anmerkung.

Eine Sehne oder Chorde heiſſet jede gerade Linie, welche von dem einen Endpunkt eines Bogens bis zu dem andern Endpunkt gezogen, und deswegen auch eine Subtenſa oder untergeſpannte Linie genennet wird. Wenn man auf die Conſtruction eines Sinus acht giebet, ſo wird man finden, daß ſelbiger eine ſolche halbe Sehne iſt. So iſt z. E. der Sinus EG die Hälfte der Sehne EK, und der Sinus EF iſt die Hälfte der Sehne EL. Dieſer Umſtand iſt der Folge wegen zu merken.

2) **Tangente** oder **Streiflinie** eines Bogens oder Winkels. Man verſtehet hierdurch allhier eine gerade Linie, welche aus einem Endpunkt des Bogens gegen den durch eben dieſen Punkt gehenden Diameter perpendikulär gezogen, und bis zu dem durch den andern Endpunkt des Bogens gehenden verlängerten Schenkel des Winkels fortgeführ-

ret

ret wird. Man wird dieſe Eigenſchaften bey der Linie BH, welche die Tangente des Bogens BE oder des Winkels y iſt, finden, indem ſie aus dem Punkt B des Bogens BE, perpendikulär gegen den Diameter BCA, gezogen und von dem einen Schenkel CB des Winkels y nach dem verlängerten andern Schenkel CE fortgeführet worden. Die Tangente hat ihren Nahmen davon, daß ſie allezeit den Zirkel in einem Punkt, welcher daher der **Berührungspunkt** genennet wird, berühret oder ſtreift, als allhier bey B.

3) **Secante.** Man bezeichnet mit dieſem Nahmen überhaupt jede gerade Linie, durch welche eine krumme durchſchnitten wird, und allhier beſonders diejenige, welche aus dem Mittelpunkt eines Zirkels durch das Ende eines Bogens bis an die Tangente deſſelben gezogen wird. Auf dieſe Art iſt die Linie CH die Secante des Bogens BE oder des Winkels y, und die Linie CI iſt die Secante des Bogens ED oder des Winkels x.

4) **Sinus verſus oder Querſinus.** Man nennet alſo denjenigen Theil des Diameters, welcher zwiſchen einem Bogen und ſeinem Sinus lieget, und eine Sehne in der Mitte durchſchneidet, wie die Linie BG oder DF. Anſtatt Sinus verſus ſaget man auch **Pfeil oder Bolzen**, (ſagitta).

5) **Complement oder Supplement**, das iſt **Ausfüllung oder Ergänzung.** Wenn man die beyden Bogen DE und EB zuſammen nimmt, ſo findet man, daß ſie beyde einen Quadranten machen, und alſo 90° enthalten, ſo wie gegentheils die beyden Bogen AE und EB zuſammengenommen einen Halbzirkel machen, und alſo 180° enthalten. Da man nun in ſolchen Fällen das, was einem Bogen mangelt, um entweder 90° oder 180° zu machen, an dem andern Bogen findet: ſo wird der eine Bogen daher das **Complement oder Supplement** des andern genennet,

net, und ist also z. E. der Bogen BE das Complement des Bogens ED zu 90°, oder umgekehrt DE ist das Complement des Bogens EB; so wie der Bogen BE das Complement zu 180° des Bogens EA ist; oder umgekehrt, der Bogen AE ist das Complement zu 180° des Bogens EB. Dieses auf die Winkel appliciret, da ein Bogen das Maaß eines Winkels ist, so ist der durch den Bogen BE ausgemeßne Winkel BCE oder y der Complementswinkel des durch den Bogen ED ausgemeßnen Winkels ECD oder x, oder umgekehrt, x ist der Complementswinkel von y; und so ist ferner der Winkel ECB oder y der Complementswinkel von dem Winkel ECA, oder umgekehrt, der Winkel ECA ist der Complementswinkel von ECB. Es kann vermittelst dieses Umstandes also ein Winkel aus seinem Complementswinkel gefunden werden. Z. E. um die Größe des stumpfen Winkels ACE zu finden, darf man nur den scharfen Winkel ECB suchen; und um die Größe des scharfen Winkels DCE oder x zu finden, darf man nur den scharfen Winkel ECB oder y suchen, und umgekehrt. Wenn nun jeder der beyden Winkel seinen eigenen Sinus, und seine eigene Tangente und Secante ꝛc. hat: so muß nothwendig der Sinus des einen Winkels der Sinus des Complements des andern Winkels seyn; und die Tangente des einen Winkels muß die Tangente des Complements des andern Winkels seyn, u. s. w. Hierdurch entstehen die relativischen Benennungen der trigonometrischen Linien von Sinus und Cosinus; Tangente und Cotangente, Secante und Cosecante, Sinus versus und Cosinus versus, welche man bey folgenden Nummern mit mehrerm erkläret finden wird.

6) Cosinus, ingleichen Complements- oder Nebensinus. Mit diesem Nahmen wird jeder Sinus eines Bogens oder Winkels, der mit einem andern Bogen

oder

oder Winkel 90° oder einen rechten Winkel machet, bezeichnet. Auf diese Weise ist der Sinus GE des Bogens BE oder des Winkels y der Cosinus des Bogens ED oder des Winkels x; und umgekehrt, FE ist der Cosinus des Bogens EB oder des Winkels y.

7) **Cotangente**, ingleichen **Complements- oder Nebentangente.** Also nennet man die Tangente eines Bogens oder Winkels, welcher mit einem andern Bogen oder Winkel 90° oder einen rechten Winkel machet; und auf diese Art ist die Tangente BH des Winkels y oder des Bogens BE die Cotangente des Winkels x oder des Bogens ED, und umgekehrt, die Tangente DI des Winkels x ist die Cotangente des Winkels y.

8) **Cosecante**, ingleichen **Complements- oder Nebensecante.** Hierdurch verstehet man die Secante eines Winkels oder Bogens, welcher mit einem andern Winkel oder Bogen 90° oder einen rechten Winkel machet. Auf diese Art ist die Secante CH des Bogens BE oder des Winkels y die Cosecante des Bogens ED oder des Winkels x; und umgekehrt die Secante CI des Bogens DE, oder des Winkels x, ist die Cosecante von y.

9) **Der Cosinus versus oder Quercosinus.** So wie die Linie BG der Sinus versus des Bogens BE oder des Winkels y ist, so ist die Linie DF der Sinus versus des Bogens ED oder des Winkels x. Jede dieser Linien formiret gegen die andere einen Cosinus versus, und also ist BG der Cosinus versus von dem Winkel x, und DF ist der Cosinus versus von dem Winkel y.

§. 122.

Da die Sinusse, Tangenten und Secanten ein unveränderliches Verhältniß gegen den Radius oder Sinus totus haben, so nimmt man selbigen für den Maaßstab an, nach welchem man die Grössen der drey erstern Linien und deren

Complemente beſtimmet. Um dieſes auf eine bequeme Art bewirken zu können, hat man ihm die Zahl 1 mit ſieben Nullen vermehret, oder 10 Millionentheile zugeeignet, und ſowohl in ſimpeln als logarithmiſchen Zahlen das Verhältniß der andern trigonometriſchen Linien gegen dieſen Sinus totus oder Radius, von dem Winkel einer Minute an bis zu einem Winkel von 45°, nebſt ihren Complementen, durch Hülfe der Geometrie in Tabellen berechnet. Zu mehrerer Bequemlichkeit ſind dieſe unter dem Titel *Tabulæ Sinuum & Tangentium* bekannte Tabellen dergeſtalt geordnet worden, daß die Sinuſſe und Coſinuſſe, Tangenten und Cotangenten, Secanten und Coſecanten allezeit gegen einander über ſtehen.

Anmerkung.

Die Logarithmen der Secanten werden in den gewöhnlichen Tabellen, dergleichen die Vlacqſchen, Ozanamſchen und Wolfiſchen ꝛc. ſind, nicht gefunden, ſo wenig als die ſimpeln und logarithmiſchen Zahlen der Querſinuſſe, weil man die einen Triangel betreffenden Aufgaben durch die bloſſen Sinuſſe und Tangenten auflöſen kann. Wer indeſſen mit den Logarithmen der Secanten rechnen will, der findet ſolche in dem zweyten Theile des Wolfiſchen Lexici, ſo wie die Zahlen für die Querſinuſſe in den Tabellen des Maginus.

§. 123.

Damit wir die trigonometriſchen Tabellen nicht bloß mechaniſch brauchen mögen, ſo will ich durch einige Aufgaben zeigen, wie ſolche berechnet werden können. Denn nachdem ſie einmal und mit erſtaunlicher Mühe berechnet worden, und in allen Buchläden fertig zu haben ſind, ſo würde es ſehr unnöthig ſeyn, dieſe Arbeit im Ganzen aufs neue unternehmen zu wollen. Es iſt aber unter den verſchiedenen Berechnungsarten der trigonometriſchen Linien immer die eine bequemer als die andere, und ich mache den Anfang mit der allerunbequemſten. Selbige beſteht in dem Gebrauch des Maaßſtabs und des Transporteurs. Es iſt nemlich die Zahl 10000000 des Radius für unſern tauſendtheiligen Maaßſtab zu groß, und wollen wir eine mindere

dere Zahl nehmen, so werden wir die Längen der verlangten Linien nicht prăcis genug bekommen. Da es aber allhier bloß darauf ankömmt, uns von der Art der Berechnung dieser Längen einen Begriff zu machen: so wollen wir, jedoch nur für die erste Aufgabe, die Zahl 10000000 auf 1000 reduciren.

(1.) Vermittelst des Maaßstabes und Transporteurs den Sinus von 60° zu finden. §. 124.

1) Beschreibet bey Fig. 1. Tab. XLIII. mit Hülfe des Transporteurs einen Winkel DCE oder x von 60°, und lasset aus dem Endpunkt E des Bogens ED die Perpendikuläre EF auf den Radius DC fallen, welche der Sinus von dem Winkel x oder dem Bogen ED seyn wird. 2) Verfertiget auf einer Linie, welche dem Radius CD oder CE gleich ist, einen Maaßstab von 1000 Theilen, und traget auf selbigen den Sinus EF: so wird derselbe 866 solcher Tausendtheile enthalten. Die gefundenen Zahlen des Sinus von 60° sind also = 866 gegen einen Radius oder Sinus totus von 1000.

Erste Anmerkung.

Wenn man die Tangente DI des Winkels x dem vorigen Maaßstab unterwirft, so wird selbige nicht allein die 1000 Theile desselben ganz, sondern annoch 732 solcher Tausendtheile darüber enthalten, und also 1732 groß seyn; und wenn man die Secante CI nach eben diesem Maaßstabe untersuchet, so wird solche doppelt so groß als der Maaßstab, und also von 2000 befunden werden.

Zweyte Anmerkung.

Will man den Sinus 30°, als den Cosinus von 60° haben: so messe man die Perpendikuläre EG, welche den Sinus des Bogens EB oder des Winkels y von 30° machet, und 500 groß ist; und auf eben diese Art wird die Cotangente BH von 577, und die Cosecante CH von 1154 befunden werden.

Wenn man in die trigonometrischen Tabellen einen Blick wirft, so wird man finden, daß die Zahlen der vorhergehenden Linien mit ihren drey oder vier ersten Ziffern just

die hier entwickelten Zahlen geben. Z. E. der Sinus von 60° ist allhier 866, und in den Tabellen 8660254, u. s. w.

(II.) Durch Hülfe der regulären Vielecke einen Sinus, z. E.

α) Den Sinus von 30° auszurechnen. §. 125.

Es ist im §. 121 in der Anmerkung zum Sinus rectus gesaget worden, daß ein jeder Sinus die Hälfte einer Sehne ist. Es kömmt also darauf an, einen Bogen zu finden, dessen halbe Sehne dem verlangten Sinus gleich ist, und dieses wird geschehen, wenn die Bogenzahl des verlangten Sinus dupliret, mit dem Duplo in die Peripherie 360 eines Zirkels dividiret, und die Sehne des durch den Quotienten gefundenen Polygons halbiret wird. Wir nehmen diese Operation mit der Zahl 30 des verlangten Sinus vor, als $30 \times 2 = 60$, und $\frac{360}{60} = 6$. Der Quotient 6 bezeichnet also die Sehne eines Sechseckes. Wenn nun, vermöge der Geometrie, die Sehne AB eines regulären Sechseckes, Fig. 2. Tab. XXXVI. dem Radius AC oder CB eines Zirkels gleich ist, so brauchen wir, da der Radius oder Sinus totus zu 10000000 angenommen worden, nur diese Zahl zu halbiren, kömmt 5000000 für die halbe Sehne AD oder BD des Sechsecks, als für den Sinus eines Winkels n oder o von 30°.

β) Den Sinus von 45° zu finden. §. 126.

Wenn wir nach voriger Art verfahren, und mit dem Duplo von 45, das ist mit 90 in die Peripherie des Zirkels dividiren: so kömmt die Zahl 4 zum Quotienten, wodurch also ein Viereck bezeichnet wird. Beschreibet also das reguläre Viereck bey Fig. 5. Tab. XL, und da von dieser Figur bekannt ist, daß wenn in selbiger zwey unter einem rechten Winkel sich durchschneidende Diameter aus den Spitzen gezogen werden, solche sich in vier rechtwinklichte Triangel auflöset: so machen wir uns zur Berechnung der Hypotenuse, deren Hälfte uns den Sinus von 45° geben wird, indem die Hypotenusen die Sehnen des Viereckes machen, einen gewissen

issen pythagorischen Lehrsatz zu Nutz. Dieser Lehrsatz ist, aß das Quadrat der Hypotenuse eines rechtwink- chten Triangels gleich ist den Quadraten der bey- en Catheten zusammengenommen. Z. E. wenn die ypotenuse = 5, der größere Cathetus = 4 und der klei- ere = 3 ist: so ist $5^2 = 4^2 + 3^2$, oder $5 \times 5 = 25$ ist leich $16 + 9$, und 16 kömmt aus 4×4, und 9 aus 3×3. Wir haben also nur die Größe der beyden Catheten AC und CB zu suchen, und diese ist leicht gefunden, indem sowohl AC als CB dem Radius des Zirkels gleich ist. Also) quadriret den Radius oder Sinus totus 10000000 ür den Cathetus AC. 2) Quadriret ferner den Radius 0000000 für den Cathetus CB. 3) Addiret die Qua- rate, und extrahiret die Quadratwurzel; welche die Größe er Hypotenuse AB, und in D halbiret, den Sinus für 45° eben wird. Man sehe folgende Vorstellung.

$AC^2 = 10000000 \times 10000000 = 100000000000000$
$CB^2 = 10000000 \times 10000000 = 100000000000000$

$\sqrt{200000000000000}$

2) 14142136

7071068 Sinus von 45°.

γ) Den Sinus von 18° zu finden. §. 127.

Wenn wir mit $18 \times 2 = 36$ in 360 dividiren, so ömmt der Quotient 10, welcher ein Zehneck bezeichnet. Es st also das Verhältniß der Sehne eines Zehnecks gegen den Radius zu suchen. Dieses weiset die Geometrie vermittelst es Lehrsatzes nach, daß sich die Seite eines Zehnecks oder die Sehne eines Bogens von 36° gegen den Radius eines Zirkels verhält, wie der größere Theil eines nach seinem äussersten und mittelsten Verhält- niß getheilten Radius gegen den Radius selbst. Es sey bey Fig. 4. Tab. XXXIV. eine Linie AB. 1) Setzet solche mit der Linie AC, von gleicher Größe mit AB, winkel- recht zusammen. 2) Halbiret AC in D; ziehet die Trans-

verſallinie DB, und traget die Länge DB aus D in E. 3) Setzet den Zirkel in A, und reiſſet mit der Weite AE den Bogen EF: ſo iſt die gegebene Linie AB in dem Punkt F dergeſtalt getheilet worden, daß ſich der kleinere Theil FB gegen den gröſſern FA verhält, wie der größere Theil AF gegen die ganze Linie AB. Wir wollen die gegebene Linie AB = 64 annehmen. Wenn nun das Quadrat von 64 zu dem Quadrat der Hälfte 32 addiret; aus der Summe die Quadratwurzel gezogen, und die Hälfte 32 davon abgezogen wird: ſo kömmt die Zahl 40 für die Länge der Linie AF, und wenn das Quadrat von 40 mit der Linie AB = 64 dividiret wird: ſo kömmt die Länge der Linie FB mit 25. Alſo AB = 64: AF = 40: FB = 25, wovon der Exponent $1\frac{1}{7}$ iſt. Man ſehe folgende Ausarbeitung.

AB $64^2 = 4096$ $40^2 = 1600$

$\frac{1}{2}$ AB $32^2 = 1024$

$\sqrt{5120}$

72

$\frac{1}{2}$ AB = 32 ſubtr. und $\frac{1600}{64} = 25$ Größe der Linie FB.

40 Die Größe der Linie AF.

So wie nun die Länge der kleinern Linie FB die Seite zu einem Zehneck giebet, wenn mit dem Radius AF oder AE aus dem Center A der Bogen EF zu einem ganzen Zirkel ausgezogen wird: ſo giebet die Länge der größern Linie AF ebenfalls die Seite zu einem Zehneck, wenn mit dem Radius AB, welches die gegebene Linie iſt, aus A der äuſſerſte Zirkel gezogen wird. Wenn wir nun den vorigen Calcul bey gegenwärtiger Aufgabe anwenden, und zu dem Quadrat des Radius 10000000 das Quadrat des halben Radius 5000000 addiren; aus dem Collect die Quadratwurzel ziehen, und von der Quadratwurzel den halben Radius ſubtrahiren: ſo kömmt für die Länge der Linie AF, welche die Seite des Zehnecks oder die Sehne zu einem Bogen von 36° giebet, die Zahl 6180339, welche halbiret den Sinus von 18° mit 3090169 giebet.

d) **Aus dem gegebenen Sinus EG eines Bogens von 30° den Cosinus dieses Bogens, oder den Sinus Complem. zu 30°, das ist den Sinus von 60° zu finden.** Tab. XLIII. Fig. 1.

§. 128.

Der gegebene Sinus von EG laufft mit FC parallel, so wie der verlangte Cosinus EF mit GC, dergestalt, daß diese vier Linien ein Parallelogramm EFCG formiren. Wenn nun solches durch den Radius CE in zwey gleiche und ähnliche Hälften getheilet wird: so entstehen dadurch die beyden gleichen rechtwinklichten Triangel GCE und CEF, an welchem leztern der Radius CE = 10000000 die Hypotenuse, und der gegebene Sinus EG = 5000000 den einen Cathetus formiret. Das aufgegebne Problem wird also durch den pythagorischen Lehrsatz (§. 126.) aufgelöset, und der verlangte Cosinus EF oder der Sinus von 60° gefunden, wenn das Quadrat des gegebnen Sinus EG von dem Quadrat des Radius CE abgezogen, und aus dem Rest die Quadratwurzel extrahiret wird, welche alsdenn mit 8660254 den Cosinus EF von 30° giebet, wie man aus folgender Vorstellung siehet:

□ Rad. oder Sin. tot. CE = 10000000^2 = 100000000000000

□ Sinus EG 30° = 5000000^2 = 25000000000000

Sin. Compl. zu 30°, oder Sin. 60° = $\sqrt{\frac{75000000000000}{8660254}}$

e) **Einen Sinus versus, und Cosinus versus zu berechnen.** §. 129.

Suchet zu dem Sinus rectus des Bogens des gegebenen Sinus versus den Cosinus rectus, und subtrahiret denselben von dem Sinus totus. Der Rest giebet den Sinus versus. Z. E.

Den Sinus versus BG eines Bogens BE von 30° zu berechnen. Fig. 1. Tab. XLIII.

Sin. tot. 10000000
Cosin. rect. EF 8660254
1339746 Der gefundne Sinus vers. BG.

vermöge vorigen Problems.

Den Sinus versus DF eines Bogens DE von 60° zu berechnen. Fig. 1. Tab. XLIII.

Sin. tot. 10000000
Cosin. rect. 5000000
5000000 Der gefundne Sinus versus DF.

EG vermöge vorigen Problems.

Im erſten Falle iſt der Coſinus verſus BG des Sinus verſus DF, und im leztern der Coſinus verſus DF des Sinus verſus BG gefunden worden.

(III.) Die Tangente und Cotangente eines gegebnen Bogens oder Winkels zu finden. §. 130.

Die Auflöſung dieſes Problems ſetzet als bekannt voraus den Sinus und Coſinus des gegebenen Bogens oder Winkels. Z. E. es ſey der Winkel x oder der Bogen ED von 60° bey Fig. 1. Tab. XLIII. deſſen Tangente DI verlanget wird. Saget nach der Regel de tri: wie der Coſinus EG zu dem Sinus FE des gegebnen Bogens ED: ſo der Sinus totus CD zur verlangten Tangente DI. Wenn nun der Sinus FE des gegebnen Bogens ED 60° = 8660254, und der Coſinus deſſelben oder der Sinus EG des Nebenbogens EB 30° = 5 00000: ſo iſt Sin. tot.

5000000 : 8660254 = 10000000

8660254

5000000) 86602540000000 (17320508. Die gefundene Tangente von 60°.

Kehret den Proceß um, und ſaget: Wie der Coſinus FE zu dem Sinus EG eines gegebenen Bogens BE von 30°: ſo der Sinus totus CB zur verlangten Tangente BH, ſo kömmt die Cotangente von DI, als:

8660254 : 5000000 = 10000000

5000000

8660254) 50000000000000 (5773503. Die gefundene Tangente BH von 30°, als Cotangente von 60°.

(IV.) Die Secante und Coſecante eines gegebenen Bogens oder Winkels zu finden. Fig. 1. Tab. XLIII. §. 131.

Z. E. die Secante CI des Bogens DE von 60° zu finden, ſaget: Wie

ie der Cosinus EG zum Sinus totus CD: so der Sinus to- s CE zur Secante CI. Wenn nun der Cosinus EG des ge- bnen Bogens DE 60°, wie bereits bekannt ist, = 5000000: heisset es:

5000000 : 10000000 = 10000000

10000000

5000000) 100000000000000 (20000000. Die gefundne Secante CI des Bogens DE von 60°.

aget itzo: wie der Cosinus EF zum Sinus totus BC: so r Sinus totus CE zur Secante CH, so kömmt die Cose- nte von CI, als:

8660254 : 10000000 = 10000000

10000000

8660254) 100000000000000 (11547005. Die gefundne Secante CH von 30°, als Cosecante von 60°.

§. 132.

Vorhergehende Regeln sind nun einige von denen, ch welchen die Sinusse, und aus ihnen die übrigen tri- onometrischen Linien, wie gezeiget worden, gefunden wer- n können. Wer über diesen Calcul einen vollständigen nterricht verlanget, wird solchen in Benjamin Ursinus nd Mag. Merkleins trigonometrischen Schriften, wie uch in Wolfens Elementis trigonometriae finden, als us welchen Werken, wenn die trigonometrischen Tabellen urch einen Zufall verlohren giengen, solche völlig wieder- ergestellet werden könnten. Ich wende mich nunmehr zum Gebrauch der durch vorige Berechnungen gefund- en trigonometrischen Linien. Da alle Triangel ent- eder recht- oder schiefwinklicht*) sind, und man entweder ie Winkel oder die Seiten der Triangel suchet: so haben ir viererley Hauptfälle abzuhandeln, als einen von Be-

*) Man begreifft unter diesem Nahmen alle Triangel, unter deren dreyen Winkeln kein rechter ist.

rechnung der Winkel und einen andern von Berechnung der Seiten eines rechtwinklichten Triangels; einen dritten von Berechnung der Winkel und einen vierten von Berechnung der Seiten eines schiefwinklichten Triangels. Zur Vorbereitung mögen folgende Lehrsätze vorangehen.

(I.) So viele gleiche Winkel ein Triangel hat, so viele gleiche Seiten hat derselbe; und umgekehrt, so viele gleiche Seiten ein Triangel hat, so viele gleiche Winkel hat derselbe. Hieraus folget α) daß in jedem gleichseitigen oder regulären Triangel alle drey Winkel; und β) in jedem gleichschenklichten, sowohl rechts- als scharfwinklichten Triangel zwey gleiche Winkel; und γ) in einem ungleichseitigen Triangel drey ungleiche Winkel seyn müssen.

(II.) Jeder rechter Winkel muß 90° enthalten. Alle Winkel unter 90° sind scharfe Winkel, und alle über 90° sind stumpfe Winkel.

(III.) In jedem Triangel, von was für einer Art er sey, machen alle drey Winkel zusammengenommen 180°. Hieraus folget, α) daß in keinem Triangel mehr als ein rechter, und noch weniger mehr als ein stumpfer Winkel seyn kann. Es müssen also in jedem Triangel zwey scharfe Winkel seyn, weil sonst ihre Summe mehr als 180° betragen würde. β) daß in einem gleichseitigen Dreyeck jeder Winkel just 60° enthält; γ) daß in einem rechtwinklichten gleichschenklichten Triangel jeder der beyden scharfen Winkeln 45° halten muß; δ) daß in einem scharfwinklichten gleichschenklichten Triangel die Gleichheit der beyden Winkel an der Grundlinie auf vielerley Art möglich ist; ε) daß, wenn der Inhalt zweyer Winkel bekannt ist, der Inhalt des dritten durch die Subtraction der Summe der beyden bekannten Winkel von 180° gefunden wird. Z. E. in einem Triangel enthält der eine Winkel 40° und der andere 60°. Wenn nun $40+60=100$, und $180-100=80$: so ist der dritte Winkel $=80°$.

Da

Da in einem rechtwinklichten Triangel der rechte Winkel beständig 90° ist: so brauchet man also allhier nur den einen scharfen Winkel zu wissen, und solchen, da $2 \times 90 = 180$, nur von 90 abzuziehen. ζ) daß man von einem gleichschenklichten Triangel nur einen Winkel zu wissen braucht, um sofort die beyden übrigen zu finden. Ist der Winkel an der Grundlinie gegeben, und dieser z. E. = 40: so ziehet sein Duplum 80 von 180 ab, bleibt 100 für den Winkel an der Spitze. Ist der Winkel an der Spitze gegeben, und dieser z. E. = 100; so subtrahiret ihn von 180, und halbiret den Rest 80; kömmt 40 für jeden der beyden gleichen Winkel.

(IV.) Die Seiten eines jeden Triangels verhalten sich wie die Sinusse der ihnen gegenüber stehenden Winkel.

Es sey bey Fig. 6. Tab. XXXVII. der in einem Zirkel beschriebene Triangel ABC, in welchem durch die auf den Seiten AC und CB perpendikulär stehenden Radien HG und HF, sowohl jene Seiten als ihre Bogen AC und CB in zwey gleiche Theile zerschnitten worden, wodurch CD zum Sinus des Bogens CF oder des Winkels n, und CE zum Sinus des Bogens CG oder des Winkels o wird. Wenn sich nun die ganzen Größen gegen einander verhalten, wie ihre Hälften: so muß CA : CB = CE : CD, indem $CD = \frac{1}{2}CB$, und $CE = \frac{1}{2}CA$, und folglich CB : CA = Sin. n : Sin. o. Ferner ist vermöge eines gewissen geometrischen Lehrsatzes der Winkel o = dem Winkel B, und der Winkel n dem Winkel A, und also CB : CA = Sin. A : Sin. B.

Der eben genennte Lehrsatz ist: **daß ein Centerwinkel zweymal so groß ist, als ein Peripheriewinkel**, der mit ihm auf einem oder gleichgrossen Bogen steht. Man verstehet aber durch **Centerwinkel** einen Winkel, der mit der Spitze das Center und mit den beyden Schenkeln die **Peripherie** berühret; und durch einen **Peripheriewinkel** einen

einen solchen, der sowohl mit der Spitze als den beyden Schenkeln die Peripherie berühret. Z. E. der Winkel GHF ist ein Centerwinkel, und sowohl der Winkel CBA, als der Winkel BAC ist ein Peripheriewinkel. Wenn nun n und o zwey gleiche Hälften von H sind: so muß n ohne Zweifel = A und o = B seyn. Von allem diesen kann man durch Ansetzung eines Transporteurs eine praktische Bestätigung erhalten, indem der stumpfe Winkel H oder GHF 120°, und jeder der beyden scharfen Winkel o und n, so wie B und A, 60° enthalten wird.

Erster Artikel.

Die Winkel eines rechtwinklichten Triangels zu berechnen.

§. 133.

(I.) Aus der Grundlinie CB und dem Cathetus BA die beyden scharfen Winkel A und C zu finden *). Es sey aber CB = 19°6′ und BA = 14°7′. Fig. 6. Tab. XL.

Erste Auflösung.

Wenn die Grundlinie CB für den Radius genommen, und mit selbigem aus dem unbekannten Winkel C der Bogen BD gezogen wird: so ist BA die Tangente des Winkels C. Schliesset also nach der Regel de tri: Wie die Grundlinie CB als ein Radius von 196 zur Tangente BA = 147: so der Radius oder Sinus totus in den trigonometrischen Tabellen zur kommenden Tangente des Winkels C in den Tabellen, als:

CB

*) Da in allen rechtwinklichten Triangeln ein gewisser unveränderlicher Winkel ist, nemlich der rechte von 90°: so brauchen niemals mehr als zwey Stücke, so wie hier, gegeben zu werden.

CB BA Sinus tot. Tangente des Winkels C.

196 : 147 = 10000000 : x

10000000

1470000000

196) 7500000 Tangente des Winkels C von 36°, 52′.

Wenn der gefundne ſcharfe Winkel C = 36°, 52′ von 90° abgezogen wird: ſo bleiben 53°, 8′ für die Gröſſe des ſcharfen Winkels A zurück, ſo wie man ſolches auch aus den Tabellen, auf der gegenüber ſtehenden Seite unter den Complementwinkeln, ſehen wird.

Erſte Anmerkung.

Die vermittelſt der Regel de tri gefundne Tangente 7500000 ſtimmet nicht völlig mit der in den Tabellen befindlichen, welche für 36°, 52′ aus nicht mehr als 7499119 beſteht. Es iſt alſo der Winkel C durch die angegebnen Grade und Minuten nicht völlig erſchöpfet worden, ſondern es ſind annoch Secunden damit verknüpfet. Es wird in der Folge, zum Ende des vierten Artikels in einem Anhang gezeiget werden, wie man dieſe Secunden berechnet, und man wird alsdenn finden, daß der Winkel C aus 36°, 52′, 12″, und der Winkel A folglich nur aus 53°, 7′, 48″ beſtehet, und daß folglich der erſtere um 12 Secunden gröſſer, der leztere aber um 12 Secunden kleiner iſt, als er allhier herausgebracht worden. Es wird aber in der Geometrie auf ſolche kleine Differenz, wenigſtens nicht in allen Fällen, kein Bedacht genommen.

Zweyte Anmerkung.

Laſſet uns ſehen, wie vorhergehendes Exempel logarithmiſch berechnet werden kann. Es kömmt dabey auf nichts weiter an, als 1) daß man die Logarithmen der Seitenzahlen in den ſimpeln logarithmiſchen Tabellen ſuchet; 2) daß man die Logarithmen der Winkel in den trigonometriſchen Tabellen ſuchet, und zwar nach Beſchaffenheit der Aufgabe, entweder unter den Sinuſſen, Tangenten oder Secanten, wenn man die leztern in Logarithmen hat; und 3) daß man dem Logarithmen des Radius 10000000 die Kennziffer 10 vorſetzet, ſo wie er ſolche ſeit der erſten Art der Berechnung der trigonometriſchen Linien erhalten, ob er gleich, da er in den gewöhnlichen Handtabellen nur zu 10 Millionen

nen angenommen wird, und also nur aus acht Ziffern besteht, die Kennziffer 7 vor sich haben sollte. — Die Auflösung des vorhergehenden Problems ist auf folgenden Satz gegründet:

CB 196 : BA 147 = Sin. tot. 10000000 : Tangente des Winkels C.

Wenn nun der Logarithmus von CB 196 = 2,2922561; der von BA 147 = 2,1673173, und der für den Sinus totus = 10,0000000: so stehet das Exempel also:

Logar.	Sin. tot.	10,0000000
Logar.	BA	2,1673173
		12,1673173
Logar.	CB	2,2922561
		9,8750612. Logar. der Tangente des Winkels C von 36°, 52′.

Zweyte Auflösung.

Wenn man den Cathetus AB für den Radius nimmt: so wird die Grundlinie BC die Tangente des Winkels A, wie man erfähret, wenn man mit AB, aus dem Winkel A, den Bogen BE beschreibet. Saget also:

AB 147 : BC 196 = Sin. tot. 10000000 : Tang. von 53°, 8′ für den allhier zuerst kommenden Winkel A, welcher von 90° abgezogen, den Complementwinkel C mit 36°, 52′ hinterlässet.

(II.) Aus der Grundlinie BC und der Hypotenuse CA die beyden scharfen Winkel A und C zu finden. Es sey aber BC = 196, und CA = 245. Tab. XL. Fig. 6. §. 134.

Erste Auflösung.

Wenn die Grundlinie BC für den Radius oder Sinus totus genommen, und mit selbiger aus dem Winkel C der Bogen BD gerissen wird: so ist CA die Secante des Winkels C. Schliesset also: wie die Linie BC zur Linie CA, so der Sinus totus zur kommenden Secante des Winkels C, als:

BC 196 : CA 245 = Sin. tot. 10000000 : x
Logar. 2,2922561 — 2,3891661 = 10,0000000
2,3891661
12,3891661
2,2922561
10,0969100 Secante von 36°, 52 für den Winkel C, welcher von 90° abgezogen, den Complementwinkel A mit 53°, 8′ hinterläſſet.

Zweyte Auflöſung.

Wenn man die Hypotenuſe AC = 245 für den Radius annimmt, und mit ſelbigem aus dem Winkel A einen Bogen GCF beſchreibet, Tab. XL. Fig. 6. ſo wird die Linie CB = 196 ein Sinus, und der Winkel A kömmt zuerſt. Saget:

AC 245 : CB 196 = Sin. totus : Sinus von 53°, 8′ für den Winkel A, welcher von 90° abgezogen, das Complement 36°, 52′ für den Winkel C zurücke läſſet.

III.) Aus dem Cathetus AB = 147, und der Hypotenuſe CA = 245 die beyden ſcharfen Winkel A und C zu finden. Tab. XL. Fig. 6. §. 135.

Erſte Auflöſung.

Saget: wie die Hypotenuſe CA zu dem Cathetus AB: ſo der Sinus totus zu dem kommenden Sinus des Winkels von C, als:

CA 245 : AB 147 = Sinus totus : x.
Logar. 2,3891661 — 2,1673173 = 10,0000000
2,1673173
12,1673173
2,3891661
9,7781512 Logar. des Sinus von 36°, 52′ für den Winkel C, welcher von 90° abgezogen, den Winkel A mit 53°, 8′ hinterläſſet.

Zweyte

Zweyte Auflösung.

Wenn mit verändertem Proceß, der Cathetus AB für den Sinustotus, und die Hypotenuse AC für die Secante genommen wird: so kömmt der Winkel A zuerst, als:

AB 147 : AC 245 = Sinus totus : Secante des Winkels A von 53°, 8, welcher von 90° abgezogen, den Complementswinkel 36°, 52′ für C zurücke lässet.

Zweyter Artikel.

Die Seiten eines rechtwinklichten Triangels zu berechnen.

§. 136.

(I.) Aus der Grundlinie BC = 196 und dem ihr anliegenden Winkel C = 36°, 52′ die Länge des Cathetus BA zu finden. Tab. XL. Fig. 6.

Wenn man mit der bekannten Linie BC aus dem bekannten Winkel C einen Bogen BD beschreibet: so findet man, daß die verlangte Linie BA eine Tangente ist. Saget also: Wie der Sinus totus zur Grundlinie BC = 196: so die Tangente des Winkels C von 36°, 52′ zum Cathetus BA.

Sinus totus: BC 196 = Tang. Anguli C 36°, 52′.

Log. 10,0000000 — 2,2922561 = 9,8750102

2,2922561

12,1672663

10,0000000

2,1672663 Logarithmus von 147 für die Länge des Cathetus BA.

(II.) Aus

(II.) Aus der Grundlinie BC = 196, und dem anliegenden Winkel C von 36°, 52′ die Größe der Hypotenuſe AC zu finden. §. 137. Tab. XL. Fig. 6.

Wenn man mit der gegebnen Linie BC aus dem gegebnen Winkel C einen Bogen BD beſchreibet: ſo findet man, daß die verlangte Linie CA eine Secante iſt. Saget alſo: wie der Sinus totus zur Grundlinie BC = 196: ſo die Secante des Winkels C von 36°, 52′ zur Hypotenuſe CA, als:

Sinus totus : BC 196 = Sec.d.W. C36°,52′ : CA
Log. 10,0000000 — 2,2922561 = 10,0968916 — Log.x

2,2922561

12,3891477
10,0000000

2,3891477 Logar. von 245 für die Größe der Hypotenuſe AC.

(II.) Aus dem Cathetus BA = 147, und dem anliegenden Winkel A von 53°, 8′ die Länge der Grundlinie BC zu finden. Tab. XL. Fig. 6. §. 138.

Wenn man mit der bekannten Linie BA aus dem bekannten Winkel A einen Bogen BE beſchreibet: ſo findet man, daß die unbekannte Linie BC eine Tangente iſt. Alſo: wie der Sinus totus zum Cathetus BA = 147: ſo die Tangente des Winkels A 53°, 8′ zur Grundlinie BC, als:

Sinus totus : BA = Tang.d.W. A 53°,8′ : Grundlinie BC
10000000 : 147 = 13334900 : 196.

Man kann das Exempel in Logarithmen nachrechnen.

(V.) Aus dem Cathetus BA = 147, und dem anliegenden Winkel A von 53°, 8′ die Hypotenuſe AC zu finden. Tab. XL. Fig. 6. §. 139.

Wenn man mit der bekannten Linie BA aus dem ebenbekannten Winkel A einen Bogen BE beſchreibet: ſo

findet man, daß die unbekannte Linie AC eine Secante ist. Also: wie der Sinus totus zum Cathetus BA = 147: so die Secante des Winkels A von 53°, 8′ zur Hypotenuse AC, als:

Sinus totus BA Sec. d. Wink. A 53°, 8′ AC
10000000 : 147 = 16667920 : 245, Länge der Hypotenuse.

(V.) Aus der Hypotenuse AC = 245 und dem anliegenden Winkel A von 53°, 8′ die Größe der Grundlinie BC zu finden. §. 140. Tab. XL. Fig. 6.

Wenn man mit der gegebnen Linie AC aus dem bekannten Winkel A einen Bogen GCF ziehet: so findet man, daß die unbekannte umgangene Linie BC ein Sinus ist. Also: wie der Sinus totus zur Hypotenuse AC = 245: so der Sinus des Winkels A von 53°, 8′ zur Grundlinie BC, als:

Sinus totus AC Sin. d. W. A 53°, 8 BC
10000000 : 245 = 8000338 : 196 Länge der Grundlinie BC.

(VI.) Aus der Hypotenuse AC = 245, und dem anliegenden Winkel C von 36°, 52′ die Größe der Grundlinie BC zu finden. Tab. §. 141. XL. Fig. 6.

Wenn man mit der gegebnen Linie AC, aus dem anliegenden bekannten Winkel C einen Bogen HAI ziehet: so findet man, daß die verlangte Linie BC ein Cosinus von C oder der Sinus von A ist. Also:

Sin. tot. AC Cos. d. W. C 36°, 52. BC
10000000 : 245 = 8000338 : 196 Länge der Grundlinie BC.

(VII) Aus der Hypotenuse AC = 245, und dem anliegenden Winkel C von 36°, 52′ die Größe des Cathetus BA zu finden. Tab. XL. Fig. 6. §. 142.

Wenn man mit der bekannten Linie AC aus dem gegebnen Winkel C einen Bogen AHI ziehet, und BC bey B verlängert:

ängert: so findet man, daß die verlangte Linie BA der Sinus des Winkels C ist. Saget also: wie der Sinus tos us zur Hypotenuse AC = 245: so der Sinus des Win eis C von 36°, 52 gegen den Cathetus BA, als:

Sin. tot. AC = Sin. d. W. C 36°, 52 : BA
10000000 : 245 = 5999549 : 147 gefundne Größe des Cathetus BA.

(VIII.) Aus der Hypotenuse AC = 245, und dem anliegenden Winkel A von 53°, 8′ die Größe des Cathetus BA zu finden. Tab. §. 143. XL. Fig. 6.

Wenn man mit der bekannten Linie AC, aus dem gleichfalls bekannten Winkel A einen Bogen GCF ziehet: so findet man, daß die unbekannte Linie BA ein Cosinus von A oder der Sinus von C ist. Also:

Sin. tot. AC Cos. d. W. A 53°, 8′ BA
10000000 : 245 = 5999549 : 147 Länge des Cathetus BA.

Anmerkung.

Ich übergehe die hier noch möglichen Fälle, indem sie sich aus den vorhergehenden mit leichter Mühe analogisch auflösen lassen.

Dritter Artikel.

Die Winkel eines schiefwinklichten Triangels zu berechnen.

(I.) Aus zwey gegebenen Seiten AC und CB eines scharfwinklichten Triangels ABC und einem, einer dieser Seiten gegenüber stehenden Winkel BAC, die beyden andern Winkel zu finden. Tab. XXXIX. Fig. 4. §. 144.

Es sey aber AC = 84, BC = 75 und der Winkel A = 61°, 56′.

α) Saget: wie die Seite BC zu dem Sinus des gegenüber stehenden Winkels A: so die Seite AC zum Sinus ihres gegenüber stehenden Winkels B, als:

BC 75 : Sin.d.W.A 61°, 56′ = AC 84 Sin.B

Log. 1,8750613 — 9,9456659 = 1,9242793 L.S.B

9,9456659

11,8699452

1,8750613

9,9948839.

Logarithm. des Sinus für den Winkel B = 81°, 12′.

β) Addiret den gefundnen Winkel B von 81°, 12′ zu dem gegebnen A 61°, 56′; kömmt 143°, 8′ und ziehet diese Summe von der Summe zweyer rechter Winkel = 180° ab; bleibt 36°, 52′ für den Winkel C. Die drey Winkel des gegebnen Triangels sind also A 61°, 56′; B 81°, 12′ und C 36°, 52′.

(II.) Aus zwey gegebnen Seiten BA und AC eines scharfwinklichten Triangels ABC und dem von selbigen eingeschloßnen Winkel BAC die beyden andern Winkel zu finden. §. 145. Tab. XXXIX. Fig. 4.

Es sey aber BA = 51, AC = 84 und der Winkel BAC = 61°, 56′. Saget: Wie die Summe der beyden Seiten zu ihrer Differenz: so die Tangente der halben Summe der zu findenden Winkel zur Tangente ihrer halben Differenz, als:

1) Summiret die beyden Seiten BA und AC, und berechnet ihre Differenz, als:

BA = 51	AC = 84
AC = 84	BA = 51
Summe 135	Differenz 33

2) Ziehet den gegebnen Winkel A 61°, 56′ von 180° ab. Der Rest 118°, 4′ giebet die Summe der beyden zu findenden Winkel. Halbiret den Rest, und suchet die Tangente dazu, als:

180°

180°
61°, 56′ der gegebne Winkel A.
2) 118°, 4′ Summe der beyden zu findenden Winkel;
59°, 2′ halbe Summe derselben. Die Tangente von 59°, 2′ ist in Logarithmen 10,2217988.

3) Setzet nach obigem Unterricht die vermittelst der beyden vorhergehenden Operationen gefundnen drey Posten in die Regul de tri, als:

Sume 135 : Differenz 33 = Tang. v. 59, 2′ : L. d. W.
Log. 2,1303338 — 1,5185139 = 10,2217988 — L. d. T.

1,5185139
11,7403127
2,1303338
9,6099789. Logar. der Tangente von 22°, 10′.

4) Addiret die gefundnen 22°, 10′ zu der vermittelst der zweyten Operation gefundnen halben Summe 59°, 2′ der beyden zu findenden Winkel B und C; kömmt 81°, 12′ für den größern Winkel B oder ABC. 5) Subtrahiret die gefundnen 22°, 10′ von der bekannten halben Summe 59°, 2′; bleiben 36°, 52′ für den kleinern Winkel C oder ACB.

Anmerkung.

Wenn die beyden Seiten AB = 51, und BC = 75, nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel B gegeben werden, so werden die beyden andern Winkel auf ähnliche Art gefunden, wie man aus folgenden Operationen siehet.

1ste Operat. AB = 51 BC = 75
BC = 75 AB = 51
Summe 126 Differenz 24

2te Operat. 180°
— 81°, 12′
2) 98°, 48′
49°, 24′ halbe Summe der beyden zu findenden Winkel. Die Tangente von 49°, 24′ ist in Logarithmen 10,0669666.

3te Op. Summe 126 : Differenz 24 = Tang. von 49°,24′ : T. d. h. D.
Log. 2,1003705 — 1,3802112 = 10,0669666 — log. d. T.

1,3802112
11,4471778
2,1003705
9,3468073. Logar. der Tangente von 12°,32′

4te Oper. 49°,24′ + 12°,32′ = 61°,56′ Größe des Winkels A.

5te Oper. 49°,24′ — 12°,32′ = 36°,52′ Größe des Winkels C.

(III.) Aus drey gegebenen Seiten eines scharfwinklichten Triangels ABC die drey Winkel zu finden. Tab. XXXIX. Fig. 4. §. 146.

Es sey aber AB = 51, BC = 75 und AC = 84.

1) Lasset aus der Spitze B die Perpendikuläre BD fallen, wodurch der schiefwinklichte Triangel ABC in die beyden rechtwinklichten ABD und BDC zergliedert wird. 2) Subtrahiret das Quadrat der Seite BC von den summirten Quadraten der Seiten AB und AC, als:

AB 51² = 2601
AC 84² = 7056
9657
BC 75² = 5625
4032 Rest.

3) Dividiret mit dem Duplo der Seite AC in den Rest der vorigen Operation, als AC 84 × 2 = 168.

$\frac{4032}{168} = 24$, Quotient, welcher die Länge des Stückes AD von der Linie AC, oder die Basin AD des rechtwinklichten Triangels ABD giebet.

4) Saget wie die Seite AB = 51 zu dem Sinus totus: so die Linie AD = 24 zu dem kommenden Sinus, als:

AB : Sinus totus = AD : Sinus von 28°,4′
51 : 10000000 = 24 : 4705882

5) Sub-

5) Subtrahiret den gefundnen Winkel 28°, 4′ von 90°, bleiben 61°, 56′ für den Winkel A.

6) Saget: Wie die Seite BC = 75 zum Sinus des gefundnen Winkels A von 61°, 56′: so die Seite AC = 84 zu dem Sinus des Winkels B, als:

BC : Sin.d.W. A 61°,56′	=	AC : Sin.	81°,12′	des Win-
75 : 8824007	=	84 : 9882887		kels B.

7) Addiret den Winkel A = 61°, 56′ zu dem Winkel B = 81°, 12′, und ziehet die Summe 143°, 8′ von 180° ab, bleiben 36°, 52′ für den Winkel C. Die durch die gegebnen drey Seiten 51, 75 und 84 gefundnen drey Winkel sind also der Winkel A = 61°, 56′; der Winkel B = 81°, 12′ und der Winkel C = 36°, 52′.

(IV.) Aus zwey gegebnen Seiten AB und BC eines stumpfwinklichten Triangels ABC, und einem, einer dieser Seiten gegenüber stehenden Winkel C oder ACB die beyden andern Winkel zu finden. Tab. XXXIX. Fig. 5. §. 147.

Es sey aber AB = 80, BC = 50, und der stumpfe Winkel C = 116°, 2′.

Da der Sinus eines stumpfen Winkels dem Sinus des scharfen Winkels, der sein Complement zu 180° machet, gleich ist: so wird, anstatt des in den Tabellen nicht befindlichen Sinus von 116°, 2′, der Sinus des Complementwinkels, welcher mit ihm 180° machet, und also der Sinus von 63°, 58′ genommen und gesaget: wie die Seite AB = 80 zu dem Sinus des Complementwinkels 63°, 58′: so die Seite BC = 50 zu dem kommenden Sinus für den Winkel A, als:

AB 80 : Sinus	63°,58′	=	BC 50 : Sin.	A.
Log. 1,9030900 —	9,9535369	=	1,6989700	L.S.A.

9,9535369
11,6525069
1,9030900
9,7494169 Log. vom Sinus 34°, 10′ für den Winkel A.

Addiret den gefundnen scharfen Winkel A von 34°, 10′ zu dem gegebnen stumpfen Winkel C von 116°, 2′, kömmt 150°, 12′, und subtrahiret diese Summe von 180°; bleibt 29°, 48″ für den scharfen Winkel B.

(V.) Aus zwey gegebnen Seiten AB = 80 und BC = 50 eines stumpfwinklichten Triangels ABC und dem von selbigen eingeschloßnen Winkel B von 29°, 48′ die beyden andern Winkel zu finden. Tab. XXXIX. §. 148. Fig. 5.

Diese Aufgabe wird wie die bey (II.) dieses dritten Artikels aufgelöset. Also:

1) Summiret die beyden Seiten AB und BC, und berechnet ihre Differenz, als:

AB = 80	AB = 80
BC = 50	BC = 50
Summe 130	Differenz 30

2) Ziehet den gegebnen Winkel B = 29°, 48′ von 180° ab. Der Rest 150°, 12′ giebet die Summe der beyden zu findenden Winkel. Halbiret den Rest; kömmt 75°, 6′, und suchet die Tangente von 75°, 6′; ist in Logarithmen = 10,5749887.

3) Seßet die durch vorhergehende zwey Operationen gefundnen Posten in die Regel de tri, als:

Summe 130 : Differenz 30 = Tang. von 75°, 6′ :
Log. 2,1139433 — 1,4771212 = 10,5749887
1,4771212
12,0521099
2,1139433
9,9381666 Log. der Tangente von 40°, 56′.

4) Addiret die gefundnen 40°, 56′ zu der vermittelst der zweyten Operation gefundnen halben Summe 75°, 6′ der beyden zu findenden Winkel A und C; kömmt 116°, 2′ für den

n stumpfen Winkel C. ° 5) Subtrahiret die gefundnen °, 56′ von der bekannten halben Summe 75°, 6′; bleiben °, 10′ für den Winkel A.

VI.) Aus drey gegebnen Seiten eines stumpfwinklichten Triangels ABC die drey Winkel zu finden. Fig. 5. Tab. XXXIX. §. 149.

Es sey aber AB = 80, BC = 50, und AC $44\frac{25}{100}$.

1) Lasset aus der Spitze B die Perpendikuläre BD fallen, und verlängert die Linie AC in D, wodurch der rechtwinklichte Triangel DBC entsteht. 2) Subtrahiret die summirten Quadrate der Seiten AC und BC von dem Quadrat der Seite AB, als:

AC	$(44\frac{25}{100})^2 = 1958$ (*)	AB	$80^2 = 6400$
BC	$50^2 = 2500$		4458
	4458		1942 Rest.

2) Dividiret mit dem Duplo der Seite AC in den Rest der vorigen Operation, als AC $44\frac{25}{100} \times 2 = 88\frac{50}{100}$, und $\frac{1942}{88\frac{50}{100}} = 21\frac{94}{100}$. Dieser Quotient giebet die Basin DC des rechtwinklichten Triangels DCB.

3) Saget: wie die Seite BC 50 zu dem Sinus totus des rechten Winkels D: so die Linie DC $= 21\frac{94}{100}$ zu dem kommenden Sinus.

(*) Dieses Quadrat wird nach demjenigen, was §. 57 gelehret worden, gefunden, wenn der unreine Bruch $44\frac{25}{100} = 44\frac{1}{4}$ in den reinen $\frac{177}{4}$ verwandelt, sowohl der Zähler 177 als Nenner 4 quadriret, und mit dem Quadrate des Nenners 4 in das Quadrat des Zählers 177 dividiret wird, als

$177^2 = 31329$

$4^2 = 16)$ 1958 das gefundne Quadrat von $44\frac{25}{100}$.

BC 50 Sin. tot. ° DC $21\frac{24}{100}$(*)
Log. 1,6989700 — 10,0000000 = 1,3412366
10,0000000
11,3412366
1,6989700
9,6422666. Logar. des Sinus 26°, 2′.

4) Subtrahiret den gefundnen Winkel 26°, 2′ von 90°; bleibt 63°, 58′ für den Winkel BCD; und subtrahiret diesen Winkel wiederum von 180°; kömmt 116°, 2′ für den stumpfen Winkel C, nemlich ACB.

5) Saget: wie die Seite AB = 80 zum Sinus des gefundnen Winkels ACB = 116°, 2′: so die Seite BC = 50 zu dem Sinus des Winkels A. Weil aber kein Sinus von 116°, 2′ in den Tabellen befindlich ist: so wird der Complementswinkel 63°, 58′ genommen, als welcher übrig bleibt, wenn 116°, 2′ von 180° abgezogen wird. Also:

AB 80 : Sinus 63°, 58′ = BC 50:
Log. 1,9030900 — 9,9535369 = 1,6989700
9,9535369
11,6525069
1,9030900
9,7494169. Log. des Sinus von 34°, 10′ für den Winkel A, oder BAC.

6) Addiret den Winkel A 34°, 10′
zu dem Winkel C 116°, 2′
150°, 12′

und ziehet die Summe 150°, 12′ von 180′ ab; bleibt 29°, 48′ für den Winkel B oder ABC. Die durch die gegebenen drey Seiten 80, 50 und $44\frac{24}{100}$ gefundnen drey Winkel

*) Für den Bruch $21\frac{24}{100}$ wird der Logarithmus der ganzen Zahl 2194 mit der Kennziffer des Logarithmus der Zahl 21 genommen, nach demjenigen was §. 107 gelehret worden.

sind demnach der Winkel A = 34°, 10′; der Winkel = 25°, 48′, und der Winkel C = 116°, 2′.

Vierter Artikel.

Die Seiten eines schiefwinklichten Triangels zu berechnen.

.) Aus zwey gegebnen Winkeln und einer Seite eines scharfwinklichten Triangels ABC die beyden andern Seiten zu finden. Fig. 4. §. 150. Tab. XXXIX.

Es seyn die beyden Winkel BAC = 61°, 56′ und CA 36°, 52′, und die Seite AC = 84.

1) Ziehet die Summe 98°, 48′ der beyden gegebnen inkel 36°, 52′ und 61°, 56′ von 180° ab; bleibt 81°, 12′ den Winkel B, und saget:

Wie der Sinus des Winkels B von 81°, 12′ zu der geönen Seite AC = 84: so der Sinus des Winkels C von °, 52′ zu der Seite AB, als:

Sin. 81°, 12′, Ang. B: AC 84 = Sin. 36°, 52′ Ang. C: AB
9. 9.9948573 — 1,9242793 = 9,7781186 — Log. AB
1,9242793
11,7023979
9 9948573
1,7075406. Logar. von 51 für die Seite AB.

2) Saget ferner: Wie der Sinus 36°, 52′ zur gefundn Seite AB = 51: so der Sinus 61°, 56′ des Winkels zur Seite BC, als:

Sin. 36°, 52′ : AB 51 = Sin. 61°, 56′ : BC
ogar. 9,7781186 — 1,7075702 = 9,9456659 - Log. BC
1,7075702
11,6532361
9,7781186
1,8751175 Logar. von 75 für die Seite BC.

Die

Die beyden gefundnen Seiten sind also AB = 51, und BC = 75.

(II.) Aus zwey gegebnen Seiten und einem Winkel eines scharfwinklichten Triangels ABC die dritte Seite zu finden. Tab. §. 151. XXXIX. Fig. 4.

Es sey die Seite AC = 84, die Seite CB = 75, und der der Seite CB gegenüberstehende Winkel A oder CAB von 61°, 56′.

1) Suchet nach Anleitung der 1sten Aufgabe des dritten Artikels den Winkel C oder ACB. Selbiger ist 36°, 52′. 2) Saget: wie der Sinus des Winkels A von 61°, 56′ zu der gegenüber stehenden Seite CB von 75: so der Sinus des Winkels C zu der gegenüber stehenden Seite AB, als:

Sin. Wink. A 61°, 56′ : CB 75 = Sin. Wink. C 36°, 52′ : AB

Log. 9,9456659 — 1,8750613 = 9,7781186 — Log. AB

1,8750613

11,6531799

9,9456659

1,7075140 Logar. von 51 für die dritte Seite AB.

(III.) Aus zwey gegebnen Winkeln und einer Seite eines stumpfwinklichten Triangels ABC die beyden andern Seiten zu finden. §. 152. Tab. XXXIX. Fig. 5.

Es sey der Winkel BAC 34°, 10′; der Winkel ACB 116°, 2′, und die Seite AC = $44\frac{21}{100}$.

1) Subtrahiret von 180° die Summe der beyden gegebnen Winkel 34°, 10′, und 116°, 2′; bleiben für den Winkel ABC 29°, 48′. 2) Saget: wie der Sinus des Winkels ABC von 29°, 48′ zur Seite AC von $44\frac{21}{100}$: so der Sinus des Winkels BAC von 34°, 10′ zu der kommenden Seite BC, als:

Sin.

Sin. 29°, 48′ : AC 44$\frac{2}{10}$ = Sin. 34°, 10′ : BC
Log. 9,6963336 – 1,6459133 = 9,7494287 Log. BC

1,6459133
11,5994520
9,6963336
1,9031184 Logar. von 80 für die Seite AB.

IV.) Aus zwey gegebnen Seiten und einem Winkel eines stumpfwinklichten Triangels ABC die dritte Seite zu finden. Tab. §. 153. XXXIX. Fig. 5.

Es seyn die beyden Seiten AB = 80, und BC = 50, nebst dem Winkel A von 34°, 10′.

1) Suchet den Winkel C und B, indem ihr saget: wie die Seite BC von 50 zu dem Sinus des Winkels A von 34°, 10′: so die Seite AB von 80 zu dem kommenden Sinus, mit welchem nach Anleitung der zweyten Operation ferner verfahren wird, als:

BC = 50 : Sin. A 43°, 10′ = AB 80 :
Log. 1,6989700 – 9,7494287 = 1,9030900

9,7494287
11,6525187
1,6989700
9,9535487 Log. Sinus von 63°, 58′.

2) Subtrahiret den gefundnen Winkel 63°, 58′ von 180°; bleiben 116°, 2′ für den stumpfen Winkel C; und subtrahiret den gegebnen Winkel A 34°, 10′ von 63°, 58′, bleiben 29°, 48′ für den Winkel B.

3) Saget: wie der Sinus des Winkels A von 34°, 10′ zur Seite BC = 50: so der Sinus des Winkels B von 29°, 48′ zur kommenden Seite AC, als:

Sin.

Sin. Wink. A 34°, 10′ : Seite BC 50 = Sin. Wink. B 29°, 48′ : AC
Log. 9,7494287 — 1,6989700 = 9,6503336 Log. AC

1,6989700
11,3953036
9,7494287
1,6458749 Log. von $44\frac{2}{1\,0\,0}$ für die Seite AC. Wenn der gekommene Logarithmus 1,6458749 unter der Kennziffer 3 gesuchet wird: so findet man, daß der ihm am nächsten kommende Logarithmus der von 3,6459133 ist, welcher 4425 gilt.

Anhang
zu den vier vorhergehenden Artikeln.
Die Secunden der Winkel zu finden.

§. 154.

Die Frage ist, entweder den Wehrt einer gegebenen trigonometrischen Zahl in Secunden aufzulösen, oder für eine gegebne Secunde die trigonometrische Zahl zu finden. Das erstere gehet nur den Triangel allein, das leztere alle Polygone an.

(I.) Den Wehrt einer gegebenen trigonometrischen Zahl in Secunden aufzulösen. Man wird sich erinnern, daß im ersten und zweyten Artikel dieses Abschnitts ein rechtwinklichter Triangel berechnet, und seine Grundlinie BC zu 196, der Cathetus BA zu 147, die Hypotenuse AC zu 245; der eine scharfe Winkel C zu 36°, 52′, und der andere A zu 53°, 8′ angegeben, aber auch zugleich bemerket worden, daß der erstere Winkel C um etwas zu klein, und der leztere A um eben soviel zu groß wäre. An dem einen fehlen also einige Secunden, und dem andern müssen solche abgenommen werden. Wir wollen die dem ersten fehlende Secunden suchen, und da der Winkel zu 36°, 52′ berechnet worden: so müssen diese Secunden zwischen

hen der um eine Einheit vermehrten, und verminderten Zahl
er Minuten, und also zwischen 36°, 53′ und 36°, 52′ ge-
chet werden. Ich will das Exempel der IIIten Aufgabe
es ersten Artikels, nach welchem der scharfe Winkel C aus
em Cathetus AB = 147 und aus der Hypotenuse AC = 245
efunden worden, zuvor hersetzen, als:

Hypoten. AC :	Cathet. AB	=	Sinus tot.
245	: 147	=	10000000

10000000

147 0000000 | 245

6000000

Sinuszahl des Winkels C = 36°, 52′.

Subtrahiret itzo von dem gefundnen Sinus 6000000
den in den Tabellen befindlichen kleinern 5999549

451 Erste Differenz.

Subtrahiret von dem zunächst folgenden
größern Sinus 6001876, von 36°, 53′,
den kleinern 5999549, von 36°, 52′

2327 Zweyte Differenz.

Weil nun eine Minute aus 60 Secunden besteht, so saget:

Zweyte Differ.	Eine Minute.	=	Erste Differenz.
2327	: 60″	=	451

60

27060 | 2327

11 1462/2327 und also bald 12″.

Der Winkel C wird also seyn von 36°, 52′, 12″. Diese von 90° abgezogen, kömmt für den Winkel A 53°, 7′, 48″.

Anmerkung.

Wenn man die Grösse des Winkels noch näher bestimmen will, und also annoch Terzen und Quarten ꝛc. verlanget: so muß der den Secunden, Terzen und Quarten ꝛc. anhängende Rest beständig aufs neue mit 60 multipliciret, und das Product

Product mit der zweyten Differenz dividiret werden. Z. E. der Winkel C bestehet nach dem vorhergehenden Calcul aus 36°, 52′, 11″$\frac{1463}{2327}$. Wenn nun mit den Secunden 11″ ein Rest von $\frac{1463}{2327}$ verknüpfet ist, welcher zeiget, daß annoch Terzen dazu gehören: so heisset es:

Zweyte Differ.		Eine Secunde		der Rest
2327	:	60‴	=	1463
				60
				87780

2327) 87780 (37‴ $\frac{1681}{2327}$,

und also bald 38‴.

Der Winkel C bestehet also aus 36°, 52′, 11″, 38‴. Es giebet aber der Rest $\frac{1681}{2327}$ zu erkennen, daß die Größe des Winkels noch nicht erschöpfet ist, und daß annoch Quarten dazu gehören. Es heisset demnach aufs neue:

Zweyte Differ.		Eine Terz.		Der Rest.
2327	:	60‴‴	=	1681
				60‴‴
				100860

2327) 100860 (43‴‴ $\frac{788}{2327}$

und der Winkel wird nunmehr aus 36°, 52′, 11″, 37‴, 43‴‴, das ist, aus 36 Graden, 52 Minuten, 11 Secunden, 37 Terzen und 43 Quarten bestehen. Auf vorhergehende Art kann nun der Calcul so lange fortgesetzet werden, bis zuletzt die Grösse des Winkels ohne Rest erscheinet, wiewohl dieses nicht in allen Fällen geschehen wird.

§. 155.

In vorhergehender Aufgabe ist der Winkel C mit simpeln trigonometrischen Zahlen berechnet worden. Wenn solches mit Logarithmen geschicht, so werden die Secunden auf eben die Art, als vorhin, gesuchet. Ich will zur Erläuterung des Calculs, das vorige Exempel beybehalten, als:

Hypoten. AC 245 : Cathet. AB 147 = Sin. tot. 10c00000
Log. 2,3891661 — 2,1673173 = 10,0000000

10,0000000
12,1673173
2,3891661

9,7781512 Logar. des Sinus 36°, 52′ für den Winkel C.

Subtra-

ubtrahiret itzo von dem gefundnen Logar. 9,7781512
den in den Tabellen befindlichen kleinern 9,7781186

326 Erste Differenz.

ubtrahiret von dem zunächst
folgenden größern Logar. 9,7782870 d. Sin. von 36°,53′
n in den Tabellen befindli-
chen kleinern 9,7781186 d. Sin. von 36°,52′

1684 Zweyte Differ.

Weil nun eine Minute aus 60 Secunden bestehet, so saget:
weyte Differ. Eine Minute. Erste Differenz. x
1684 : 60″ = 326 : x

60

19560

1684) 19560 (11″ $\frac{1016}{1684}$, und
also bald 12″.

er Winkel C ist also, wie vorhin, von 36°, 52′, 12″.

§. 156.

(II.) Für eine gegebne Secunde die trigonometrische Zahl zu finden. Die Zahlen der trigonometrischen Linien sind in allen gewöhnlichen Handtabellen in Grad und Minuten, aber nicht in Secunden ausgerechnet zu finden. Man muß die Secunden also suchen, und so wie ches in Ansehung der Sinusse geschicht, wird es auch Ansehung der Tangenten und Secanten verrichtet. Sir haben also nur ein einziges Exempel, und um dieses sto besser einzusehen, folgende kurze Vorbereitung nöthig.— s ist bekannt, 1) daß der Centerwinkel einer regulären gur gefunden wird, wenn man die Peripherie 360 eines rkels mit der Eck- oder Winkelzahl der Figur dividiret. E. wenn 360 für ein reguläres Zehneck mit 10 dividiet wird: so kömmt die Zahl 36° für die Größe des Centerinkels dieses Zehnecks. 2) Daß der Polygonwinkel ner regulären Figur gefunden wird, wenn man den Centerwinkel derselben von 180° abziehet. Z. E. wenn der vor-

hin gefundne Centerwinkel 36° eines regulären Zehnecks vo
180° abgezogen wird: so bleibet der Polygonwinkel 144
für dieses Zehneck zurück *). Es geschicht aber, daß wed
der Center- noch Polygonwinkel eines Vielecks allezeit i
ganzen Zahlen erscheinet. Z. E. der Centerwinkel eine
regulären Siebenecks ist $51\frac{3}{7}$, und der Polygonwinkel de
selben $128\frac{4}{7}$. Die Brüche solcher Winkel müssen also i
Minuten und Secunden gewürdiget werden **), und di
ses wird geschehen, wenn vermittelst der Regel de tri de
Zähler des Bruchs mit 60 multipliciret, und das Produ
mit dem Nenner getheilet wird. Es sey die Aufgabe: de
halben Centerwinkel eines regulären Siebenecks z
finden.

Der Centerwinkel eines regulären Siebenecks ist 51
$= \frac{360}{7}°$, und folglich der halbe Centerwinkel desselben 25
$= \frac{180}{7}$. Den Wehrt dieses Bruch $\frac{1}{7}$ zu bestimmen, saget
W

*) Oder man dividiret die Summe aller Winkel durch die Eckzal
der Figur, so kömmt auch der Polygonwinkel. Es wird ab
die Summe aller Winkel gefunden, wenn 180 durch die Ec
zahl der Figur multipliciret, und von dem Product die Za
360 abgezogen wird. Wir wollen zum Exempel den Polygo
winkel des Zehnecks suchen

180
10 Eckzahl
1800
360
1440 Summe aller Winkel.

Eckzahl der Figur 10) 144 der gesuchte Polygonwinkel. Die
letztere Auflösung ist sehr bequem, wenn m
einen Polygonwinkel zu halbiren hat.

**) Wenn der Bruch eines Winkels ist $= \frac{1}{2}$: so ist sein Wehrt leic
zu bestimmen, indem ein halber Grad just dreyßig Minut
enthält. Z. E. der Centerwinkel des regulären Achtecks ist $= 45$
Wenn nun $\frac{45}{2} = 22\frac{1}{2}$: so ist der Winkel des halben Centerwi
kels dieses Polygons 22°, 30′. Ferner, wenn der Centerwi
kel eines regulären Neuneckes ist $= 40$: so ist ein Drittheil de
selben $= 13\frac{1}{3}$. Es ist aber $\frac{1}{3}$ von $60 = 20$; und also ist de
Drittheil eines Centerwinkels dieses Polygons $= 13°, 20′$. u
so weiter.

ie der Nenner 7 zu 60, so der Zähler 5 zu der kommens
Zahl der Secunden, als:

$$7 : 60 = 5 : x$$

$$\frac{60}{7)\ 300}$$

$$42\frac{6}{7}$$

er halbe Centerwinkel des regulären Siebeneckes enthält
o 25°, 42′$\frac{6}{7}$; und um die trigonometrische Zahl für $\frac{6}{7}$ Mi-
ten, welches Secunden sind, zu finden, verfahret, wie
get:

§. 157.
Erste Manier.

1) Subtrahiret den Sinus 25°, 42′ von dem folgen-
höhern 25°, 43′. 2) Multipliciret die Differenz mit
n Zähler 6 des Bruchs $\frac{6}{7}$; 3) Dividiret das Product
rch den Nenner 7; und 4) addiret den Quotienten zu
n Sinus 25°, 42′, nach folgender Vorstellung:

Sinus 25°, 43′ = 4339212
Sinus 25°, 42′ = 4336591
2621 Differenz
6 der Zähler
15726
Der Nenner 7) 2246$\frac{4}{7}$; also beynahe 2247
Addirt den Sinus 25°, 42′ = 4336591
4338838 der
gesundne Sinus 25°, 42′$\frac{6}{7}$.

§. 158.
Zwepte Manier.

Man will wissen, was der Bruch $\frac{6}{7}$ Minuten eigent-
ch an Secunden giebet. Procediret, wie bey Auflö-
ng des Bruchs 25$\frac{1}{7}$ in 25°, 42′$\frac{6}{7}$. Multipliciret wiederum,
ch Anleitung der Regel de tri, den Zähler allhier 6 mit
, und dividiret das Product durch den Nenner 7, als:

$$7 : 60 = 6 : x$$

$$\frac{60}{360}$$

$$7)\frac{360}{51''\frac{3}{7}}.$$

Alsdenn kommen 25°, 42′, 51″$\frac{3}{7}$ (wovon die $\frac{3}{7}$ schon Terzen machen,) für den halben Centerwinkel des Siebenecks, und um den Wehrt davon in Sinuszahlen zu erhalten, muß zuvörderst, wie vorhin, die Differenz des Sinus 25°, 42′ und des höhern 25°, 43′ berechnet; nachhero aber gesaget werden: Wie 60 zu der Differenz 2621: so der Bruch 51″$\frac{3}{7}$ zu der kommenden Zahl der Secunden; und das Exempel stehet alsdenn folgendermassen:

Sinus 25°, 43′ = 4339212
Sinus 25°, 42′ = 4336591
2621 Differenz.

Ferner:

60″ : 2621 = 51″$\frac{3}{7}$: x

$\frac{51\frac{3}{7}}{2621}$

$\frac{13105}{133671}$

$\frac{1123\frac{2}{7}}{134794\frac{2}{7}}$

$60)\frac{134794\frac{2}{7}}{2246\frac{4}{7}}$ also bald 2247

$7)\frac{2621}{374\frac{3}{7}}$

$\frac{3}{1123\frac{2}{7}}$

Sinus von 25°, 42′ = 4336591
4338838 der gefundene Sinus von 25°, 42′, 51″$\frac{3}{7}$ wie vorhin.

§. 159.

Wir haben aus vorhergehender Aufgabe gesehen, wie man die Secunden in simpeln oder absoluten Zahlen berechnet. Will man solche nun in Logarithmen haben, so können sie entweder nach den bekannten Regeln gesuchet werden; da man denn z. E. für die Sinuszahl 4338838 des

s Winkels 25°, 42′, 51″$\frac{1}{7}$ den Logarithmus 6,6373733 essen Kennziffer nur mit 3 brauchet erhöhet und also in verwandelt zu werden *), finden wird; oder man kann, r Abkürzung der Arbeit, nach Anleitung der in den Ta- llen befindlichen Minutenlogarithmen, die Secundenlo- rithmen auf eben die Art suchen, als die simpeln Zahlen r Secunden vorhin gesuchet worden sind, wie man aus lgenden Exempeln, welche keiner weitern Erklärung be- rfen, sehen wird. Es soll aber der Logarithmus des Si- s 25°, 42′$\frac{6}{7}$ gesuchet werden.

ogar. Sin. 25°, 43′ = 9,6374108
. . . 25°, 42′ = 9,6371484

2624 Differenz
6 Der Zähler des Bruchs $\frac{6}{7}$.

er Nenner des Bruchs $\frac{6}{7}$ 7) 15744

2249$\frac{1}{7}$

gar. Sin. 25°, 42′ = 9,6371484

9,6373733 der gefundne Logarithmus des Sinus 25°, 42′$\frac{6}{7}$

Oder auf folgende Art, nach der vorhin bey §. 158. erklärten zweyten Manier. §. 160.

Es soll der Logarithmus des Sinus 25°, 42′, 51″$\frac{1}{7}$ ge- chet werden. Also:

ogar. Sin. 25°, 43′ = 9,6374108
. . . 25°, 42′ = 9,6371484

2624 Differenz.

*) Es hat mit den Kennziffern der Sinusse, Tangenten und Secanten verhältnißmäßig eben die Bewandtniß, als mit der Kennziffer 10 des Logarithmus für den Sinus totus, indem alle diese trigonometrische Zahlen durchgehends die Kennziffern ihrer ersten Berechnung beybehalten haben.

$60'' : 2624 = 51''\frac{3}{7}$

$51\frac{3}{7}$

2624	2624
13120	3
133824	7872
11247	1124
134948	
2249	

$60)\overline{134948\frac{4}{7}}$ $\quad 7)\overline{7872}$

$2249\frac{60}{420} = \frac{1}{7}$ $\quad 1124\frac{4}{7}$

9,5371484 Logar. des Sinus 25°, 42′

9,6373733 Der gefundne Logarithmus des Sinus 25°, 42′, 51″$\frac{3}{7}$ wie vorhin.

Sechster Abschnitt.

Von der harmonischen Progreßion.

§. 161.

Eine harmonische Progreßion ist, worinnen die Zahlen in einer stetigen harmonischen Proportion einander folgen, und eine harmonische Proportion, worinnen sich die Differenz des kleinsten und mittelsten Gliedes gegen die Differenz des mittelsten und größten verhält, wie das kleinste Glied gegen das größte. Eine solche Proportion ist in den Zahlen 10. 12. 15 enthalten, als: $12 - 10 : 15 - 12 = 10 : 15$, oder $10 - 12 : 12 - 15 = 10 : 15$, oder annoch deutlicher

$$-\frac{12 \cdot 15}{10 \cdot 12} \text{ und } 5)\frac{10 \cdot 15}{2 : 3} = 2 : 3$$

Differenzen.

Anmerkung.

Wenn die harmonische Proportion zwischen vier Zahlgrößen statt finden, und sie also unstetig seyn soll: so muß sich aufsteigend die Differenz des ersten und zweyten Gliedes gegen die

die Differenz des dritten und vierten verhalten, wie das erste Glied gegen das vierte. Wenn z. E. 2. 3. 6. 12, so ist

$$\frac{\begin{matrix}3 & 12\\ 2 & 6\end{matrix}}{1:6 =} \text{ und 2) } \frac{2 \cdot 12}{1:6} \text{ oder } 2-3:6-12=2:12.$$

§. 162.

Die bekanntern Eigenschaften der stetigen harmonischen Proportion sind:

1) Daß das Verhältniß zwischen den verkleinerten Producten des kleinsten Gliedes in das mittelste, und des mittelsten in das größte gleich ist dem Verhältniß des kleinsten und größten Gliedes. Z. E. wenn 2. 3. 6, so ist

$$\frac{\begin{matrix}2 \cdot 3\\ \times 3 \cdot \times 6\end{matrix}}{6) \frac{6:18}{1:3 =} \text{ und } 2) \frac{2:6}{1:3} \text{ oder } 2\times3:3\times6=2:6.}$$

2) Daß die Differenz des kleinsten und mittelsten Gliedes, zur Differenz des mittelsten und größten summiret, so groß als die Differenz des kleinsten und größten Gliedes ist. Z. E. wenn 2. 3. 6

Differenzen 1 3

so ist $1+3=4$, und $6-2=4$.

3) Daß die Summe der beyden äussersten Glieder, mit dem mittelsten multipliciret, dem Duplo des Products der beyden äussersten Glieder gleich ist. Z. E. es sey 2. 3. 6. Wenn nun $2+6=8$, und $8\times3=24$: so ist $2\times6=12$, und $2\times12=24$.

Verschiedene andere Eigenschaften werden in der Folge beygebracht werden. Ich gehe zu einigen Aufgaben fort.

1) Zu zwey gegebenen aufsteigenden Zahlen die dritte harmonische Proportionale zu finden. §. 163.

1) Subtrahiret die Differenz der beyden Zahlen von der ersten oder kleinsten. 2) Dividiret mit dem Rest in das

das Product der beyden Zahlen. Es seyn die beyden Zahlen 3 und 4: so ist

	4	3 kleinste Zahl	3
	3	1 Differenz	4
Differenz	1	2 Rest	12 Product
			2) 6 die gefundne

Also 3. 4. 6. dritte harmonische Proportionale.

Anmerkung.

In Ansehung der beyden gegebnen Zahlen ist zu merken, daß die Differenz derselben weder gröſſer als die kleinste der beyden Zahlen, noch derselben gleich seyn muß; indem im ersten Falle die Differenz nicht von der kleinsten Zahl subtrahiret werden kann, und im leztern Falle eine Null zum Rest kömmt, mit welcher man nicht dividiren kann. Wenn man z. E. die Zahlen 5 und 12 wählet, so kann ihre Differenz 7 nicht von 5 subtrahiret werden; und wählet man 6 und 12, so gehet ihre Differenz 6 gegen die kleinste der gegebnen Zahlen 6 auf, und man erhält keinen Divisor.

(II.) Zu zwey gegebenen absteigenden Zahlen die dritte harmonische Proportionale zu finden. §. 164.

1) Addiret die Differenz der beyden Zahlen zur ersten oder größten. 2) Dividiret mit dem Collect in das Product der beyden Zahlen. Es seyn die beyden Zahlen 12 und 6. Stehet also:

	12	12 größte Zahl.	12
	6	6 Differenz	6
	6 Differ.	18 Collect	18) 72 Product
			4 die gefundene

Also 12. 6. 4. dritte harmonische Proportionale.

(III.) Zwischen zwey gegebnen Zahlen die harmonische Mittelproportionale zu finden. §. 165.

Erste Auflösung.

Halbiret die Summe der beyden Zahlen, und dividiret mit dem Quotienten in das Product der beyden Zahlen.

Z. E.

E. wenn 4 und 12, oder 12 und 4 gegeben wird, so

12 + 4 = 16 Summe; 2) 16/8

12 × 4 = 48 Product; 8) 48/6 die gefundne Mittelproportionale

so 4. 6. 12, oder 12. 6. 4.

Zweyte Auflösung.

1) Multipliciret die Differenz der beyden Glieder mit n kleinsten Gliede. 2) Dividiret das Product durch die umme der beyden Glieder, und 3) addiret zum Quotien- das kleinste Glied. Es sey wiederum 4 und 12. Ste- also:

1) 12 − 4 = 8; 4 × 32 — 2) 12 + 4 = 16; 32/16 = 2 — 3) 2 Quotient, 4 das kleinste Glied, 6 die gefundene Mittelproportionale.

V.) Eine aufsteigende harmonische Progreßion zu formiren. §. 166.

Formiret, nach Anleitung der ersten Aufgabe, eine auf- igende harmonische Proportion, und wiederhohlet den Pro- , vermittelst wessen die dritte Zahl gefunden worden, an zweyten und dritten, um die vierte Proportionale zu den; an der dritten und vierten, um die fünfte Propor- nale zu finden, u. s. w. Die Operationen werden demnach gende seyn.

1) Nehmet zwey beliebige Zahlen, und subtrahiret die ifferenz derselben von der ersten oder kleinsten. 2) Divi- ret mit dem Rest in das Product der beyden Zahlen. Diese eyde Operationen geben die dritte harmonische ahl. 3) Subtrahiret die Differenz der zweyten und drit- n Zahl von der zweyten, und dividiret mit dem Rest in as Product der zweyten und dritten Zahl. Kömmt die ierte harmonische Zahl. 4) Verfahret auf ähnliche

Art mit der dritten und vierten Zahl, so kömmt die fünfte harmonische Zahl, und setzet den Proceß so lange fort, bis die Progreßion nicht weiter ausgedehnet werden kann; ein Umstand, der in der Folge erkläret werden wird. Es seyn die Zahlen 10. 12,

1. u. 2te Operat. 12 − 10 = 2 Differenz; 10 · 12 = 120; 120 : 8 = 15 die gefundene dritte harmonische Proportionale.

3te Operation 15 − 12 = 3; 15 · 12 = 180; 180 : 9 = 20 die gefundne vierte harmonische Proportionale.

Wenn nun auf ähnliche Art fortgefahren wird: so kömmt annoch die fünfte Zahl 30, und die sechste 60; daß also die ganze harmonische Progreßion aus 10. 12. 15. 20. 30. 60 bestehet, und weiter steiget diese Progreßion nicht.

(V.) Eine absteigende harmonische Progreßion zu formiren. §. 167.

Formiret, nach Anleitung der zweyten Aufgabe, eine absteigende harmonische Proportion, und wiederhohlet den Proceß, vermittelst wessen die dritte Zahl gefunden worden, an der zweyten und dritten; der dritten und vierten; der vierten und fünften, u. s. w. um die vierte, fünfte und sechste Proportionale, u. s. w. zu finden. Die Operationen werden demnach folgende seyn.

1) Nehmet zwey beliebige Zahlen und addiret ihre Differenz zur ersten oder größten Zahl. 2) Dividiret mit dem Collect in das Product der beyden Zahlen. Diese beyde Operationen geben die dritte harmonische Zahl.

3) Ad-

) Addiret die Differenz der zweyten und dritten Zahl zur weyten, und dividiret mit dem Collect in das Product der weyten und dritten Zahl. Kömmt die vierte harmoni-he Zahl. 4) Verfahret auf ähnliche Art mit der dritten nd vierten, mit der vierten und fünften, u. s. w. und setzet en Proceß so lange fort als gefällig ist. Es seyn die Zah-n 60 und 30.

. und 2te	60	60	60
Operat.	30	30	30
	30 Differ.	90 Collect	1800

90) 1800 (20 die gefundene dritte harmonische Zahl.

te Operat.	30	30	30
	20	10	20
	10 Differ.	40 Collect	600

40) 600 (15 die vierte harmonische Zahl.

Wenn nun auf ähnliche Art fortgefahren wird: so kömmt 2 für die fünfte, und 10 für die sechste harmonische Zahl. Die Progreßion wird also seyn 60. 30. 20. 15. 12. 10. Mit dieser Zahl 10 hören die ganzen Zahlen auf, und wenn e Progreßion weiter erstrecket werden soll, so kommen gebrochene Zahlen, und die siebente harmonische Zahl wird $8\frac{4}{7}$ seyn.

Anmerkung.

Wenn man keine gebrochne Zahlen in der Progreßion haben will, so brauchet man die Zahlen der Progreßion nur mit dem Nenner des Bruchs, allhier 7, zu multipliciren, so kommen 420. 210. 140. 105. 84. 70. 60
anstatt 60. 30. 20. 15. 12. 10. $8\frac{4}{7}$.

VI.) Ein jedes Glied einer harmonischen Progreßion aus den gegebenen beyden ersten zu finden, z. E. das sechste. §. 168.

1) Multipliciret die beyden ersten Glieder, und behal-t das Product. 2) Es sey n die Zahl des verlangten Glie-

des

des, alſo allhier 6. Multipliciret das erſte Glied mit n — 1, alſo allhier mit 5; und das zweyte Glied mit n — 2, alſo allhier mit 4. Ziehet das lezte Product von dem erſten ab. 3) Mit dem Reſt dividiret in das Product der erſten Operation. Es ſeyn die beyden erſten Glieder 10. 12; ſo iſt

1ſte Operat. $10 \times 12 = 120$
2te Operat. $10 \times 5 = 50$
$12 \times 4 = 48$
$50 - 48 = 2$
3te Operat. $\frac{120}{2} = 60$. Das gefundne ſechſte Glied.

§. 169.

Es iſt in der Anmerkung zur erſten Aufgabe geſaget worden, daß es nicht möglich iſt, aus zwey Zahlen, deren Differenz entweder größer als die kleinſte von beyden, oder nur der kleinſten Zahl gleich iſt, eine aufſteigende ſtetige harmoniſche Proportion hervorzubringen. Wir bemerken allhier, 1) daß, wenn die beyden lezten Zahlen einer aufſteigenden ſtetigen harmoniſchen Proportion in dem Falle jener zwey Zahlen ſind, dieſe Proportion in keine Progreßion verwandelt werden kann; und 2) daß, wenn die beyden lezten Zahlen einer aufſteigenden harmoniſchen Progreßion in dem Falle jener zwey Zahlen ſind, dieſe Progreßion nicht weiter fortgeführet werden kann. Vermöge dieſes Umſtandes kann die Proportion 2. 3. 6 nicht in eine Progreßion verwandelt, und die Progreßion 3. 4. 6. 12. nicht weiter ausgedehnet werden. Denn da dort die Differenz zwiſchen 3 und 6 der kleinſten Zahl 3 von beyden, und hier die Differenz zwiſchen 6 und 12 der kleinſten Zahl 6 gleich iſt: ſo bekömmt man eine Null zum Reſt, mit welcher in das Product der beyden Zahlen nicht dividiret, mithin nicht weiter operiret werden kann. Anders verhält es ſich mit einer fallenden harmoniſchen Progreßion, bey welcher nicht die geringſte Urſache vorhanden iſt, warum ſie nicht ins Unendliche fortgeführet werden könne, wenn auch gleich gebrochene

brochene Zahlen zu Hülfe genommen werden müſſen, welche aber, nach der Anmerkung zur fünften Aufgabe, durch Vervielfältigung der ganzen Progreßion mit dem Nenner der Brüche, in ganze Zahlen verwandelt werden können. Es flieſſet daher das Theorem: **daß jede harmoniſche Progreßion wohl unendlich kleiner, aber nicht unendlich gröſſer werden kann.**

§. 170.

Eine harmoniſche Progreßion mag ſteigend oder fallend ſeyn, ſo heiſſet ſie **vollſtändig**, wenn die beyden größten Zahlen ſich wie 1:2, oder 2:1 verhalten; z. E. die Progreßion 10. 12. 15. 20. 30. 60, oder fallend, 60. 30. 20. 15. 12. 10 iſt vollſtändig, weil die beyden größten Zahlen 30. 60 ſich wie 1:2 verhalten. In ſolcher vollſtändigen Progreßion iſt beſtändig der Quotient der beyden äuſſerſten Glieder der Quotität der Glieder gleich. Z. E. in 3. 4. 6. 12 ſind vier Glieder, und der Quotient von 3 in 12 iſt 4. Wenn der Quotient ſich nicht auf dieſe Art gegen die Quotität der Glieder verhält, ſo iſt die Progreßion unvollſtändig, z. E. 10. 12. 15. 20. Hier fehlen annoch die beyden Glieder 30 und 60.

Anmerkung.

Bey der Eigenſchaft der Vollſtändigkeit einer harmoniſchen Progreßion wird darauf kein Bedacht genommen, daß ſie unendlich kleiner werden kann.

§. 171.

Wenn man eine einfache arithmetiſche und eine harmoniſche Proportion gegen einander vergleichet, ſo findet man, daß von drey arithmetiſchen Proportionalen, das Product aus der erſten in die zweyte, ingleichen aus der erſten in die dritte, und endlich aus der zweyten in die dritte eine harmoniſche Proportion giebet. Es ſeyn z. E. die drey arithmetiſchen Proportionalen 2. 4. 6. Wenn nun $2 \times 4 = 8$, $2 \times 6 = 12$ und $4 \times 6 = 24$: ſo entſtehet daher die harmoniſch Proportion 8. 12. 24, oder durch die Reduction 2. 3. 6.

Es

Es iſt bey ſo bewandten Umſtänden möglich, nicht allein die arithmetiſche Progreßion zur Hervorbringung einer harmoniſchen anzuwenden, da die Progreßionen nichts anders als fortgeſetzte ſtetige Proportionen ſind, ſondern auch jede harmoniſche Progreßion auf eine einfache arithmetiſche Progreßion zurück zu führen; und die Anleitung dazu wird man in folgenden zwey Aufgaben finden.

(VII.) Jede einfache arithmetiſche Progreßion in eine harmoniſche zu verwandeln. §. 172.

Multipliciret die gegebnen arithmetiſchen Progreßionalen durch einander, und dividiret das Product mit jeder Zahl beſonders. Wenn die harmoniſche Progreßion nicht in den gefundnen groſſen Zahlen bleiben ſoll: ſo reduciret ſolche durch einen gemeinſchaftlichen Theiler. Z. E. wenn die vier arithmetiſchen Zahlen 3. 4. 5. 6. gegeben werden, ſo iſt $3\times4\times5\times6 = 6)\frac{360}{60}\ 5)\frac{360}{72}\ 4)\frac{360}{90}\ 3)\frac{360}{120}$

$6)\overline{10 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 20}$ die gefundnen harmoniſchen Progreßionalen.

Die gefundne harmoniſche Progreßion iſt alſo 60. 72. 90. 120, oder in den kleinſten Zahlen 10. 12. 15. 20.

(VIII.) Jede harmoniſche Progreßion in diejenige einfache arithmetiſche, aus welcher ſie entſtanden, wiederum zu verſetzen. §. 173.

1) Multipliciret zwey Glieder aus der harmoniſchen Progreßion, welche es ſeyn, und dividiret das Product mit jedem Gliede beſonders. 2) Reduciret die Quotienten durch einen gemeinſchaftlichen Theiler. Anmerk. Wenn die beyden multiplicirten Glieder ſich nicht durch jedes Glied ohne Bruch dividiren laſſen, ſo multiplicire man zwey andere Glieder.

Es ſey die harmoniſche Progreßion 10. 12. 15. 20, oder 20. 15. 12. 10.

Operat. mit dem 2ten und 3ten Gliede $15 \times 12 =$ $20)\frac{180}{9}$ $15)\frac{180}{12}$ $12)\frac{180}{15}$ $10)\frac{180}{18}$

Reduction $3)\frac{\quad}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$

Die gefundne einfache arithmetiſche Progreßion iſt alſo 3. 4. 5. 6.

Erſte Anmerkung.

Wenn man zum voraus weiß, daß die einfache arithmetiſche Progreßion von 1 anfangen ſoll, ſo kann man die Zurückverſetzung der harmoniſchen Progreßion auf eine kürzere Art bewerkſtelligen, wenn man nemlich die gröſte harmoniſche Zahl zuvörderſt mit ſich ſelbſt, und hernach mit allen übrigen beſonders dividiret. Z. E. es ſey die harmoniſche Progreßion 15. 21. 35. 105. Stehet alſo:

$105)\frac{105}{1}$ $35)\frac{105}{3}$ $21)\frac{105}{5}$ $15)\frac{105}{7}$ die gefundne arithmetiſche Progreßion iſt alſo 1. 3. 5. 7.

Zweyte Anmerkung.

Unter den verſchiedenen einfachen arithmetiſchen Progreßionen giebet die einzige 1. 2. 3. 4 ꝛc. mit ihren Multiplis, als 2. 4. 6. 8 ꝛc. 3. 6. 9. 12. ꝛc. 4. 8. 12. 16 ꝛc. u. ſ. w. eine vollſtändige harmoniſche Progreßion; da hingegen alle von den übrigen Arten der arithmetiſchen Progreßion abſtammende harmoniſche unvollſtändig ſind, z. E. von 1. 3. 5 7 ꝛc. 1. 4 7. 10 ꝛc. 1. 5. 9. 16 u. ſ. w.

§. 174.

Wenn man eine gegebene Zahl durch die Glieder einer ſtetigen arithmetiſchen Proportion dividiret, ſo findet es ſich, daß die drey Quotienten eine harmoniſche Proportion geben. Es ſey die Zahl 18. Wenn dieſe mit 1. 2. 3. dividiret wird: ſo kömmt die harmoniſche Proportion $6. 9. 18 \overset{3}{=} 2. 3. 6.$ Dividiret man ſie mit 1. 3. 5 ſo kömmt die harmoniſche Proportion $3\frac{3}{5}. 6. 18$; das iſt in ganzen Zahlen mit 5 multipliciret, $18. 30. 90 \overset{5}{=} 3. 5. 15.$ u. ſ. w. Nun iſt jede Progreßion nichts anders als eine fortgeſetzte ſtetige Proportion. Es können alſo durch vorhergehende Operationen ebenfalls harmo-

nische Progreßionen hervorgebracht werden. Wenn wir z. E. mit der arithmetischen Progreßion 1. 2. 3. 4 die Zahl 48 dividiren: so kömmt die harmonische Progreßion 3. 4. 6. 12, wie man aus folgender Vorstellung siehet:

$$\begin{array}{cccc} 4)\frac{48}{12} & 3)\frac{48}{16} & 2)\frac{48}{24} & 1)\frac{48}{48} \\ \hline 4) & 3 \;.\; 4 \;.\; 6 \;.\; 12 & & \end{array}$$

§. 175.

Wenn man eine vollständige harmonische Progreßion untersuchet, so wird man wahrnehmen, daß sich die verschiednen Glieder derselben, von dem größten bis zum kleinsten gerechnet, wie $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}$ u. s. w. mit beständig wachsenden Zählern und Nennern, hingegen von dem kleinsten bis zum größten, wie $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$, und so weiter mit unendlich höher anfangenden Rationen verhalten.

Es sey die harmonische Progreßion

60. 30. 20. 15. 12. 10, oder 10. 12. 15. 20. 30. 60.

In dieser Progreßion ist 60:30 = 2:1, 30:20 = 3:2, 20:15 = 4:3, 15:12 = 5:4, und 12:10 = 6:5. Und umgekehrt ist 10:12 = 5:6, 12:15 = 4:5, 15:20 = 3:4, 20:30 = 2:3, und 30:60 = 2:1. Da die Folge der Verhältnisse auf vorhergehende Art in allen harmonischen Progreßionen statt findet, so giebet solche zu folgenden Aufgaben Gelegenheit.

(IX.) Aus einer gegebenen einzigen Zahl, nach der erklärten Folge der Verhältnisse, eine absteigende harmonische Progreßion hervorzubringen. §. 176.

1) Nehmet $\frac{1}{2}$ aus der gegebnen Zahl, um ein zweytes Glied zu der verlangten Progreßion zu erhalten. 2) Nehmet $\frac{2}{3}$ aus dem zweyten Gliede, um ein drittes Glied zu erhalten. 3) Nehmet $\frac{3}{4}$ aus dem dritten Gliede, um ein viertes Glied zu erhalten. 4) Fahret auf ähnliche Art, mit beständig zunehmenden Zählern und Nennern fort, bis die Pro-

Progreßion ſo viele Glieder hat, als ihr verlanget. Z. E. Es ſey die gegebne Zahl 60.

$\frac{1}{2}$ aus 60 iſt 30.

$\frac{2}{1}$ aus 30 iſt 20, indem $2 \times 30 = 60$, und $\frac{60}{1} = 20$.

$\frac{3}{4}$ aus 20 iſt 15, indem $3 \times 20 = 60$, und $\frac{60}{4} = 15$. u.ſ.w.

Soll nun die Progreßion aus nicht mehr als ſechs Gliedern beſtehen, ſo wird ſolche ſeyn 60. 30. 20. 15. 12. 10.

(X.) Aus einer gegebnen einzigen Zahl nach der vorhin erklärten Folge der Verhältniſſe, eine aufſteigende harmoniſche Progreßion, von einer beſtimmten Anzahl Glieder, hervorzubringen. §. 177.

1) Formiret aus der Anzahl der Glieder, und der zunächſt vor ihr vorhergehenden kleinern Zahl einen Bruch, dergeſtalt, daß die größere Zahl den Zähler, und die kleinere den Nenner abgiebet. Wenn z. E. die verlangte Anzahl der Glieder 6 iſt: ſo iſt der Bruch $\frac{6}{5}$. Iſt ſolche 7, ſo iſt der Bruch $\frac{7}{6}$; iſt ſolche 8, ſo iſt der Bruch $\frac{8}{7}$, u. ſ. w. 2) Gehet mit um 1 abnehmenden Zählern und Nennern bis auf den Bruch $\frac{2}{1}$ zurück, und ſchreibet die Brüche hinter einander hin.

Wenn z. E. die Anzahl der Glieder 6 iſt: ſo ſind die Brüche $\frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}$.

3) Nehmet $\frac{6}{5}$ aus der gegebnen Zahl; $\frac{5}{4}$ aus der kommenden zweyten; $\frac{4}{3}$ aus der kommenden dritten Zahl, u.ſ.w. bis die Progreßion durch $\frac{2}{1}$ geſchloſſen wird.

Es ſey 10 die gegebne Zahl, und die Progreßion ſoll aus ſechs Gliedern beſtehen.

Alſo $\frac{6}{5}\ \frac{5}{4}\ \frac{4}{3}\ \frac{3}{2}\ \frac{2}{1}$.

Wenn nun $6 \times 10 = 60$ und $\frac{60}{5} = 12$
$5 \times 12 = 60$ und $\frac{60}{4} = 15$
$4 \times 15 = 60$ und $\frac{60}{3} = 20$
$3 \times 20 = 60$ und $\frac{60}{2} = 30$
und $2 \times 30 = 60$ und $\frac{60}{1} = 60$

ſo iſt die Progreßion 10. 12. 15. 20. 30. 60.

(XI.) Zwischen zwey gegebnen Zahlen alle mögliche Mittelproportionale zu finden, und also eine vollständige harmonische Progreßion zu formiren. §. 178.

1) Dividiret die beyden gegebnen Zahlen. Der Quotient leget die Anzahl der erforderlichen Glieder dar. 2) Verzeichnet wie vorher bey (X), so viele Brüche — 2, als Glieder erfordert werden, und hebet solche von $\frac{1}{2}$ an. 3) Dividiret in die größte beyder Zahlen mit jedem Nenner besonders; oder nehmet $\frac{1}{2}$ aus der größten Zahl; $\frac{2}{3}$ aus dem kommenden Gliede; $\frac{3}{4}$ aus dem folgenden, u. s. w.

Es seyn die beyden Zahlen 64 und 8, oder 8 und 64. Wenn nun $\frac{64}{8} = 8$: so werden überhaupt acht Glieder zur Progreßion erfordert. Wir brauchen also eben so viele Brüche weniger 2, und folglich die folgenden $\frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{5}{6}\ \frac{6}{7}$. Wenn wir nun mit den Nennern derselben in 64 dividiren, so stellet sich die ganze Progreßion in folgenden acht Zahlen dar: 64. 32. $21\frac{1}{3}$. 16. $12\frac{4}{5}$. $10\frac{2}{3}$. $9\frac{1}{7}$. 8.

Wenn man die Nenner der Brüche 3, 5, 3 und 7 unter einander, und mit dem Product wiederum jede Progreßionale besonders multipliciret: so hat man die Progreßion in ganzen Zahlen, als:

$3 \times 5 \times 3 \times 7 = 315$. Also

64	32	$21\frac{1}{3}$	16	$12\frac{4}{5}$	$10\frac{2}{3}$	$9\frac{1}{7}$	8
315	315	315	315	315	315	315	315
12) 20160.	10080.	6720.	5040.	4032.	3360.	2880.	2520.
1680.	840.	560.	420.	336.	280.	240.	210.

Erste Anmerkung.

Wenn die beyden gegebenen Zahlen, unter einander dividiret, einen Bruch zum Quotienten bekommen: so findet zwischen selbigen keine vollständige Progreßion statt, obgleich Mittelproportionale dazwischen gefunden werden können. Es seyn z. E. die beyden Zahlen 140 und 60. Wenn nun $\frac{140}{60} = 2\frac{1}{3}$: so sind die beyden Zahlen in besagtem Falle. Indessen lassen sie Mittelproportionale zu, als

140. 105. 84. 70 60

worinnen die Brüche auf nachstehende Art einander folgen, als

als $\frac{4}{3}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{6}{5}$ $\frac{7}{6}$. Soll die Progreßion vollſtändig ſeyn, ſo müſſen die Brüche $\frac{2}{1}$ und $\frac{3}{2}$ hinzugefüget werden, und alsdenn kommen annoch die Glieder 210 und 420 hinzu, und die Progreßion iſt

420. 210. 140. 105. 84. 70. 60.

Zweyte Anmerkung.

Wenn die beyden gegebnen Zahlen ſich wie 2:1, oder 1:2 verhalten: ſo findet ebenfalls keine vollſtändige Progreßion ſtatt, ob gleich Mittelproportionale hinzugefüget werden können. Es ſeyn die beyden Zahlen 140 und 70=2:1. Zwiſchen dieſe beyde Zahlen können die Mittelproportionale 105 und 84 geſtellet werden. Wenn ſich nun die Progreßionalen 140. 105. 84. 70, auf $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{4}$ und $\frac{6}{5}$ gründen: ſo fehlen annoch die Brüche $\frac{2}{1}$ und $\frac{3}{2}$. Wir thun dieſe hinzu, und bringen alsdenn eine vollſtändige Progreßion in den Zahlen 420. 210. 140. 105. 84. 70. hervor.

Siebenter Abſchnitt.

Von der contraharmoniſchen Proportion.

§. 179.

Eine contraharmoniſche Proportion iſt, worinnen ſich die Differenz des kleinſten und mittelſten Gliedes gegen die Differenz des mittelſten und größten verhält, wie das größte Glied gegen das kleinſte. Eine ſolche Proportion iſt in den Zahlen 3. 5. 6 enthalten, wie man aus folgender Vorſtellung ſiehet:

$$\begin{array}{l} 5 \cdot 6 \\ \hline 3 \cdot 5 \\ \hline 2:1 = \end{array} \quad 3) \frac{6 \cdot 3}{2:1} \quad \text{oder } 5-3:6-5=6:3$$

Anmerkung.

Wenn die contraharmoniſche Proportion zwiſchen vier Zahlgrößen ſtatt finden, und ſie alſo unſtetig ſeyn ſoll: ſo muß ſich die Differenz des erſten und zweyten Gliedes zur Diſ-

ferenz des dritten und vierten verhalten, wie das vierte gegen das erste. Z. E. in den vier Zahlen 8. 10. 15. 16 iſt

$\frac{8 \cdot 15}{2 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 16}{8}$ und $8) \frac{16 \cdot 8}{2 \cdot 1}$ oder $10 - 8 : 16 - 15 = 16 : 8$.

§. 180.

Eine contraharmoniſche Proportion iſt nichts anders, als eine umgekehrte harmoniſche Proportion, wie aus der Lage der Differenzen zu erſehen iſt, z. E.

harmoniſch.	contraharmoniſch.
3. 4. 6	3. 5. 6
1 2	2 1

(I.) Zwiſchen zwey gegebnen Zahlen eine contraharmoniſche Mittelproportionale zu finden. §. 181.

1) Dividiret mit der kleinſten Zahl in die größte. 2) Dividiret mit dem um 1 vermehrten Quotienten in die Differenz der beyden Zahlen. 3) Subtrahiret den zulezt gefundenen Quotienten von dem größten Gliede. Es ſeyn die beyden Zahlen 3 und 6.

1. Operat.	2. Operat.	3 Operat.
$3) \frac{6}{2}$	6	6
	3	1
	$2 + 1 = 3) \frac{3}{1}$ Differenz	5 die gefundene Mittelproportionale.

Alſo 3. 5. 6.

Oder kürzer.

Dividiret die ſummirten Quadrate der beyden Zahlen durch die Summe der Wurzeln. Der Quotient iſt das geſuchte Glied. Z. E. zwiſchen 3 und 6 die Mittelproportionale zu finden.

$6^2 = 36 \cdot 36 + 9 = 45$
$3^2 = 9 \cdot 6 + 3 = 9$

$\frac{45}{9} = 5$ die gefundne Mittelproportionale.

(II.) Zu

(II) Zu zwey gegebnen Zahlen die dritte größere Proportionale zu finden. §. 182.

1) Multipliciret die Differenz der beyden Zahlen in die kleinſte. 2) Addiret das Product zum Quadrat der halbirten größten Zahl. 3) Ziehet die Quadratwurzel aus dem Collect, und addiret die halbirte größte Zahl. Es ſeyn die Zahlen 3 und 5.

1. Operat.	2. Operat.	3. Operat.
5	2)5	$\sqrt{12\frac{1}{4}}$
3	$2\frac{1}{2}$ halbirte größte	$3\frac{1}{2}$ □wurzel.
2 Differenz	Zahl, deren □ $6\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$ halb.gr.Zahl
3	6 Product	6 die gefundne
6 Product	$12\frac{1}{4}$ Collect.	Proportionale.

Alſo 3. 5. 6.

Anmerkung.

Wenn man ſich die Operation bequemer machen will, ſo brauchet man die gegebnen Zahlen 3 und 5 nur zu dupliren, da die Proportion alsdenn aus 6. 10. 12 beſtehen wird.

(III.) Zu zwey gegebnen Zahlen die dritte kleinere Proportionale zu finden. §. 183.

1) Multipliciret die Differenz der beyden Zahlen in die größte. 2) Subtrahiret das Product von dem Quadrat der halbirten kleinſten Zahl. 3) Ziehet die Quadratwurzel aus dem Reſt, und addiret die halbirte kleinſte Zahl. Es ſeyn die Zahlen 5 und 6.

1. Operat.	2 Operat.	3. Operat.
6	2)5	$\sqrt{\frac{1}{4}}$ Reſt
5	$2\frac{1}{2}$ halbir.klein-	$\frac{1}{2}$ Quadratwurzel.
1 Differenz	ſte Zahl, deren	$2\frac{1}{2}$ halbirte kleinſte Zahl.
6	Quadrat $6\frac{1}{4}$	3 die gefundne dritte klei-
6 Product.	6 Product	nere Proportionale.
	$-\frac{1}{4}$ Reſt.	

Alſo 3. 5. 6.

§. 184.

Es ſey die contraharmoniſche Proportion 4. 10. 12 *). Wenn in ſelbiger zwiſchen die beyden erſten Glieder 4 und 10 die Mittelproportionale $8\frac{2}{7}$; und zwiſchen die beyden lezten Glieder 10 und 12 die Mittelproportionale $11\frac{1}{11}$ geſtellet wird, als 4. $8\frac{2}{7}$. 10. $11\frac{1}{11}$. 12 **): ſo findet man, daß zwar

*) Da dieſe Zahlen die durch 2 vergrößerte einfache Proportion 2. 5. 6 enthalten: ſo können ihre Differenzen auf die kleinſte Zahlen zurück geführet werden, um das Verhältniß des erſten und lezten Gliedes in den kleinſten Zahlen zu finden, als:

$$\begin{array}{r} 4.\ 10.\ 12 \\ \hline 4.\ 10 \end{array}$$

$$2)\frac{6.\ 2}{3.\ 1} \text{ und } 4)\frac{4.\ 12}{1.\ 3.}$$

**) Da die Ausrechnung der Mittelproportionale allhier mit Brüchen verknüpfet iſt, ſo will ich ſie herſetzen. Es ſoll zwiſchen 4 und 10 eine Mittelproportionale geſuchet werden. Stehet nach den drey Regeln der erſten Aufgabe alſo:

1. Operat. $4)\frac{10}{2\frac{2}{4}=2\frac{1}{2}}$ Quotient, welcher $+1=3\frac{1}{2}$.

2. Operat. 10 $3\frac{1}{2}=\frac{7}{2}\times\frac{6}{1}=\frac{42}{7}$, und $\frac{42}{7}=1\frac{5}{7}$ $\frac{4}{6}$ Differenz.

2. Operat. 10 größtes $-1\frac{5}{7}$ Glied, $8\frac{2}{7}$ die gefundne Mittelproportionale.

Ferner. Es ſoll zwiſchen 10 und 12 eine Mittelproportionale geſuchet werden. Stehet alſo:

1. Operat. $10)\frac{12}{1\frac{2}{10}=1\frac{1}{5}}$ Quotient, welcher $+1=2\frac{1}{5}$.

2. Operat. 12 $2\frac{1}{5}=\frac{11}{5}\times\frac{2}{1}=\frac{10}{11}$ $\frac{10}{2}$ Differenz.

3. Operat. 12 größtes Glied $-\frac{10}{11}$ $11\frac{1}{11}$ die gefundene Mittelproportionale.

Oder nach folgender kürzern Manier.

α) Zwiſchen 4 und 10 die Mittelproportionale zu finden.

$$\begin{array}{rcl} 4\times 4 = 16 & . & 16+100=116 \\ 10\times 10 = 100 & . & 10+4=14 \end{array}$$

$$\frac{116}{14}=8\frac{4}{14}=8\frac{2}{7} \text{ gefundne Mittelproportionale.}$$

β) Zwi-

zwar die drey erstern Glieder 4. $8\frac{2}{7}$. 10, ingleichen die drey leztern 10. $11\frac{1}{11}$. 12, so wie das erste, dritte und fünfte 4. 10. 12 eine contraharmonische Proportion formiren, aber nicht die drey mittelsten $8\frac{2}{7}$. 10. $11\frac{1}{11}$. Es folget also hieraus, daß die contraharmonische Proportion nicht geschickt ist, eine zusammenhängende Progreßion hervorzubringen. Da man nemlich solche nicht durch Hülfe der Mittelproportionale erhalten kann, so wird es noch weniger durch Hülfe der größern oder kleinern dritten Proportionale geschehen, indem zur Erfindung derselben die Ausziehung der Quadratwurzeln erfordert wird, und wenn sich zu selbigen unvollkommne Quadrate mit irrationalen Resten darstellen, niemals die gehörige Proportionale kommen wird.

Achter Abschnitt.

Von der ersten contrageometrischen Proportion.

§. 185.

Eine erste contrageometrische Proportion ist, worinnen sich die Differenz des kleinsten und mittelsten Gliedes gegen die Differenz des mittelsten und größten verhält, wie das mittelste Glied gegen das kleinste, wie z. E. in 3. 9. 11, als;

$$\begin{array}{l} 9 \cdot 11 \\ 3 \cdot 9 \end{array}$$

2) $\frac{6 \cdot 2}{3 : 1 =}$ und 3) $\frac{9 \cdot 3}{3 : 1}$ oder $9-3 : 11-9 = 9 : 3$.

A) Zwischen 10 und 12 die Mittelproportionale zu finden.

$10 \times 10 = 100 \cdot 100 + 144 = 244$
$12 \times 12 = 144 \cdot 10 + 12 = 22$

$\frac{244}{22} = 11\frac{2}{22} = 11\frac{1}{11}$ gefundne Mittelproportionale

(I.) Zu zwey gegebnen Zahlen die dritte gröſsere Proportionale zu finden. §. 186.

1) Multipliciret mit der Differenz der beyden Zahlen die kleinste. 2) Addiret das Product zu dem Quadrat der zweyten oder mittelsten Zahl. 3) Theilet die Summe durch die mittelste Zahl. Es sey die kleinste Zahl 30 und die zweyte gröſsere 60.

1) 60 2) $60^2 = 3600$ 3) 4500

30 900 60) 4500

30 4500 75 die gefundne dritte gröſsere Proportionale.

30

900

Also 30. 60. 75 = 2. 4. 5.

Oder auf folgende Manier.

Dividiret das Quadrat der kleinsten Zahl durch die gröſste, und subtrahiret den Quotienten von der Summe der beyden Zahlen, als:

$30^2 = 900$

$\frac{900}{60} = 15$

$60 + 30 - 15 = 75$ die gefundne dritte gröſsere Proportionale.

(II.) Zu zwey gegebnen Zahlen die dritte kleinere Proportionale zu finden. §. 187.

1) Multipliciret die kleinste von beyden Zahlen mit der Differenz der beyden. 2) Quadriret die Hälfte der kleinsten Zahl; ziehet von dem gefundnen Quadrate das Product der ersten Operation ab, und extrahiret aus dem Rest die Quadratwurzel. 3) Subtrahiret die Quadratwurzel von der Hälfte der kleinsten Zahl. Es seyn die beyden Zahlen 20 und 25.

1) 25 2) $\frac{20}{2)}$ kleinſte Zahl. 3) $\frac{20}{2)}$

$\frac{20}{5}$ $\frac{20}{10}$ u. $10^2 = 100$ $\frac{100}{0}$ $\frac{0}{10}$ □wurzel.

$\frac{20}{100}$ Product. Reſt $\frac{100}{0}$ die gefundne

$\sqrt{\frac{0}{0}}$ □wurzel. 3te kleinere Proportionale.

Erſte Anmerkung.

Es kommen Fälle vor, wo die, nach Anleitung der zweyten Operation, aus einem vorhergehenden Reſt zu ziehende Quadratwurzel, ſowohl zur Hälfte der kleinſten Zahl addiret, als von ſelbiger ſubtrahiret werden kann; z. E. Es ſeyn die Zahlen 36 und 41.

$\frac{41}{36}$ $\frac{36}{2)}$ $\frac{36}{2)}$ oder $\frac{36}{2)}$

$\frac{5}{36}$ $\frac{36}{18}$ u. $18^2 = 324$ $\frac{36}{18}$ $\frac{36}{18}$

$\frac{36}{180}$ $\frac{180}{144}$ $\frac{12}{30}$ addir. $\frac{12}{6}$ ſubtrah.

$\sqrt{\frac{144}{12}}$ die dritte kleinere Proportionale. die dritte kleinere Proportionale.

Beyde Proportionen 30. 36. 41, und 6. 36. 41 ſind richtig, indem

	Differenz			Differenz
30			6	
36	$\frac{6}{36} = \frac{36}{38}$	ferner	36	$\frac{30}{6} = \frac{6}{1} = \frac{36}{6}$
41			41	

Zweyte Anmerkung.

Wenn die zu halbirende kleinſte Zahl ungerade iſt, und alſo einen unreinen Bruch giebet, ſo 1) verwandelt ſolchen in einen reinen Bruch, und quadriret Zähler und Nenner; 2) überſetzet das Product der erſten Operation in einen Bruch; bringet ſelbigen mit dem vorhergehenden Bruch auf einerley Benennung; ziehet den einen von dem andern ab, und extrahiret die Quadratwurzel. 3) Subtrahiret die Quadratwurzel von dem erſten unreinen Bruch, und dividiret mit dem Nenner in den Zähler; als es ſey die kleinſte Zahl 9 und die größte 11.

11
9
2 Differ.
9
18 Product.

2) 9 die kleinſte Zahl
$4\frac{1}{2}(4\frac{1}{2})^2 = \frac{9^2}{2^2} = \frac{81}{4}$. Alſo $\frac{\frac{81}{4} \times \frac{18}{1}}{\frac{81}{4}}$

$-\frac{72}{4}$

$\sqrt{\frac{9}{4}}$ $\frac{9}{4}$ der erſte

$\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$ unr. Bruch

$\frac{6}{2} = 3$ die geſundene dritte kleinere Proportionale.

Alſo 3. 9. 11.

(III.) Zwiſchen zwey gegebnen Zahlen die Mittelproportionale zu finden. §. 188.

1) Quadriret die halbirte Differenz der beyden Zahlen, und addiret das Quadrat der kleinſten Zahl. 2) Ziehet aus dem Collect die Quadratwurzel, und addiret die halbirte obige Differenz. Es ſeyn die Zahlen 4 und 10.

10
4
6
2) 3 halbirte Differenz
3
9 Quadrat der halb. Differ.
$4^2 = 16$ Quadrat der kleinſten Zahl.
25 Collect.

25 Collect
$\sqrt{5}$
3 die halbirte Differenz
8 die gefundne Mittelproportionale.

Anmerkung.

Wenn die halbirte Differenz einen unreinen Bruch machet, ſo 1) verwandelt denſelben in einen reinen Bruch, und quadriret Zähler und Nenner; 2) Ueberſetzet das Quadrat der kleinſten Zahl in einen Bruch; bringet ſolchen mit dem vorigen Bruch auf einerley Nenner, und addiret beyde Brüche. 3) Ziehet aus dem Zähler und Nenner die Quadratwurzel; addiret den allererſten unreinen Bruch, und dividiret mit dem Nenner in den Zähler. Z. E. es ſeyn die beyden äuſſerſten Zahlen 6 und 15.

$\frac{15}{6}$

2) $\frac{9}{4\frac{1}{2}}$ u. $(4\frac{1}{2})^2 \frac{9^2}{2^2} = \frac{81}{4}$. Alſo $\frac{36}{1} \times \frac{81}{4}$

$\frac{144}{4} \quad \frac{81}{4}$

$+ \frac{81}{4}$

$\frac{225}{4}$

$\sqrt{\frac{4}{}}$

$\frac{15}{2}$ die Quadratwurzel aus $\frac{225}{4}$.

$+ \frac{9}{2}$ der allererſte unreine Bruch

$\frac{24}{2} = 12$ die gefundne Mittelproportionale.

Alſo 6. 12. 15.

§. 189.

Die erſte contrageometriſche Proportion läßet ſich in eine zuſammenhängende Progreßion verwandeln, und ſolches geſchicht am bequemſten durch Erfindung einer vierten, fünften, u. ſ. w. größern Proportionale nach Anleitung der erſten Aufgabe. Vermittelſt ſelbiger wird z. E. zu 30. 60. 75, aus 60 und 75, die vierte größere Proportionale 87 gefunden, und zu 36. 60. 75. 87 kann wiederum aus 75 und 87, eine fünfte geſuchet werden. Wenn die Proportionalen in Bruchzahlen kommen, und man ſolche in ganzen Zahlen haben will, ſo verfähret man nach demjenigen, was in dem Abſchnitt von der harmoniſchen Progreßion gelehret worden.

Neun-

Neunter Abschnitt.

Von der zweyten contrageometrischen Proportion.

§. 190.

Eine zweyte contrageometrische Proportion ist, worinnen sich die Differenz des kleinsten und mittelsten Gliedes gegen die Differenz des mittelsten und größten verhält, wie das größte Glied gegen das mittelste, wie z. E. in den Zahlen 2. 8. 12, als:

2. 8. 12

2. 8

2) $\frac{6.\ 4}{3:2}$ und 4) $\frac{12.\ 8}{3:2}$ oder $8-2:12-8=12:8$.

(I.) Zu zwey gegebnen Zahlen die dritte kleinere Proportionale zu finden. §. 191.

Es muß aber die Differenz der beyden Zahlen nicht größer als die kleinste Zahl seyn. 1) Multipliciret die größte Zahl in die Differenz der beyden Zahlen. 2) Ziehet das Product von dem Quadrat der kleinsten Zahl ab, und theilet den Rest durch die kleinste Zahl. Es seyn z. E. die beyden Zahlen 8 und 12.

1. Operat.

12
− 8
4
12
48 Product.

2. Operat.

$8^2 = 64$
48
8) 16
2 die gefundne dritte kleinere Proportionale.

Also 2. 8. 12.

Oder:

Dividiret das Quadrat der größten Zahl durch die kleinste, und ziehet den Quotienten von der Summe beyder Zahlen ab, als:

$12^2 = 144$ $12 + 8 = 20$

$\frac{144}{8} = 18$ $20 - 18 = 2$ die gefundne dritte kleinere Proportionale.

(II.) Zu zwey gegebnen Zahlen die dritte gröſſere Proportionale zu finden. §. 192.

1) Multipliciret die gröſte Zahl in die Differenz der beyden. 2) Quadriret die halbirte gröſte Zahl, und addiret das vorige Product. 3) Ziehet aus dem Collect die Quadratwurzel, und addiret die Hälfte der gröſten Zahl. Es seyn die beyden Zahlen 2 und 8.

$8 \quad 2)\frac{8}{4}$ und $4^2 = 16$

Differenz $\frac{2}{6}$ $\frac{48}{}$ Product der 1sten Operat.

$\frac{8}{48}$ $\sqrt{\frac{64}{8}}$

$\frac{4}{12}$ Hälfte der gröſten Zahl.

die gefundene dritte gröſsere Proportionale.

Also 2. 8. 12.

(III.) Zwischen zwey gegebnen Zahlen die Mittelproportionale zu finden. §. 193.

1) Quadriret die halbirte Differenz der beyden Zahlen. 2) Addiret das Quadrat der gröſten; ziehet aus dem Collect die Quadratwurzel, und subtrahiret die halbirte Differenz der Zahlen. Es seyn z. E. die beyden Zahlen 2 und 12.

12 gröſte Zahl $12^2 = 144$

$\frac{2}{10}$ $\frac{25}{}$ □ der ersten Operation.

$2)\frac{10}{5}$ halbirte Differenz $\sqrt{\frac{169}{13}}$

$\frac{5}{25}$ Quadrat derselben. $\frac{5}{8}$ halbirte Differenz

die gefundne Mittelproportionale.

Also 2. 8. 12.

§. 194.

Diese zweyte contrageometrische Proportion läßet sich nicht über drey Glieder ausdehnen, und kann also keine Progreßion daraus hervorgebracht werden.

Zehn-

Zehnter Abschnitt.

Von der ersten arithmetisch-geometrischen Proportion.

§. 195.

Eine erste arithmetisch-geometrische Proportion ist, worinnen sich die Differenz des kleinsten und gröſten Gliedes gegen die Differenz des kleinsten und mittelsten verhält, wie das gröſte Glied gegen das kleinste; und diese Proportion ist in Absicht auf die Folge der Differenzen zweyerley, indem sie entweder zu- oder abnehmen können, z. E.

mit zunehmenden Differenzen.	mit abnehmenden Differenzen.
5 . 9 . 25	15 . 21 . 25
4 16	6 4
25 . 9	25 . 21
5 . 5	15 . 15
$4)\frac{80 \cdot 4}{5 : 1}$ und $5)\frac{25 \cdot 5}{5 : 1}$	$2)\frac{10 \cdot 6}{5 : 3}$ und $5)\frac{25 \cdot 15}{5 : 3}$
oder	oder
25—5 : 9—5 = 25 : 5	25—15 : 21—15 = 25 : 15

(I.) Zu zwey gegebnen Zahlen die dritte gröſsere Proportionale zu finden. §. 196.

1) Ziehet die Differenz der beyden Zahlen von der kleinern ab. 2) Dividiret mit dem Rest in das Quadrat der kleinsten Zahl. Es seyn die Zahlen 10 und 16.

16	10	$10^2 = 100$
10	6	$4)\overline{100}$
6 Differenz	4 Rest	25 die gefundne dritte gröſsere Proportionale.

Also 10. 16. 25.

(II.) Zu

(II.) Zu zwey gegebnen Zahlen die dritte kleinere Proportionale zu finden. §. 197.

1) Subtrahiret das Product der beyden Zahlen von dem Quadrat der größern Zahl. 2) Ziehet die Quadratwurzel des Reſtes von der größern Zahl ab. Es ſeyn die Zahlen 16 und 25.

25 die größere Zahl $25^2 = 625$

16

150

25

400 Product

400

225 Reſt

15 □wurzel des Reſtes

25

15

10 die gefundne dritte kleinere Proportionale.

(III.) Zwiſchen zwey gegebenen Zahlen die Mittelproportionale zu finden. §. 198.

1) Erwählet zwey Zahlen, deren Differenz mit der kleinſten Zahl nicht einerley iſt. Addiret die Differenz der beyden Zahlen zu der größten, und multiplicitet das Collect durch die kleinſte Zahl. 2) Theilet das Product durch die größte.

Anmerkung.

Wenn die Differenz der beyden Zahlen größer als die kleinſte Zahl iſt, ſo iſt die erſte Differenz der Proportion kleiner als die zweyte. Z. E. wenn zwiſchen 10 und 25 die Mittelproportionale geſuchet wird, ſo kömmt 16, und die Proportion iſt 10. 16. 25.
6 9

Wenn aber die Differenz der beyden Zahlen kleiner als die kleinſte Zahl iſt, ſo iſt die erſte Differenz der Proportion gröſſer als die zweyte; z. E. wenn zwiſchen 20 und 25 die Mittelproportionale geſuchet wird, ſo kömmt 24, und die Proportion iſt 20. 24. 25.
4 1

Die Ausarbeitung iſt in beyden Fällen einerley.

Es ſeyn die beyden äußerſten Zahlen 10 und 25.

25
10
15 Differenz
25 gröſte Zahl
40
10 kleinſte Zahl

25) 400/16 die gefundne Mittelproportionale.

Alſo 10. 16. 25.

Es ſeyn die beyden äußerſten Zahlen 20 und 25.

25
20
5 Differenz
25 gröſte Zahl
30
20 kleinſte Zasl

25) 600/24 die gefundne Mittelproportionale.

Alſo 20. 24. 25.

§. 199.

Dieſe Proportion kann bis zur Progreßion fortgeführet werden. Z. E. wenn zur Proportion 3. 5. 9 die vierte gröſsere Proportionale geſuchet wird, ſo kömmt 25, und iſt alsdenn die Progreßion 3. 5. 9. 25.

Eilfter Abſchnitt.

Von der zweyten arithmetiſch-geometriſchen Proportion.

§. 200.

Eine zweyte arithmetiſch-geometriſche Proportion iſt, worinnen ſich die Differenz des mittelſten und gröſten Gliedes gegen die Differenz des kleinſten und gröſten verhält, wie das kleinſte Glied gegen das gröſte; und ſelbige iſt in Anſehung der Lage der Differenzen zweyerley, indem entweder die kleinere oder gröſsere vorangehet, z. E.

mit zunehmenden Differ.

15. 19. 25
4 6
25 . 25
19 . 15

2) 6 . 10 / 3 : 5 = 5) 15 . 25 / 3 : 5

Oder

25 — 19 : 25 — 15 = 15 : 25.

mit abnehmenden Differ.

5. 21. 25
6 4
25 . 25
21 . 5

4) 4 . 20 / 1 . 5 = 5) 5 . 25 / 1 : 5

Oder

25 — 21 : 25 — 5 = 5 : 25

(L) Zwi-

(I.) Zwiſchen zwey gegebnen Zahlen die Mittelproportionale zu finden. Es muß aber die Differenz der beyden Zahlen mit der kleinſten Zahl nicht einerley ſeyn. §. 201.

1) Multipliciret die Differenz der beyden Zahlen in die kleinſte; 2) ziehet das Product von dem Quadrat der größten Zahl ab, und theilet den Reſt durch die größte Zahl. Es ſeyn die beyden äuſſerſten Zahlen 5 und 25.

25 — 5 = 20; 5 = 100

$25^2 = 625$ □ — 100 = 525

$25)\overline{525}$

21 die gefundne Mittelproportionale.

Alſo 5. 21. 25.

Oder:

1) Dividiret das Quadrat der kleinſten Zahl durch die größte, und 2) addiret den Quotienten zur Differenz der beyden Zahlen, als:

1) $5^2 = 25$ 2) $25 - 5 = 20$

und $\frac{25}{25} = 1$ $20 + 1 = 21$ die gefundne Mittelproportionale.

(II.) Zu zwey gegebnen Zahlen die dritte kleinere Proportionale zu finden. §. 202.

1) Multipliciret die Differenz der beyden Zahlen in die größte, und ziehet das Product von dem Quadrat der halbirten größten Zahl ab. 2) Ziehet aus dem Reſt die Quadratwurzel, und

α) addiret die halbirte größte Zahl, wenn die Differenzen zunehmen ſollen; oder

β) ſubtrahiret die Quadratwurzel von der halbirten größten Zahl, wenn die Differenzen abnehmen ſollen.

Es seyn die beyden Zahlen 42 und 50.

50 / 42 / 8 / 50 / 400

2) 50 / 25 u. 25² = 625 □ der halbirten

400 größten Zahl

225

√ 15 □wurzel

25 addirt

40 die gefundene dritte kleinere Proportionale.

Also 40. 42. 50 (2, 8)

oder 25 halb. größte Zahl

15 □wurzel

10 die gefundne dritte kleinere Proportionale.

Also 10. 42. 50 (32, 8)

(III.) Zu zwey gegebnen Zahlen die dritte größere Proportionale zu finden. §. 203.

1) Ziehet von dem Quadrat der halbirten Summe der beyden Zahlen das Quadrat der kleinsten Zahl ab. 2) Extrahiret aus dem Rest die Quadratwurzel, und addiret die halbirte Summe der beyden Zahlen. Es seyn die beyden Zahlen 5 und 21.

21 / 5 / 26

2) 26 / 13 und 13² = 169 □ der halbirten Summe

25 = 5²

√ 144 Rest

12 □wurzel

13 halbirte Summe der beyden Zahlen

25 die gefundne dritte größere Proportionale.

Also 5. 21. 25.

Zwölfter Abſchnitt.

Von der dritten arithmetiſch- geometriſchen Proportion.

§. 204.

Eine dritte arithmetiſch- geometriſche Proportion iſt, worinnen ſich die Differenz des kleinſten und mittelſten Gliedes gegen die Differenz der beyden äußerſten verhält, wie das kleinſte Glied gegen das mittelſte, und ſelbige iſt in Anſehung der Folge der Differenzen zweyerley, indem ſolche entweder zu- oder abnehmen können, als:

mit zunehmenden Differenzen.	mit abnehmenden Differenzen
4. 10. 19	4. 6. 7
6 9	2 1
10 . 19	6 . 7
4 . 4	4 . 4
3) 6 . 15 / 2 : 5 = 2) 4 . 10 / 2 : 5	2 : 3 = 2) 4 . 6 / 2 : 3
oder	oder
10 − 4 : 19 − 4 = 4 : 10.	6 − 4 : 7 − 4 = 4 : 6.

(I.) Zu zwey gegebnen Zahlen die dritte gröſſere Proportionale zu finden. Es muß aber die Differenz der beyden Zahlen nicht mit der kleinſten Zahl einerley ſeyn. §. 205.

1) Nehmet zwey Zahlen von bemeldter Beſchaffenheit, und zwar

α) wenn die Differenzen zunehmen ſollen, ſo wählet zwey Zahlen, deren Differenz kleiner als die kleinſte Zahl iſt.

β) Wenn die Differenzen abnehmen ſollen, ſo wählet zwey Zahlen, deren Differenz gröſſer als die kleinſte Zahl iſt.

2) Multipliciret die Differenz der beyden Zahlen mit der gröſten, und addiret das Product zum Quadrat der kleinſten Zahl. 3) Theilet das Collect durch die kleinſte Zahl. Es ſeyn die Zahlen 4 und 6; ingleichen 4 und 10.

6
4
2 Differenz
6
12
16 = 4²
28
4) 7 die gefundne Proportionale.

10
4
6
10
60
16 = 4²
76
4) 19 die gefundne Proportionale.

Oder:

1) Dividiret das Quadrat der größern Zahl durch die kleinere, und 2) subtrahiret von dem Quotienten die Differenz beyder Zahlen, als:

Es sey 4 und 6.
1) 6² = 36
36/4 = 9
2) 6 − 4 = 2
9 − 2 = 7 die gefundne Proportionale.

Es sey 4 und 10.
2) 10² = 100
100/4 = 25
2) 10 − 4 = 6
25 − 6 = 19 die gefundene Proportionale.

(II.) Zu zwey gegebnen Zahlen die dritte kleinere Proportionale zu finden. §. 206.

1) Summiret die beyden Zahlen, und ziehet von dem Quadrat der halbirten Summe das Quadrat der kleinsten Zahl ab. 2) Extrahiret aus dem Rest die Quadratwurzel, und subtrahiret solche von der halben Summe der beyden Zahlen. Es seyn die beyden Zahlen 12 und 14.

12
14
26 Summe
2) 13 und 13² = 169 □ der halben Summe
144 □ der kleinsten Zahl
√25 Rest — 13 halbe Summe
5 □wurzel — 5 □wurzel aus 25
8 die gefundne Zahl.

Also 8. 12. 14.

(III.) Zwi

(III.) Zwischen zwey gegebnen Zahlen die Mittelproportionale zu finden. §. 207.

1) Multipliciret die Differenz der beyden Zahlen in die kleinste, und addiret zum Product das Quadrat der halbirten kleinsten Zahl. 2) Ziehet die Quadratwurzel aus dem Collect, und addiret die halbirte kleinste Zahl. Es seyn die beyden äussersten Zahlen 4 und 7. Also:

7
4
3 und $3 \times 4 = 12$
$4 = 2^2$
16
$\sqrt{16}$
$4 + 2 = 6$ die gefundne Mittelproportionale.

Also 4. 6. 7.

Dreyzehnter Abschnitt.

Von der contra arithmetischen Proportion.

§. 208.

Eine contra arithmetische Proportion ist, worinnen sich, bey ungleichen Differenzen dreyer Zahlen, die Differenz der beyden größten Glieder gegen die Differenz der beyden äussersten verhält, wie das kleinste Glied gegen das mittelste. Eine solche Proportion ist in den Zahlen 3. 5. 8 enthalten. Es ist nemlich die Differenz der beyden größten Glieder 8 und 5 die Zahl 3; der beyden äussersten 8 und 3 die Zahl 5; das kleinste Glied 3 und das mittelste 5. Also 8 8
5 3
$3 : 5 = 3 : 5$. oder $8 - 5 : 8 - 3 = 3 : 5$

§. 209.

Diese Proportion ist leicht zu verfertigen. Denn wenn man 1) zwey Zahlen nimmt, deren Differenz mit der kleinern derselben nicht einerley ist, und solche addiret: so

bekömmt man die dritte gröſsere Proportionale. Iſt die Differenz der beyden gegebnen Zahlen geringer als die kleinere von beyden: ſo entſtehet eine Proportion mit zunehmenden Differenzen, und iſt die Differenz gröſser als die kleinere von beyden: ſo entſtehet eine Proportion mit abnehmenden Differenzen. Z. E. es werden die Zahlen 7 und 13 gegeben, deren Differenz = 6. Hieraus entſtehet durch 7 + 13 die Proportion 7. 13. 20 mit zunehmenden Differenzen. Es werden gegentheils die Zahlen 3 und 7 gegeben. Da die Differenz 4 gröſser, als die kleinere Zahl 3 der beyden gegebnen iſt: ſo entſtehet, durch 3 + 7, die Proportion 3. 7. 10 mit abnehmenden Differenzen.

2) Wenn man zwey Zahlen nimmt, welche eine von der andern ſubtrahiret, eine kleinere Zahl, als die kleinſte der beyden gegebnen iſt, zurücke laſſen: ſo bekömmt man die dritte kleinere Proportionale. Auf dieſe Art entſteht aus 13 und 20, durch 20 — 13, die Proportion 7. 13. 20, und aus 7 und 10, durch 10 — 7, die Proportion 3. 7. 10; in deren erſtern die 7, und und der leztern die 3 die dritte kleinere Proportionale iſt.

3) Wenn man zwey Zahlen nimmt, welche von einander ſubtrahiret, eine gröſsere Zahl, als die kleinere der beyden iſt, zurücke laſſen: ſo bekömmt man die Mittelproportionale. Z. E. 20 — 7 giebt 13, und 10 — 3 die Zahl 7 zur Mittelproportionale.

§. 209.

Die contra arithmetiſche Proportion mit zunehmenden Differenzen kann durch eine Addition der beyden gröſsten Glieder zu einer Progreſsion werden, welche man auf ähnliche Art ſo weit als man beliebet, fortführen kann. Wenn z. E. die Proportion 3. 5. 8 zum Grunde geleget wird, ſo entſtehet daraus folgende Progreſsion:

3. 5. 8. 13. 21. 34. 55. 89. 144. 233 u. ſ. w.

§. 210.

§. 210.

Um die zehnerley verſchiednen ſtetigen Proportionen mit einem Blick überſehen zu können, füge ich folgende Buchſtabenformeln hinzu, in welchen durch a das kleinſte Glied; durch b das mittelſte und durch c das gröſte vorgeſtellet wird, und nach Anleitung welcher die daneben ſtehenden Exempel, worinnen alle Proportionen mit einerley Zahlen anheben, mit leichter Mühe unterſuchet werden können. *)

1) arithmet. Proportion	a — b = b — c	6.	12.	18
2) geometriſche . .	a : b = b : c	6.	12.	24
3) harmoniſche . .	a — b : b — c = a : c	6.	8.	12
4) contraharmoniſche .	a — b : b — c = c : a	6.	10.	12
5) erſte contrageom. .	a — b : b — c = b : a	6.	12.	15
6) zweyte contrageom. .	a — b : b — c = c : b	6.	24.	36
7) erſte arithm. geom. .	a — c : a — b = c : a	6.	8.	9
8) zweyte arithm. geom.	b — c : a — c = a : c	6.	7.	9
9) dritte arithm. geom.	a — b : a — c = a : b	6.	9.	10½
10) contra arithmetiſche	b — c : a — c = a : b	6.	10.	16

Wenn die Proportionen unſtetig ſind: ſo iſt das kleinſte Glied a, das zweyte gröſere b, das dritte gröſere c, und das gröſte Glied d, z. E. in den vier erſten Proportionen:

1) arithmet. Proportion	a — b = c — d	6.	12.	18. 24
2) geometriſche . .	a : b = c : d	6.	12.	24. 48
3) harmoniſche . .	a — b : c — d = a : d	6.	8.	12. 18
4) contraharm. . .	a — b : c — d = d : a	6.	7½	11¼. 12

§. 211.

In den erſten Zeiten der Mathematik waren, nach der Erzählung des Boethius, nicht mehr als zweyerley Proportionen bekannt, die arithmetiſche und geometriſche. Die Tonkunſt gab Gelegenheit zur Erfindung einer vermiſchten oder alterirten Proportion, welche in der Ordnung der Proportionen den dritten Rang einnimmt, und eine harmoniſche Proportion genennet wird. Dieſe dreyerley Proportionen ſind vom Pythagoras auf den Plato und Ariſtoteles

*) Das Zeichen — zeiget nichts weiter als die Differenz zweyer Glieder an. Das kleinere Glied wird vom gröſern abgezogen, und die Differenz allezeit als poſitiv angeſehen.

ſtoteles gekommen. Aus der Umkehrung der harmoniſchen Proportion ward eine zweyte alterirte Proportion, unter der Benennung einer contraharmoniſchen erzeuget. Die Forſchbegierde vielleicht mehr als die Nothwendigkeit, brachte in der Folgezeit eine dritte alterirte Proportion hervor, welche man eine erſte contrageometriſche benennte, und aus deren Umkehrung eine zweyte contrageometriſche erfunden ward. Man wollte endlich in Abſicht auf die Anzahl der Proportionen ein volles Zehend haben, und dieſes gab Gelegenheit, daß annoch vier alterirte Proportionen, als die erſte, zweyte und dritte arithmetiſch geometriſche, und die contraarithmetiſche Proportion hinzugefüget wurden.

§. 212.

Wenn die ſechs leztern Arten dieſer zehn Proportionen auch von keinem zur Zeit bekannten groſſen Nutzen ſind: ſo gehören ſie dennoch zur Hiſtorie der Mathematik, und vielleicht iſt durch ihre Hervorziehung aus der Vergeſſenheit der Speculation mancher Perſonen ein Genügen geleiſtet worden, welche von der Gewißheit mehrerer Arten von Proportionen als der gewöhnlichen, verſichert ſeyn wollen, und weder den Nicomach, noch den Boethius oder Stiefeln bey der Hand haben. Ich habe mich übrigens bemühet, dieſe ungewöhnlichen Proportionen nicht nur überhaupt auf eine deutlichere Art zu erklären, als von jenen Scribenten geſchehen iſt, ſondern auch hin und wieder eine neue leichtere Auflöſung hinzugeſetzet. Unter denjenigen, welche ſich hauptſächlich und weitläuftig über die beyden Hauptprogreßionen, die arithmetiſche und geometriſche ausgebreitet haben, ſind zu merken Andreas Taquet in ſeiner Arithmet. Theor. & Prax., und Johannes Walliſius im Iſten Vol. ſeiner mathemat. Werke. Es ſind auch Progreßionen in Brüchen möglich, die zur Erfindung neuer Proportionen in ganzen Zahlen Gelegenheit geben können. Ich übergehe aber die Lehre davon.

Zweytes

Zweytes Buch

welches die

Anfangsgründe

des

figürlichen Calculs

enthält.

Anfangsgründe des figürlichen Calculs.

§. 213.

Der figürliche Calcul beſteht in der Lehre von den figürlichen Zahlen; und es giebt zweyerley Arten figürlicher Zahlen, flache und körperliche *). Die flachen Zahlen, die ich hinfort vieleckigte oder Polygonalzahlen nennen werde, entſpringen aus der Zuſammenſetzung ſimpler Zahlen, überhaupt geſprochen, ſo wie in der Geometrie die Polygone aus der Zuſammenſetzung von Linien entſpringen; und die körperlichen Zahlen werden aus der Zuſammenſetzung von Polygonalzahlen erzeuget, ſo wie in der Geometrie die Körper aus zuſammengeſetzten Polygonen erzeuget werden. Die Zuſammenſetzung der Zahlen geſchicht entweder durch die Addition oder Multiplication allein, oder durch die Verbindung der Addition mit der Multiplication. Der Proceß durch die Addition giebet Polygonal- und Pyramidalzahlen von unendlichen Ecken. Der Proceß durch die Multiplication ſchränket ſich auf das bloße Viereck ein, und giebet quadratiſche, paral-

*) Man ſehe den §. 2. der Einleitung zum Progreſſionalcalcul, S. 2.

parallelogrammiſche, cubiſche, prismatiſche und parallelepipediſche, und daher entſtehende viereckigte Pyramidalzahlen. Wenn eine Polygonalzahl mit ihrer Seite multiplicirt wird, ſo entſtehet eine ſäulenförmige oder Columnarzahl; und aus der Zuſammenſetzung einer Pyramidal- und Columnarzahl nach gewiſſen Regeln entſtehen thurmförmige oder Pyrgoidalzahlen. Die lezten körperlichen Zahlen ſind die Polyedralzahlen, welche mit einigen der vorhergehenden einerley ſind.

Erſter Abſchnitt.

Von Erfindung der figürlichen Zahlen durch die Addition.

§. 214.

Es iſt in der Einleitung zum Progreßionalcalcul, §. 4. geſaget worden, daß die figürlichen Zahlen nach einer beſtändigen Regel auf einander folgen, und daß ſie in Rückſicht auf dieſe Ordnung zu den Progreßionalzahlen gehören. Ich bemerke allhier, daß die Progreßion, zu welcher die durch die Addition zu erfindenden figürlichen Zahlen gehören, die zuſammengeſetzte arithmetiſche Progreßion iſt, und zwar daß jede zweyſtuffige Progreßion nichts als Polygonalzahlen, und jede dreyſtuffige nichts als Pyramidalzahlen enthält. Da jede zweyſtuffige Progreßion die Summe einer einfachen arithmetiſchen Progreßion iſt: ſo kann eine Polygonalzahl durch die Summe zweyer oder mehrer einfacher arithmetiſchen Progreßionalzahlen beſchrieben werden; und da jede dreyſtuffige Progreßion die Summe einer zweyſtuffigen Progreßion iſt: ſo kann eine Pyramidalzahl durch die Summe zwey oder mehrer Polygonalzahlen beſchrieben werden. Die Polygonal- und Pyramidalzahlen werden alſo erfunden, ſo wie eine zwey- und dreyſtuffige

arith-

arithmetiſche Progreßion erfunden wird, oder jede zweyſtuffige arithmetiſche Progreßion iſt eine Progreßion von Polygonal- und jede dreyſtuffige iſt eine Progreßion von Pyramidalzahlen.

Anmerkung.

Die von der Polygonalzahl allhier gegebne Beſchreibung iſt arithmetiſch; da ſolche, geometriſch betrachtet, nichts anders als eine ſolche Zahl iſt, deren Einheiten ſich in ein Polygon verſetzen laßen, wie bereits in der Einleitung zum Progreßionalcalcul §. 2. gelehret worden.

§. 215.

Sowohl die Polygonal als Pyramidalzahlen können in eigentliche und uneigentliche unterſchieden werden. **Eigentliche Polygonalzahlen** ſind, welche ſich in reguläre oder wenigſtens in ſymmetriſche Polygone verſetzen laſſen; und die von ihnen ſummirte Zahlen heiſſen **eigentliche Pyramidalzahlen.**

Uneigentliche Polygonal- und Pyramidalzahlen ſind, welche nicht die Eigenſchaften der eigentlichen haben, und hieher gehören alle Zahlen, welche in der Lehre vom combinatoriſchen Calcul, in den Abſchnitten von der Verbindung wiederholter Größen vorkommen werden.

Wenn von einer Polygonal oder Pyramidalzahl, ohne Beſtimmung derſelben nach ihrem Unterſcheid, die Rede iſt, ſo verſtehet man allezeit die eigentlichen, und von dieſen wird allhier gehandelt werden.

§. 216.

So verſchieden die Polygone in der Geometrie ſind, ſo verſchieden ſind die Polygonalzahlen. Es giebet alſo z. E.

Trigonalzahlen oder dreyeckigte Zahlen;
Tetragonal- oder viereckigte Zahlen;
Pentagonal- oder fünfeckigte Zahlen;
Hexagonal- oder ſechseckigte Zahlen;
Heptagonal- oder ſiebeneckigte Zahlen;
Octogonal- oder achteckigte Zahlen;

Ennea-

Enneagonal- oder neuneckigte Zahlen;
Dekagonal- oder zehneckigte Zahlen;
Hendekagonal- oder eilfeckigte Zahlen;
Dodekagonal- oder zwölfeckigte Zahlen;
u. ſ. w.

Anſtatt der griechiſchen Benennung bedienen ſich einige der lateiniſchen:

Triangular-	Octangular-
Quadrangular-	Nonangular-
Quinquangular-	Decangular-
Serangular-	Undecangular-
Septangular-	Duodecangularzahlen, u. ſ. w.

§. 217.

Alle Polygonalzahlen ſind entweder ſimpel oder central. **Simple Polygonalzahlen** ſind, die aus einer mit der Einheit ausdrücklich anhebenden einfachen arithmetiſchen Progreßion entſtehen. **Central oder volle Polygonalzahlen** ſind, die aus einer einfachen arithmetiſchen Progreßion entſtehen, in welcher die Einheit ſtatt einer Nulle adoptiret worden.

§. 218.

Die Pyramiden richten ſich in der Verſchiedenheit nach der Natur der Polygone, von welchen ſie entſpringen. Es giebet alſo

Trigonalpyramidalzahlen, oder dreyeckigte pyramidenförmige Zahlen;
Tetragonalpyramidal-, oder viereckigte pyramidenförmige Zahlen;
Pentagonalpyramidal-, oder fünfeckigte pyramidenförmige Zahlen, u. ſ. w.

und alle dieſe verſchiedene Geſchlechte von Pyramidalzahlen können entweder ſimpel oder central ſeyn.

Zweyter Abſchnitt.
Von den ſimpeln Polygonalzahlen.

§. 219.

Die ſimpeln Polygonalzahlen ſind **trigonal**, wenn die Glieder der mit 1 anfangenden arithmetiſchen Progreßion, aus welcher ſie ſummiret worden, um 1 unterſchieden ſind; **tetragonal**, wenn dieſe Glieder um 2 differiren; **pentagonal**, wenn ſie um 3 differiren; **hexagonal**, wenn ſolche um 4 differiren, u. ſ. w. als:

Trigonalzahlen.	arithmet. Progreß.	Differenz.
1	1	0
3	2	1
6	3	1
10	4	1
15	5	1 u. ſ. w.

Tetragonalzahlen	arithmet. Progreß.	Differenz.
1	1	0
4	3	2
9	5	2
16	7	2
25	9	2 u. ſ. w.

Pentagonalzahlen	arithmet. Progreß.	Differenz.
1	1	0
5	4	3
12	7	3
22	10	3
35	13	3 u. ſ. w.

Hexagonalzahlen	arithmet. Progreß.	Differenz.
1	1	0
6	5	4
15	9	4
28	13	4
45	17	4 u. ſ. w.

Anmerkung.

Die ſimpeln Trigonalzahlen 1, 3, 6, 10, 15, 21, u. ſ. w. ſind mit den combinatoriſchen Zahlen einerley, welche in der Lehre vom combinatoriſchen Calcul im Abſchnitt von der ausſchlieſſenden Verbindung unähnlicher Größen, unter der Benennung von binariſchen Zahlen, vorkommen werden.

§. 220.

Um ſofort zu wiſſen, was für eine Art von Polygon aus jeder Art einer einfachen arithmetiſchen Progreßion hervorgehet, darf man alſo nur die Zahl 2 zur Differenz addiren.

diren. Iſt die Differenz 1, ſo iſt das Polygon dreyeckigt, weil 1 + 2 = 3. Iſt die Differenz 2, ſo iſt das Polygon viereckigt, weil 2 + 2 = 4. Iſt die Differenz 10, ſo iſt das Polygon zwölfeckigt, weil 10 + 2 = 12, und iſt die Differenz 11, ſo iſt das Polygon dreyzehneckigt, weil 11 + 2 = 13, u. ſ. w. Im Gegentheil iſt die Differenz der zu ſummirenden einfachen arithmetiſchen Progreßion allezeit um 2 weniger, als das daher entſtehende Polygon Ecken oder Winkel hat. Wenn alſo die Zahl der Ecken 3 iſt, ſo iſt die Differenz der Progreßion 1; iſt die Zahl der Ecken 4, ſo iſt die Differenz der Progreßion 2; iſt die Zahl der Ecken 12, ſo iſt die Differenz der Progreßion 10, u. ſ. w. Es kann aus dieſem Grunde die mit 2 vermehrte Differenz einer einfachen arithmetiſchen Progreßion die **Eckzahl** oder **Winkelzahl**, welche das Geſchlecht einer Polygonale anzeiget, genennet werden, und dieſe iſt in den Trigonalzahlen die Zahl 3; in den Tetragonalzahlen die Zahl 4; in den Pentagonalzahlen die Zahl 5, u. ſ. w.; ſo wie gegentheils die Anzahl der ſummirten Glieder einer Progreßion die **Wurzel, Seite, Seiten-** oder **Lateralzahl** der Polygonale genennet wird. Auf dieſe Weiſe iſt

in den ſimpeln Trigonalzahlen.

Die Zahl 1 die Seite oder Wurzel von 1
— 2 die Seite von 3 = 1 + 2
— 3 die Seite von 6 = 1 + 2 + 3
— 4 die Seite von 10 = 1 + 2 + 3 + 4
u. ſ. w.

in den ſimpeln Tetragonalzahlen.

Die Zahl 1 die Seite oder Wurzel von 1
— 2 die Seite von 4 = 1 + 3
— 3 die Seite von 9 = 1 + 3 + 5
— 4 die Seite von 16 = 1 + 3 + 5 + 7.
u. ſ. w.

in den simpeln Pentagonalzahlen.

Die Zahl 1 die Seite von 1
— 2 die Seite von 5 = 1 + 4
— 3 die Seite von 12 = 1 + 4 + 7
— 4 die Seite von 22 = 1 + 4 + 7 + 10
u. s. w.

in den simpeln Hexagonalzahlen.

Die Zahl 1 die Seite von 1
— 2 die Seite von 6 = 1 + 5
— 3 die Seite von 15 = 1 + 5 + 9
— 4 die Seite von 28 = 1 + 5 + 9 + 13
u. s. w.

In den Trigonalen ist die Zahl der Seite allezeit der gröſten der summirten gleich, wie aus vorstehendem Exempel zu ersehen ist; aber nicht in den folgenden Geschlechten der Polygonalen, welches man wohl zu merken hat.

§. 221.

Die geometrische Vorstellung einer Polygonale oder eines arithmetischen Polygons, kann durch Punkte, Nullen, Kugeln oder Würfel von gleicher Gröſe geschehen, und erfordert 1) so viele Punkte überhaupt, als Einheiten in der gegebenen Polygonale enthalten sind. Auf diese Weise erfordert die Trigonale 10 zehn Punkte; die Tetragonale 9 neun Punkte, u. s. w. 2) Von diesen Punkten müssen so viele besonders auf jede Seite der Figur beschrieben werden, als zur Hervorbringung der Polygonale simple Progreßionalzahlen summiret worden sind. Auf diese Weise müssen auf jede Seite der Trigonale 10 vier Punkte kommen, weil sie aus vier Progreßionalzahlen summiret worden, als aus 1 + 2 + 3 + 4 = 10; und auf jede Seite der Tetragonale 9 müssen drey Punkte kommen, weil sie aus drey Progreßionalen summiret worden, nemlich aus 1 + 3 + 5 = 9. u. s. w. Nach diesen Gesetzen sind die Trigonalen 3 und 6 bey Fig. 3 und 4 Tab. I; die Tetragonale 4 bey Fig. 8. Tab. I, und die Pentagonale 5,

bey Fig 11. Tab. I. beſchrieben worden. Man pfleget aber, wenn die Seite eines Polygons eine große Zahl iſt, die in dem Umfange derſelben enthaltnen kleinern ähnlichen Polygone, alle ihrer Größe nach von einander zu unterſcheiden. Ich gebe davon folgende Exempel, und zwar

1) von der **Trigonale** 15, welche alle vier vorhergehenden kleinern Trigonalen 10, 6, 3 und 1 enthält. Fig. 5, Tab. I. Die ganze Figur faſſet alſo fünf Triangel in ſich, wovon der fünfte und größte durch 1, 11, 15; der vierte durch 1, 7, 10; der dritte durch 1, 4, 6; der zweyte durch 1, 2, 3 und der erſte und kleinſte durch 1 bemerket iſt. Die Zahl 1, welche in jedem Geſchlecht der Polygonalen, ſo wohl in 3 als 4, 5 und mehreckigten, die allererſte Polygonale iſt, kann bey ſolcher Vorſtellung nirgends anders als in derjenigen Ecke, von welcher die Polygone anfangen, ihren Platz bekommen, und wird alſo nicht in die Mitte geſetzet, wie bey Fig. 2. 7. und 10 Tab. I. wo keine größere Polygonale als 1 erſcheint.

2) In dem Umfang der **Tetragonale** 36, bey Fig. 9. Tab. I. ſind die ſechs Tetragonen oder Quadrate 36, 25, 16, 9, 4 und 1 enthalten, und man findet die 36 bey 1, 26, 31, 36; die 25 bey 1, 17, 21, 25; die 16 bey 1, 10, 13, 16; die 9 bey 1, 5, 7, 9; die 4 bey 1, 2, 3, 4, und die 1 bey 1.

3) In dem Umfang der **Pentagonale** 22, bey Fig. 12, Tab. I. ſind die vier Pentagonen 22, 12, 5 und 1 enthalten.

4) In dem Umfang der **Hexagonalzahl** 28, bey Fig. 2. Tab. II. ſind die vier ſimpeln Hexagonalen 28, 15, 6 und 1 enthalten.

Anmerkung.

Die aus der bloſſen Einheit beſtehenden Polygonale, z. E. die Trigonale 1, die Tetragonale 1, die Pentagonale 1. u. ſ. w. werden vom **Boethius**, ſo wie bey Fig. 2. 7. 10. Tab. I. vorgeſtellet.

§. 222.

§. 222.

Da die arithmetischen Polygone die geometrischen bloß nachahmen, und sie nicht nach ihrem geometrischen Inhalt in Absicht auf das Flächenmaaß ausdrücken, ein einziges Geschlecht derselben ausgenommen, wie bald gezeiget werden wird: so ist es einerley, durch was für Arten von Polygonen eine Polygonalzahl geometrisch ausgedrücket wird, durch reguläre oder symmetrische, weil alle diese Arten von Figuren nirgends anders als in die Geometrie gehören. Indessen müssen alle diese Polygone gleichseitig seyn, und ich nehme bloß die länglichten Vierecke, von welchen im Abschnitt von den figürlichen Zahlen durch die Multiplication gehandelt werden wird, und allhier denjenigen rechtwinklichten Triangel, an welchem die Grundlinie und der Cathetus gleich sind, und welcher, wenn er auf die Hypotenuse gestellet wird, einen gleichschenklichten Triangel präsentiret, davon aus; weil die Eigenschaft der Trigonalzahlen an sich, das ist, in Absicht auf ihre Folge und Entstehungsart, im geringsten nicht dadurch gestöret wird, daß der Abstand von einem Punkt zum andern auf der Hypotenuse, nicht dem Abstand dieser Punkte von einander auf der Grundlinie oder auf dem Cathetus gleich ist. Ich gebe so viele Exempel von symmetrischen, als regulären arithmetischen Polygonen, und man findet

1) die Trigonale 15, in einem rechtwinklichten Triangel, bey Fig. 6. Tab. I.
2) Die Tetragonale 36, in einem Rhombus, bey Fig. 5. Tab. VII.
3) Die Pentagonale 22, in einem aus einem Quadrate und gleichseitigen Triangel zusammengesetzten symmetrischen Fünfeck bey Fig. 1. Tab. II.
4) Die Hexagonale 66, in einem aus einem Quadrat, und zwey gleichseitigen Triangeln zusammengesetzten symmetrischen Sechseck bey Fig. 6. Tab. VII.

§. 223.

Jedes arithmetische Polygon kann auf zweyerley Art ausgemessen werden, entweder durch die Summe seiner

Punkte überhaupt, oder durch die Summe seiner Seitenpunkte besonders. Jenes machet den **numerischen Inhalt** des Polygons, und dieses seinen **Perimeter** aus.

Den **numerischen Inhalt** eines Polygons giebet die gröſte Zahl desselben; und also ist in dem Triangel bey Fig. 5. Tab. I, die Zahl 15 der numerische Inhalt oder Wehrt dieses Triangels; in dem Quadrat bey Fig. 9. Tab. I. ist die Zahl 36 der Inhalt dieses Quadrats; in dem Pentagon bey Fig. 12. Tab. I. ist die Zahl 22 der Inhalt dieses Pentagons, u. s. w.

Hingegen ist der **Perimeter** des vorigen Triangels die Zahl 12, weil die mit 1, 2, 4, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 10, 6, 3 bemerkten Punkte nicht mehr als zwölf Punkte zusammen machen. Der Perimeter des vorigen Quadrats ist aus ähnlichen Ursachen die Zahl 20, und der Perimeter des vorigen Pentagons die Zahl 15.

§. 224.

Der numerische Inhalt eines Polygons muß mit dem geometrischen Flächen- oder quadratischen Inhalt desselben nicht vermischet werden. Lezterer findet nirgends als in denjenigen Polygonen statt, welche aus stetigen oder zusammenhängenden Gröſſen bestehen, d. i. in den geometrischen Polygonen; und ersterer nur in denjenigen, die aus unstetigen oder abgesonderten Gröſen bestehen, dergleichen die Nachahmungen der geometrischen Polygone in Zahlen, d. i. die arithmetischen Polygone sind. Es giebet also der Inhalt eines Triangels, Pentagons oder Hexagons, arithmetisch betrachtet, eine ganz andere Zahl, als der Flächeninhalt dieser Figuren, geometrisch betrachtet, giebet. Beschreibet einen gleichseitigen Triangel ABD, Fig. 1. Tab. VIII. dessen jede Seite = 1°2′ sey, oder 12 gleiche Theile enthalte. Wenn man die Grundlinie AB mit der Höhe CD = 10, 39 multipliciret, und das Product halbiret: so kömmt etwas über 6°2′ für seinen Flächeninhalt. Setzet anitzo einen arithmetischen Triangel zusammen, der entweder so viele kleinere Triangel enthält, als jener gleiche Theile

auf

auf jeder Seite begreiffet, nemlich 12, bey Fig. 2. Tab. VIII oder der so viele kleinere Triangel enthält, als jener auf jeder Seite Theilungspunkte hat, nemlich 13, bey Fig. 3. Tab. VIII. In dem ersteren Falle ist der numerische Inhalt des Triangels die Zahl 78, und in dem andern die Zahl 91. Das einzige Geschlecht der regulären Tetragonen oder Quadrate, in dem Falle, wenn eine Seite des Quadrats so viel Punkte bekömmt, als ihr geometrische Theile zugeeignet werden, machet in diesem Punkt eine Ausnahme, indem der arithmetische Wehrt derselben überall mit dem geometrischen übereinstimmet, wovon die Ursache in der Aehnlichkeit des Maaßes mit dem auszumessenden Polygon zu suchen ist. Es sey ein Quadrat, dessen jede Seite = 6 angenommen wird. Wenn nun $6 \times 6 = 36$: so ist der Flächeninhalt desselben die Zahl 36, und eben diese Zahl kömmt für seinen numerischen Inhalt, wenn man jeder Seite des Vierecks so viele Punkte giebet, als sie Theile hat, und z. E. das bey Fig. 9. Tab. I. aus den sechs Quadraten 1, 4, 9, 16, 25, und 36 bestehende Quadrat mit dem vorhergehenden concipirten geometrischen vergleichet.

§. 225.

Der arithmetische Perimeter eines Polygons ist mit dem geometrischen überall einerley, wenn wir die zwischen jeden äussersten zwey Punkten enthaltne Länge für 1 annehmen. Es sey der Triangel bey Fig. 5. Tab. I. Selbiger enthält auf jeder Seite fünf in gleicher Weite von einander abstehende Punkte, und ist also auf jeder Seite in vier gleiche Theile getheilet. Wenn nun $4 \times 3 = 12$, so ist der geometrische Perimeter dieses Triangels die Zahl 12. Es ist aber der arithmetische Perimeter dieses Triangels auch 12, wie bereits §. 223. bemerket worden. Es sey ferner das Quadrat bey Fig. 9. Tab. I. Da jede Seite desselben sechs in gleicher Weite von einander abstehende Punkte enthält, und also in fünf gleiche Theile getheilet ist: so kömmt für den geometrischen Perimeter $20 = 5 \times 4$. So viele Punkte aber enthält auch der arithmetische Perimeter

durch die mit 1, 2, 5, 10, 17, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 25, 16, 9 und 4 bemerkten Punkte, deren Anzahl nur summiret werden darf.

(I.) Aus der Winkel- und Seitenzahl den arithmetischen Perimeter eines Polygons zu finden. §. 226.

Multipliciret die Winkelzahl durch die Seitenzahl, und ziehet von dem Product die Winkelzahl ab; oder,

Multipliciret die um 1 verminderte Seitenzahl durch die Winkelzahl. Z. E. wenn die Winkelzahl = 3, und die Seitenzahl = 5, so ist

$3 \times 5 = 15$

und $15 - 3 = 12$ der gefundne Perimeter des Polygons, welches vermöge der Winkelzahl 3 ein Triangel ist. Man sehe bey Fig. 5. Tab. I. einen Triangel, dessen Seitenzahl = 5 ist.

oder $4 = 5 - 1$

$\frac{3}{12}$ der gefundne Perimeter des ꝛc.

(II) Den numerischen Inhalt eines Triangels aus der gegebnen Seite desselben, oder aus der gegebnen Wurzel die simple Trigonale selbst zu finden. §. 227.

Multipliciret die Seitenzahl mit der nächsten höhern Zahl, und theilet das Product mit 2. Es sey die Seitenzahl 3, so ist

$3 \times 4 = 12$

$2)\overline{6}$ die gefundne simple Trigonale, oder der gefundne numerische Wehrt des gegebnen Triangels.

(III.) Den numerischen Inhalt eines Quadrats, oder die simple Tetragonale selbst zu finden. §. 228.

Quadriret die Wurzel. Z. E. wenn die Wurzel = 4, und $4^2 = 16$, so ist die Zahl 16 die gefundne simple Tetragonale,

gonale, oder der gefundne numerische Inhalt des gegebnen Quadrats.

(IV.) Den numerischen Wehrt eines jeden Polygons aus dessen Winkel- und Seitenzahl; oder aus der Winkel- und Seitenzahl die Polygonale selbst zu finden. §. 229.

Erste Auflösung.

1) Quadriret die Seitenzahl. 2) Subtrahiret 4 von der Winkelzahl, und 3) multipliciret mit dem Rest die simple Trigonale der um 1 verminderten Seitenzahl. 4) Addiret das Product zum Quadrat der ersten Operation. Es sey die Winkelzahl = 6, und die Seitenzahl = 5, welche — 1 = 4, deren Trigonale nach der vorigen zweyten Specialregel gefunden wird.

1) $5^2 = 25$
2) $6 - 4 = 2$
3) $5 - 1 = 4$
5
20
2) $\frac{20}{10}$ die Trigonale der um 1 verminderten Seitenzahl 5.
$\frac{2}{20}$
4) 20
25
45 der gefundne numerische Wehrt des Polygons, Winkelzahl 6 ein Hexagon ist.

welches vermöge der

Zweyte Auflösung.

1) Multipliciret die simple Trigonale der um 1 verminderten Seitenzahl durch die Winkelzahl. 2) Quadriret die um 1 verminderte Seitenzahl, und 3) ziehet dieses Quadrat — 1 von dem Product der ersten Operation ab. Es sey wiederum die Winkelzahl 6 und die Seitenzahl 5.

1) $5-1=4$

$$\frac{5}{20}$$

2) $\frac{20}{10}$ die Trigonale der Seitenzahl — 1.

$$\frac{6}{60}$$

2) $5-1=4$, und $4^2=16$

$$\frac{-\ 1}{15}$$

3) $60-15=45$ die gefundne Polygonale.

Dritte Auflösung.

1) Multipliciret die um 1 verminderte Seitenzahl mit der Winkelzahl; halbiret das Product, und multipliciret den Quotienten mit der Seitenzahl. 2) Quadriret die um 1 verminderte Seitenzahl, und 3) subtrahiret vom Product der ersten Operation das vorige um 1 verminderte Quadrat. Es sey die Winkelzahl 6 und die Seitenzahl 5.

1) $5-1=4$

$$\frac{6}{24}$$

2) $\frac{24}{12}$ und $12\times 5=60$

2) $5-1=4$, und $4^2=16$

$$\frac{-\ 1}{15}$$

3) $60-15=45$ die gefundene Hexagonale.

Vierte Auflösung.

1) Multipliciret die Seitenzahl selbst mit der um 4, und ihr Quadrat mit der um 2 verminderten Winkelzahl. 2) Subtrahiret das erstere Product von dem leztern, und theilet den Rest mit 2. Es sey wiederum die Winkelzahl 6 und die Seitenzahl 5. Also

1) $5\times(6-4)=5\times 2=10$

$(5\times 5)\times(6-2)=25\times 4=100$

2) $100 - 10 = 90$

$\frac{90}{2} = 45$ die gefundne Hexagonale.

§. 230.

Wir wissen, wie der numerische Inhalt eines Polygons gesuchet wird. Wir kehren die Frage um, und verlangen die Seite oder die Seitenzahl einer Polygonale zu finden. Man nennet diesen Proceß insgemein die Ausziehung der Wurzel, von welcher in Absicht auf die Quadratzahlen, in dem ersten Buche dieses Werks gehandelt worden ist.

(I.) Specialregel. Aus einer gegebnen simpeln Trigonale die Wurzel zu ziehen. §. 231.

Erste Auflösung.

1) Octuplirt die gegebne Trigonale und addiret 1. 2) Ziehet aus dem Collect die Quadratwurzel; subtrahiret 1, und halbiret den Rest. Z. E. wenn die Trigonale $= 55$, so ist 1) $8 \times 55 = 440$

$+ 1$

2) $\sqrt{441}$

21

$- 1$

20

2) 10 die gefundne Trigonalwurzel.

Zweyte Auflösung.

Addiret zu dem Duplo der Trigonalzahl $\frac{1}{4} = 0,25$. Ziehet aus dem Collect die Quadratwurzel und subtrahiret $\frac{1}{2}$, als:

$2 \times 55 = 110$

$110 + \frac{1}{4} = 110,25$

$\sqrt{110,25} = 10,5$

$- \frac{1}{2} = 0,5$

10 die gefundne Trigonalwurzel.

(II.) Generalregel. Aus jeder gegebnen simpeln Polygonale die Wurzel zu ziehen. §. 232.

Erste Auflösung.

1) Dupliret die gegebne Polygonale, und dividiret das Product mit der um 2 verminderten Winkelzahl. 2) Ziehet aus dem Quotienten die Quadratwurzel, und addiret 1, wenn die Winkelzahl eine 5 oder darüber ist.

Auf die Reste der Division und der Ausziehung der Quadratwurzel brauchet man nicht Acht zu haben.

Z. E. Wenn die Trigonale 45, so ist

$$\begin{array}{r} 45 \\ 2 \\ \hline 90 \end{array}$$

$\sqrt{\ }$ 9 die gesundne Trigonalwurzel. Die Probe ist (§. 227.) $9 \times 10 = 90$ u. $\frac{90}{2} = 45$, oder $9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 45$. Da die Winkelzahl der Trigonalen allezeit eine 3, und $3-2=1$ ist; die Zahl 1 aber nicht dividiret: so bleibet die in der ersten Operation vorgeschriebne Division mit der um 2 verminderten Winkelzahl allezeit weg.

Wenn die Pentagonalzahl 12, so ist

$$\begin{array}{r} 12 \\ 2 \\ \hline 24 \end{array}$$

$5-2=3)\ \frac{8}{\sqrt{\ }\ 2}$

$+\ 1$

3 die gesundne Pentagonalwurzel.

Die Probe wird nach der Regel gemacht: den numerischen Inhalt eines Polygons aus dessen Winkel- und Seitenzahl zu finden. (§. 229.)

Anmerkung.

Die Ausziehung der Wurzel aus den durch die Addition entstehenden Tetragonalzahlen wird nach der Regel der Ausziehung der Quadratwurzel, so wie solche im ersten Buche dieses Werks gelehret worden, kürzer verrichtet.

Zweyte Auflösung.

Diese Regel ist etwas weitläuftiger, als die vorhergehende. Sie hat aber den Vortheil, daß, wenn die gegebne

gebne Zahl eine unvollkommne Polygonale ist, und solche folglich eine gebrochne Zahl zur Wurzel hat, diese Wurzel desto accurater entwickelt wird.

1) Dupliret die gegebne Polygonale, und dividiret das Product mit der um 2 verminderten Winkelzahl. 2) Subtrahiret die Zahl 4 sowohl von der Winkelzahl als ihrem Duplo, und setzet beyde Reste in Form eines Bruchs zusammen, dergestalt, daß der erste Rest der Zähler und der zweyte der Nenner wird. 3) Addiret das Quadrat dieses Bruchs zu dem Quotienten der ersten Operation, und ziehet aus dem Collect die Quadratwurzel. 4) Zu der gefundnen Wurzel addiret den in der zweyten Operation gefundnen Bruch.

α) Es sey die Pentagonale 12, deren Winkelzahl = 5.

1) $\frac{2 \times 12}{5-2} = \frac{24}{3} = 8$

2) $\frac{5-4}{10-4} = \frac{1}{6}$

3) $\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$

und $8 + \frac{1}{36} = \frac{289}{36}$

und $\sqrt{\frac{289}{36}} = \frac{17}{6}$

4) $\frac{17}{6} + \frac{1}{6} = \frac{18}{6} = 3$ die gefundne Pentagonalwurzel.

β) Es sey die Hexagonale 28, deren Winkelzahl = 6.

1) $\frac{2 \times 28}{6-2} = \frac{56}{4} = 14$

2) $\frac{6-4}{12-4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

und $14 + \frac{1}{16} = \frac{225}{16}$

und $\sqrt{\frac{225}{16}} = \frac{15}{4}$

4) $\frac{15}{4} + \frac{1}{4} = \frac{16}{4} = 4$ die gefundne Hexagonalwurzel.

Wenn eine Trigonalzahl gegeben wird, so muß in der zweyten Operation die Winkelzahl 3 von 4 abgezogen werden; der Rest ist der Zähler des Bruchs. In der vierten

vierten Operation muß subtrahiret werden; z. E. wenn die Trigonale = 45, so ist

1) $\frac{2 \times 45}{3-1} = \frac{90}{2} = 45$

2) $\frac{4-3}{6-4} = \frac{1}{2} = 0,5$

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ 0,25 und $90\frac{1}{4} = 90,25$,
und $\sqrt{90,25} = 9,5$.

4) $9,5 - 0,5 = 9$ die gefundne Trigonalwurzel.

Ich füge aynoch eine unvollkommne Pentagonale 141 hinzu, um aus selbiger die Wurzel zu ziehen.

1) $\frac{2 \times 141}{5-2} = \frac{282}{3} = 94$ 2) $\frac{5-4}{10-4} = \frac{1}{6}$

3) $\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$, und $94 + \frac{1}{36} = \frac{3385}{36}$, und $\sqrt{\frac{3385}{36}} = \frac{58}{6}$

4) $\frac{58}{6} + \frac{1}{6} = \frac{59}{6} = 9\frac{5}{6}$ die gefundene Pentagonalwurzel aus 141 ist also $9\frac{5}{6}$.

§. 233.

Es haben die simpeln Polygonale die Eigenschaft, daß sie durch die Multiplication mit einer gewissen Zahl, und durch die Addition einer andern zum Product, zu Quadratzahlen werden. Ich will diese Eigenschaft an den vierzehn erstern Polygonen, welche vom Dreyeck bis zum Siebzehneck gehen, darlegen.

III. Eck. Multipliciret die Trigonalzahlen mit 8, und addiret 1, als

$$8 \text{ mal} + 1 = \sqrt{\frac{1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 21}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}}$$

d. heißt $8 \times 1 = 8$ und $8 + 1 = 9$ deren Wurz. $= 3$
$8 \times 3 = 24$ und $24 + 1 = 25$ deren Wurz. $= 5$
$8 \times 6 = 48$ und $48 + 1 = 49$ deren Wurz. $= 7$,
und so weiter. Es gründet sich hierauf die obige Specialregel: **Aus einer gegebnen simpeln Trigonale die Wurzel zu ziehen.**

V. Ecк. Multipliciret die Pentagonalzahlen mit 24, und addiret 1; als:

$$24 \text{ mal} + 1 = \sqrt{\frac{1 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 22 \cdot 35}{25 \cdot 121 \cdot 289 \cdot 529 \cdot 841}} \quad \frac{}{5 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29}$$

VI. Ecк. Multipliciret die Hexagonalzahlen mit 8, und addiret 1, als:

$$8 \text{ mal} + 1 = \sqrt{\frac{1 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 28 \cdot 45}{9 \cdot 49 \cdot 121 \cdot 225 \cdot 361}} \quad \frac{}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 19}$$

VII. Ecк. Multipliciret die Heptagonalzahlen mit 40, und addiret 9, als:

$$40 \text{ mal} + 9 = \sqrt{\frac{1 \cdot 7 \cdot 18 \cdot 34 \cdot 55}{49 \cdot 289 \cdot 729 \cdot 1369 \cdot 2209}} \quad \frac{}{7 \cdot 17 \cdot 27 \cdot 37 \cdot 47}$$

VIII. Ecк. Multipliciret die Octogonalzahlen mit 3 und addiret 1, als:

$$3 \text{ mal} + 1 = \sqrt{\frac{1 \cdot 8 \cdot 21 \cdot 40 \cdot 65}{4 \cdot 25 \cdot 64 \cdot 121 \cdot 196}} \quad \frac{}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14}$$

IX. Ecк. Multipliciret die Enneagonalzahlen mit 56 und addiret 25, als:

$$56 \text{ mal} + 25 = \sqrt{\frac{1 \cdot 9 \cdot 24 \cdot 46 \cdot 75}{81 \cdot 529 \cdot 1369 \cdot 2601 \cdot 4225}} \quad \frac{}{9 \cdot 23 \cdot 37 \cdot 51 \cdot 65}$$

X. Eck. Multipliciret die Dekagonalzahlen mit 16 und addiret 9, als:

$$16\text{ mal} + 9 = \sqrt{\frac{1 \cdot 10 \cdot 27 \cdot 52 \cdot 85}{25 \cdot 169 \cdot 441 \cdot 841 \cdot 1369}} \quad \frac{}{5 \cdot 13 \cdot 21 \cdot 29 \cdot 37}$$

XI. Eck. Multipliciret die Hendekagonalzahlen mit 72 und addiret 49, als:

$$72\text{ mal} + 49 = \sqrt{\frac{1 \cdot 11 \cdot 30 \cdot 58 \cdot 95}{121 \cdot 841 \cdot 2209 \cdot 4225 \cdot 6889}} \quad \frac{}{11 \cdot 29 \cdot 47 \cdot 65 \cdot 83}$$

XII. Eck. Multipliciret die Dodekagonalzahlen mit 5 und addiret 4, als:

$$5\text{ mal} + 4 = \sqrt{\frac{1 \cdot 12 \cdot 33 \cdot 64 \cdot 105}{9 \cdot 64 \cdot 169 \cdot 324 \cdot 529}} \quad \frac{}{3 \cdot 8 \cdot 13 \cdot 18 \cdot 23.}$$

XIII. Eck. Multipliciret die Tridekagonalzahlen mit 88 und addiret 81, als:

$$88\text{ mal} + 81 = \sqrt{\frac{1 \cdot 13 \cdot 36 \cdot 70 \cdot 115}{169 \cdot 1225 \cdot 3249 \cdot 6241 \cdot 10201}} \quad \frac{}{13 \cdot 35 \cdot 57 \cdot 79 \cdot 101}$$

XIV. Eck. Multipliciret die Tetradekagonalzahlen mit 24 und addiret 25, als:

$$24\text{ mal} + 25 = \sqrt{\frac{1 \cdot 14 \cdot 39 \cdot 76 \cdot 125}{49 \cdot 361 \cdot 961 \cdot 1849 \cdot 3025}} \quad \frac{}{7 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 55}$$

XV. Eck. Multipliciret die Pentadekagonalzahlen mit 104 und addiret 121, als:

$$104\text{ mal} + 121 = \sqrt{\frac{1 \cdot 15 \cdot 42 \cdot 82 \cdot 135}{225 \cdot 1681 \cdot 4489 \cdot 8649 \cdot 14161}} \quad \frac{}{15 \cdot 41 \cdot 67 \cdot 93 \cdot 119}$$

XVI. Eck. Multipliciret die Hexadekagonalzahlen mit 7 und addiret 9, als:

$$7\text{ mal} + 9 = \sqrt{\frac{1 \cdot 16 \cdot 45 \cdot 88 \cdot 145}{16 \cdot 121 \cdot 324 \cdot 625 \cdot 1024}} \Big/ \frac{}{4 \cdot 11 \cdot 18 \cdot 25 \cdot 32}$$

XVII. Eck. Multipliciret die Heptadekagonalzahlen mit 120 und addiret 169, als:

$$120\text{ mal} + 169 = \sqrt{\frac{1 \cdot 17 \cdot 48 \cdot 94 \cdot 155}{289 \cdot 2209 \cdot 5929 \cdot 11449 \cdot 18769}} \Big/ \frac{}{17 \cdot 47 \cdot 77 \cdot 107 \cdot 137}$$

Es iſt leicht zu erachten, daß aus den dargelegten Eigenſchaften dieſer ſimpeln Polygonalen mit leichter Mühe Specialregeln erfunden werden können, die Wurzeln aus ſelbigen zu ziehen, ſo wie ſolches in Abſicht auf die Trigonalen geſchehen iſt.

§. 234.

Allgemeine Regel

jede Art von Polygonalen z. E. die neuneckigten, in Quadratzahlen zu verwandeln, und die zu dem Ende nöthigen Factoren zu finden.

1) Subtrahiret die Zahl 4 von der Winkelzahl, allhier 9, und ihrem Duplo, und ſetzet die Reſte in Form eines Bruch zuſammen. Der erſte Reſt wird der Zähler und der andere der Nenner.

2) Nehmet aus der beliebten Art von Polygonalen, allhier den neuneckigten, welche Zahl ihr wollet, z. E. 75, und ſubtrahiret von ihrer Seite oder Wurzel den Bruch der erſten Operation. Es iſt aber die Wurzel von der Enneagonalzahl 75 die Zahl 5.

3) Verwandelt den Reſt in einen unreinen Bruch, und quadriret den Zähler deſſelben.

4) Dividiret in das gefundne Quadrat mit der gewählten Polygonale allhier 75.

Der

Der Quotient ist der gesuchte Factor, mit welchem die gewählte Polygonale multipliciret werden muß, und der übrigbleibende Theil des Dividenden ist die Zahl, welche zum Product addiret werden muß; als

1) $\frac{9-4}{18-4} = \frac{5}{14}$.

2) Die Seite von 75 ist 5, und $5 - \frac{5}{14} = 4\frac{9}{14}$.

3) $4\frac{9}{14} = \frac{65}{14}$ und $65^2 = 4225$

4) 75) 4225 | 56
375
475
450
25

Mit 56 muß also die Enneagonalzahl multipliciret, und zum Product 25 addiret werden.

§. 235.

Noch eine Eigenschaft der Trigonalen ist, daß sie zu sich selbst addiret, nemlich jede folgende zu der nächst vorhergehenden, zu Quadratzahlen werden, als:

1 = 1
3 + 1 = 4 = 2 × 2
6 + 3 = 9 = 3 × 3
10 + 6 = 16 = 4 × 4
15 + 10 = 25 = 5 × 5
21 + 15 = 36 = 6 × 6
28 + 21 = 49 = 7 × 7 und so weiter.

Dritter Abſchnitt.

Von den ſimpeln Pyramidalzahlen.

§. 236.

Simple Pyramidalzahlen ſind, die aus ſimpeln Polygonalen ſummiret werden, und zwar entſpringen aus den ſimpeln Trigonalen ſimple dreyeckigte Pyramidalzahlen; aus den ſimpeln Tetragonalen ſimple viereckigte Pyramidalzahlen, u. ſ. w. Man ſehe folgende Exempel:

Simp. 3eck. Pyramidale.	Simple Trigonale.	Simp. arith. Progreſſion.	Differenzen.
1	1	1	
4	3	2	1
10	6	3	1
20	10	4	1
35	15	5	1

u. ſ. w.

Simp. 4eck. Pyramidale.	Simple Tetragonale.	Simp. arith. Progreſſion.	Differenzen.
1	1	1	
5	4	3	2
14	9	5	2
30	16	7	2
55	25	9	2

u. ſ. w.

Simp. 5eck. Pyramidale.	Simple Pentagonale	Simp. arith. Progreſſion.	Differenzen.
1	1	1	
6	5	4	3
18	12	7	3
40	22	10	3
75	35	13	3

u. ſ. w.

Simp. 6eck. Pyramidale.	Simple Hexagonale.	Simp. arith. Progreſſion.	Differenzen.
1	1	1	
7	6	5	4
22	15	9	4
50	28	13	4
95	45	17	4

u. ſ. w.

§. 237.

So wie es mit den Wurzeln oder Seiten der Polygonalzahlen beſchaffen iſt, ſo iſt es auch mit den Wurzeln der

Pyramidalzahlen beschaffen. Sie sind dort die Anzahl der summirten Glieder einer arithmetischen Progreßion, und hier die Anzahl der summirten Polygonalzahlen. Auf diese Weise ist

in den simpeln dreyeckigten Pyramidalen	in den simpeln viereckigten Pyramidalen
Die Zahl 1 die Wurzel oder Seite von 1.	Die Zahl 1 die Wurzel oder Seite von 1.
— 2 die Wurzel von 4, weil $1+3=4$.	— 2 die Wurzel von 5, weil $1+4=5$.
— 3 die Wurzel von 10, weil $1+3+6=10$.	— 3 die Wurzel von 14, weil $1+4+9=14$.
— 4 die Wurzel von 20, weil $1+3+6+10=20$.	— 4 die Wurzel von 30, weil $1+4+9+16=30$.
u. s. w.	u. s. w.
in den simpeln fünfeckigten Pyramidalen	**in den simpeln sechseckigten Pyramidalen**
Die Zahl 1 die Wurzel oder Seite von 1.	Die Zahl 1 die Wurzel oder Seite von 1.
— 2 die Wurzel von 6, weil $1+5=6$.	— 2 die Wurzel von 7, weil $1+6=7$.
— 3 die Wurzel von 18, weil $1+5+12=18$.	— 3 die Wurzel von 22, weil $1+6+15=22$.
— 4 die Wurzel von 40, weil $1+5+12+22=40$.	— 4 die Wurzel von 50, weil $1+6+15+28=50$.
u. s. w.	u. s. w.

§. 238.

Wenn die Polygone, aus deren Summe eine Pyramidale erzeuget wird, nach der Ordnung ihrer Entstehung aus den simpeln Progreßionalen dergestalt übereinander gesetzet werden, daß über jedes größere Polygon ein kleineres ähnliches

ches, dessen Seite allezeit 1 weniger ist, zu stehen kömmt, und daß die Seite des obersten Polygons sich endlich in 1 verliehrt: so entstehet eine pyramidenförmige körperliche Figur, und daher haben die Pyramidalen ihre Benennung.

(I.) Eine dreyeckigte Pyramide zu construiren. §. 239.

Formiret den bey Fig. 5. Tab. I. befindlichen Triangel 15, dessen Seite 5 ist, und machet solchen zur Grundfläche einer zu construirenden Pyramide.

Die Kugeln oder Würfel müssen allhier dichte aneinander geleget werden.

Formiret auch den in diesem grössern Triangel enthaltnen kleinern Triangel 10, dessen Seite 4 ist, und setzet solchen über den vorhergehenden, dessen Seite 5 war. Formiret auch den Triangel 6, dessen Seite 3 ist, und setzet ihn über den vorhergehenden, dessen Seite 4 war. Formiret auch den Triangel 3, dessen Seite 2 ist, und setzet ihn über den vorhergehenden, dessen Seite 3 war; und leget endlich über die Mitte des vorhergehenden Triangels 3 eine einzelne Kugel, welche den kleinsten Triangel 1, und die Spitze einer dreyeckigten arithmetischen Pyramide geben wird, zu deren Construction, wie aus dem vorhergehenden erhellet, $15+10+6+3+1=35$ Kugeln gehören.

(II.) Eine viereckigte Pyramide zu construiren. §. 240.

Leget die Tetragonale 36, von Fig. 9. Tab. I. zum Grunde einer viereckigten Pyramide. Ueberbauet solche mit der Tetragonale 25; diese mit 16, 9, 4 und 1, so wird eine Pyramide vollendet werden, zu deren Construction $36+25+16+9+4+1=91$ Kugeln gehören, und deren unterste Fläche aus 6 Seiten, die zunächst folgende höhere aus 5, und die folgenden aus 4, 3, 2, 1 bestehen.

Anmerkung.

In den Vestungen und Zeughäusern werden die Kugelhaufen pyramidenförmig aufgesetzet. Wenn man von der Spitze der

Pyramide auf die Ecken der Grundfläche herunter siehet, so wird man so viele Triangel gewahr werden, als die Pyramide Ecken hat.

Da die Schenkel dieser Triangel allezeit aus so vielen Kugeln bestehen, als die Pyramide Ecken hat: so geschicht es dadurch, daß sie mit den Seiten der Grundfläche von gleicher Größe sind. Wenn z. E. in einer viereckten Pyramide die Seite der Grundfläche die Zahl 6 ist, so wie in der vorhergehenden aus 91 Kugel bestehenden Pyramide: so enthält die schräge Linie von der Spitze nach der Ecke zu, das ist der eine Schenkel des Triangels, auch 6; und also sind die arithmetischen Pyramiden gleichseitige Pyramiden.

Der Umfang eines jeden Polygons oder jeden Fläche wird bey dem Gebäude der arithmetischen Pyramide eine **Schicht** oder **Lage** genennet. Aus so vielen Polygonen also eine Pyramide zusammengesetzet ist, aus so vielen Schichten oder Lagen von Kugeln bestehet sie; und auf diese Weise enthält die auf den Triangel 15 vorhin erbauete dreyeckigte Pyramide fünf Schichten, als die von 15, 10, 6, 3 und 1; und die auf die Tetragonale 36 vorhin erbauete viereckigte Pyramide enthält sechs Schichten, als 36, 25, 16, 9, 4 und 1. Es werden aber allezeit so viele Polygone über einander gesetzet, als eine Seite der Unterlage, d. i. eine Seite des größten Polygons Einheiten in sich fasset. Die Zahl der Lagen oder Schichten ist also allezeit der Zahl der Seite gleich. Es sind aber dergleichen Pyramiden in keinen andern als den simpeln Trigonalen und Tetragonalen möglich, indem in den folgenden Pentagonalen, Hexagonalen, u. s. w. die Kugeln nicht aufeinander passen, in so ferne 1) solche von gleichem Diameter sind, und diese Beschaffenheit sollen sie haben; und 2) in so ferne die Polygone aus regulären Figuren gebildet werden. Denn gewisse symmetrische Figuren gestatten auch Pyramiden, ohne daß die Eigenschaft der Pyramidalzahlen, in Absicht auf ihre Entstehung und Folge dadurch aufgehoben wird.

So kann z. E. über einen **Rhombus**, Tab. VII. Fig. 7. eine rhombische arithmetische Pyramide, welche geometrisch nicht möglich ist, erbauet werden. (Man muß allhier Kugeln oder Würfel bey der Hand haben.) So kann ferner über ein symmetrisches **Fünfeck**, z. E wie das bey Fig. 1. Tab. II. eine fünfeckigte Pyramide aus vier Schichten

ten, und über das bey Fig. 6. Tab. VII. befindliche symmetrische Sechseck eine sechseckigte Pyramide aus sechs Schichten erbauet werden. Ueber den rechtwinklichten Triangel bey Fig. 6. Tab. I. lässet sich nur mit Würfeln eine Pyramide bequem construiren.

§. 241.

Die Summe aller Punkte eines arithmetischen Polygons machet, wie aus §. 223. bekannt ist, den numerischen Inhalt desselben aus. Wenn also der numerische Inhalt der verschiednen Polygone, woraus eine arithmetische Pyramide besteht, summiret wird: so bekommen wir den numerischen Inhalt einer solchen Pyramide, und folglich die ganze Anzahl der in selbiger enthaltnen Kugeln oder Würfel.

(I.) Aus der gegebnen Wurzel oder Seite den numerischen Inhalt einer dreyeckigten Pyramide zu finden; oder aus der gegebnen untersten Seite die simple Trigonalpyramidale zu finden, oder aus der gegebnen untersten Seite einen dreyeckigten Kugelhaufen zu berechnen. §. 242.

Erste Auflösung.

1) Multipliciret die Seite mit ihrer größern Hälfte. 2) Multipliciret das Product mit einem Drittheil der um 2 vermehrten Seite, wenn solche aus einer ungeraden Zahl besteht; und mit einem Drittheil der um 1 vermehrten Seite, wenn solche aus einer geraden Zahl besteht.

Die größere Hälfte einer geraden Zahl ist ihre Hälfte $+1$, und die kleinere ist ihre Hälfte -1. Es differiret also die eine von der andern um 2. Z. E. die größere Hälfte von 8 ist $5 = 4 + 1$, und die kleinere ist $3 = 4 - 1$; und $5 - 3 = 2$.

Die gröſsere Hälfte einer ungeraden Zahl ist die Hälfte dieser ungeraden Zahl + 1, und die kleinere ist die Hälfte der ungeraden Zahl — 1. Eine differiret von der andern um 1. Z. E. die gröſsere Hälfte von 9 ist $5 = \frac{9+1=10}{2}$, und die kleinere ist $4 = \frac{9-1=8}{2}$, und $5 - 4 = 1$.

Es sey die Seite = 9

1) $9 \left(= \frac{9+1=10}{2}\right)$
$\frac{5}{45}$

2) $9+2=$ $3)\frac{11}{3\frac{2}{3}}$

$\frac{45}{3\frac{2}{3}}$
165 Inhalt der Pyramide oder Summe der Kugeln.

Es sey die Seite = 8.

1) 8
$\frac{5=4+1.}{40}$

2) $8+1=$ $3)\frac{9}{3}$

$\frac{40}{3}$
120 Summe der Kugeln.

Zweyte Auflösung.

1) Vermehret die Seite mit 2, und behaltet das Collect. 2) Dividiret erstlich in die Seite und hernach in das Quadrat der Seite mit 6, und addiret beyde Quotienten. 3) Multipliciret das Collect der ersten Operation durch das Collect der zweyten. Es sey z. E. die Seite = 9

1) $9+2=11$
2) $\frac{9}{6}=1\frac{3}{6}$ $9^{\circ}=6)\frac{81}{13\frac{3}{6}}$

$1\frac{3}{6}$
$+13\frac{3}{6}$
15

3) $11 \times 15 = 165$ Inhalt der dreyeckigten Pyramide, oder die gefundne Trigonalpyramidale, oder die Summe der Kugeln.

Dritte Auflösung.

Summiret das Drittheil der Seite, die Hälfte ihres Quadrats, und das Sechstheil ihres Cubus. Es sey die Seite 9.

$9^{\circ} =$

$9^3 = 729$ und $\frac{729}{6} = 121\frac{1}{2}$ ..

$9^2 = 81$ und $\frac{81}{2} = 40\frac{1}{2}$

$\frac{9}{3} = \frac{3}{165}$ gefundne Zahl.

Wenn man sämmtliche simple Trigonalen von der gegebnen Seite 9 an bis auf 1 zurück summiret, so kömmt gleiche Summe, als:

$9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 45$
$8+7+6+5+4+3+2+1 = 36$
$7+6+5+4+3+2+1 = 28$
$6+5+4+3+2+1 = 21$
$5+4+3+2+1 = 15$
$4+3+2+1 = 10$
$3+2+1 = 6$
$2+1 = 3$
$1 = 1$
Summe 165

(II.) Aus der gegebnen Seite oder Wurzel den Inhalt einer viereckigten Pyramide; oder die simple Tetragonalpyramidale, oder einen viereckigten Kugelhaufen zu berechnen. §. 243.

Erste Auflösung.

1) Dupliret die gegebne Seite; addiret 1 und dividiret mit 3. 2) Multipliciret mit dem Quotienten die simple Trigonale der Seite. Z. E. Wenn die Seite = 5, so ist

1) $2 \times 5 = 10$, $+1$, $\frac{11}{3\frac{2}{3}}$ 3)

2) $5 \times 6 = \frac{30}{15}$ 2) die Trigonale von 5

$\frac{3\frac{2}{3}}{55}$ die gefundne Zahl.

Wenn man sämmtliche simple Tetragonalzahlen von der Seite 5 an bis 1 zurück summiret, so ist die Aufgabe auch aufgelöset, als:

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
9 & + & 7 & + & 5 & + & 3 & + & 1 & = & 25 \\
 & & 7 & + & 5 & + & 3 & + & 1 & = & 16 \\
 & & & & 5 & + & 3 & + & 1 & = & 9 \\
 & & & & & & 3 & + & 1 & = & 4 \\
 & & & & & & & & 1 & = & 1 \\
 & & & & & & & & & \text{Summe} & 55
\end{array}
$$

Zweyte Auflösung.

1) Dupliret die Seite und addiret 1. 2) Multiplicirt mit einem Drittheil aus dem Collect der vorhergehenden Operation das Product der Seite in ihre größere Hälfte, wenn die Zahl der Seite ungerade ist; und das Product der mit 1 vermehrten Seite in ihre Hälfte, wenn die Zahl der Seite gerade ist.

Es sey die Seite 7, deren größere Hälfte = 4

1) $2 \times 7 = 14$
$+ \frac{1}{15}$

2) $7 \times 4 = 28$
$\frac{15}{3} = 5$
140 die gefundne Zahl.

Es sey die Seite 8, deren Hälfte 4 ist.

1) $2 \times 8 = 16$
$+ \frac{1}{17}$

2) $8 + 1 = 9$
$\frac{4}{36}$
$\frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$
204 die gefundne Zahl.

Dritte Auflösung.

Summiret das Sechstheil der Seite, die Hälfte ihres Quadrats und das Drittheil ihres Cubus. Z. E. wenn die Seite = 5, so ist

$5^1 =$

$5^3 = 125 \quad \frac{125}{3} = 41\frac{2}{3} \mid \frac{2}{3}$

$5^1 = 25 \quad \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2} \mid \frac{1}{2}$

$\frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \mid \frac{1}{6}$

55 die gefundne Zahl.

(III.) Aus der gegebnen Seite oder Wurzel den Inhalt einer fünfeckigten Pyramide, oder die ſimple Pentagonalpyramidale zu finden. §. 244.

Summiret die Hälften des Cubus und des Quadrats der gegebnen Seite. Z. E.

Wenn die Seite = 4

$4^3 = 64$ u. $\frac{64}{2} = 32$

$4^1 = 16$ u. $\frac{16}{2} = 8$

40 die gefundne Zahl.

Wenn die Seite = 8

$8^3 = 512$ u. $\frac{512}{2} = 256$

$8^1 = 64$ u. $\frac{64}{2} = 32$

288 die gefundne Zahl.

(IV.) Generalregel. Aus der gegebnen Winkel- und Seitenzahl die ſimple Pyramidale ſelbſt zu finden; oder aus der gegebnen Winkel- und Seitenzahl den Inhalt eines pyramidenförmigen Kugelhaufens zu berechnen. §. 245.

Erſte Auflöſung.

1) Dividiret zuvörderſt die Seite, und hernach das Quadrat derſelben mit 6. Summiret beyde Quotienten. 2) Multipliciret die um 1 verminderte Seite mit der um 2 verminderten Winkelzahl und addiret 3. 3) Setzet die Summen beyder Operationen durch die Multiplication zuſammen. Wenn z. E. die Winkelzahl = 3 und die Seite = 9, ſo iſt

1) $\frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$. $9^2 = 81$ $1\frac{1}{3}$

6) $13\frac{1}{3}$ $13\frac{1}{3}$

15 Summe.

2) $9 - 1 = 8$
$3 - 2 = 1$
8
$+3$
11

3) $15 \times 11 = 165$ die gefundne Zahl.

Es sey die Winkelzahl $= 6$ und die Seite $= 5$.

1) $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. $5^2 = 25$ $\frac{1}{4}$

6) $4\frac{1}{4}$ $4\frac{1}{4}$

5 Summe.

2) $5 - 1 = 4$
$6 - 2 = 4$
16
$+3$
19

3) $5 \times 19 = 95$ die gefundne Zahl.

Zweyte Auflösung.

1) Cubiret die Seite, und multipliciret den Cubus mit der um 2 Einheiten verminderten Winkelzahl. 2) Suchet die Differenz zwischen der Zahl 5 und der Winkelzahl.

Wenn nun die Winkelzahl unter 5, oder der Zahl 5 gleich ist, als in den Drey- Vier- und Fünfecken, so addiret jene Differenz zu dem Triplo der Seitenzahl, und multipliciret die Summe mit der Seitenzahl.

Wenn aber die Winkelzahl über 5 ist, als in den Sechs- und Siebenecken ꝛc. so subtrahiret jene Differenz von dem Triplo der Seitenzahl, und multipliciret den Rest mit der Seitenzahl.

3) Addiret die Producte der beyden vorigen Operationen, und dividiret das Collect mit 6, als:

Wenn

Wenn die Winkelzahl =3 und die Zahl der Unterſeite =9 iſt.

1) $9^3 = 729$
$3-2 = \underline{1}$
729

2) $5-3 = 2$ Differenz
$3 \times 9 = 27$ Tripl.
$29 \times 9 = 261$

3) $729+261 = \underset{6)}{990}$
165 die gefundne Zahl, allhier eine ſimple Trigonalpyramidale.

Wenn man, da die Seite der Pyramide =9 iſt, die neun erſten Glieder der ſimpeln Trigonalprogreſſion, 1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. 36 und 45 auf ſchon bekannte Art ſummiret, ſo iſt das Facit 165 der Summe vorhergehender Berechnung gleich.

Wenn die Winkelzahl =6 und die Zahl der Unterſeite =5 iſt.

1) $5^3 = 125$
$6-2 = \underline{4}$
500

2) $6-5 = 1$ } Subtrah.
$3 \times 5 = 15$ }
$14 \times 5 = 70$.

3) $500+70 = \underset{6)}{570}$
95 die gefundne Zahl, allhier eine ſimple Hexagonalpyramidale.

Da die Seite der Pyramide =5 iſt, ſo ſummiret die fünf erſten Glieder der ſimpeln Hexagonalprogreßion 1. 6. 15. 28. 45; kömmt einerley Facit, nemlich 95.

§. 246.

Wenn von einer Pyramidalzahl die erſte der Polygonalen, aus welchen ſie entſtanden, das iſt die 1, abgeſchnitten wird: ſo wird ſie eine einmal geſtutzte Pyramidale genennet. Werden ihr die zwey erſten Polygonale abgeſchnitten, ſo heiſſet ſie eine zweymal geſtutzte Pyramidale, und wenn ihr die drey erſten Polygonale abgeſchnitten werden: ſo heiſſet ſie eine dreymal geſtutzte Pyramidale, u. ſ. w. Da es nun 3. 4. und mehreckigte Pyramidale giebt, ſo giebet es auch 3. 4. und mehreckigte geſtutzte Pyramidale.

Es

Es sey die simple Trigonalpyramidale 35, welche aus 1+3+6+10+15 entstanden. Wenn von selbiger die 1 weggenommen wird: so entstehet eine einmal gestutzte Trigonalpyramidale 34. Wenn von selbiger sowohl 1 als 3 weggenommen wird, so entstehet eine zweymal gestutzte Trigonalpyramidale 31. Wenn von selbiger sowohl 1 als 3 und 6 weggenommen wird: so bleibet eine dreymal gestutzte Trigonalpyramidale 25 zurück, u. s. w.

Es sey die simple Tetragonalpyramidale 55, welche aus 1+4+9+16+25 entstanden. Wenn von selbiger die 1 weggenommen wird, so bleibet die Zahl 54 zurück, welche alsdenn eine einmal gestutzte Tetragonalpyramidale ist. Wenn man 1 und 4 davon absondert, so bleibet die Zahl 50 zurück, welche alsdenn eine zweymal gestutzte Tetragonalpyramidale ist, u. s. w.

§. 247.

Um sich eine praktische Vorstellung von einer gestutzten Pyramide zu machen, setze man aus den fünf Trigonalen 15. 10. 6. 3. 1 eine dreyeckigte Pyramide zusammen. Die Grundfläche wird aus dem gleichseitigen Triangel 15 bestehen; die Lage darüber aus einem ähnlichen Triangel 10; Die Lage über diesem aus dem Triangel 6, und so weiter. Wenn man von dieser Pyramide die aus 1 bestehende oberste Schicht abnimmt: so bleiben die 4 Schichte 3. 6. 10. 15 zurück, welche eine einmal gestutzte Pyramide geben, und vermittelst ihrer Summe 34 Kugeln enthalten. Nimmt man von dieser gestutzten Pyramide wiederum eine Schicht weg, nemlich die oberste 3, so bleiben die 3 Schichte 6. 10. 15 zurück, welche eine zweymal gestutzte Pyramide geben, und vermittelst ihrer Summe 31 Kugeln enthalten; u. s. w. Die Frage ist nunmehr

(V) Den numeriſchen Inhalt einer geſtutzten Pyramide zu finden, oder einen abgekürzten Kugelhaufen zu berechnen. §. 248.

1) Ergänzet die Höhe der Pyramide, und berechnet ihren numeriſchen Inhalt. 2) Berechnet auch den numeriſchen Inhalt der kleinen abgeſchnittenen Pyramide. 3) Ziehet den Inhalt der kleinern Pyramide von dem Inhalt der größern ab: ſo bleibet der numeriſche Inhalt der geſtutzten Pyramide zurück. Z. E. Es ſey eine geſtutzte dreyeckigte Pyramide, deren Seite = 7, und welche aus 4 Schichten beſteht. Da 7 — 4 = 3, ſo fehlen ihr 3 Schichten, um eine vollkommne Pyramide zu ſeyn. Wir haben alſo zu berechnen

erſtlich eine dreyeckigte größere Pyramide, deren Seite = 7, und

hernach eine dreyeckigte kleinere Pyramide, deren Seite = 3. (Die Seite der kleinern Pyramide iſt allezeit = dem Unterſcheide der Seite der größern Pyramide allhier 7, und der Höhe derſelben, in ſo weit ſolche geſtutzet worden, und dieſe Höhe iſt allhier 4, da ſie nur aus 4 Schichten beſteht.)

Berechnung der dreyeckigten größern Pyramide, deren Seite = 7.

Die Auflöſung wollen wir nach der dritten Auflöſung der Aufgabe vornehmen: Aus der gegebnen Wurzel oder Seite den numeriſchen Inhalt einer dreyeckigten Pyramide zu finden ꝛc. im §. 242.

$7^3 = 343$ u. $\frac{343}{6} = 57\frac{1}{6}$

$7^1 = 49$ u.

$7^2 = 49$ und $\frac{49}{2} = 24\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$

$\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

84 Inhalt der größern Pyramide.

Berechnung der dreyeckigten kleinern Pyramide, deren Seite = 3.

$3^3 = 27$ u. $\frac{27}{6} = 4\frac{3}{6}$

$3^1 = 9$ u.

$3^2 = 9$ und $\frac{9}{2} = 4\frac{3}{6}$

$\frac{3}{3} = 1$

10 Inhalt der kl. Pyramide.

Wenn

Wenn nun die kleinere Pyramide, deren Inhalt = 10, von der größern, deren Inhalt = 84, abgezogen wird: so kommt 74 für den Inhalt der gestutzten dreyeckigten Pyramide, welche 7 breit und 4 hoch lieget.

Anhang

zum zweyten und dritten Abschnitt.

Von den trapezischen Zahlen und deren Pyramiden.

§. 249.

Wenn einer Trigonalzahl die erste simple Progreßionale woraus sie besteht, das ist, die Einheit abgeschnitten wird: so entsteht eine trapezische Zahl, deren kleinste Seite eine 2 ist; werden ihr die zwey ersten Progreßionalen, d. i. die 1 und 2 abgeschnitten, so entsteht eine trapezische Zahl, deren kleinste Seite eine 3 ist; werden ihr die drey ersten Progreßionalen, d. i. die 1, 2 und 3 abgeschnitten: so entsteht eine trapezische Zahl, deren kleinste Seite eine 4 ist, u. s. w. Es sind die trapezischen Zahlen also abgekürzte Trigonalzahlen, so wie die Trapezien in der Geometrie abgekürzte Triangel sind; und da die größte Seite derselben nicht bestimmet werden kann, jede mittlere Seite aber die Differenz der größten und kleinsten + 1 ist: so können sie, um ihre Arten von einander zu unterscheiden, durch nichts anders als durch ihre kleinste Seite characterisirt werden, und man kann sie kurz weg trapezische Zahlen aus 2; trapezische Zahlen aus 3, aus 4, u. s. w. nennen. Ich gebe Exempel von der Entstehung der drey ersten Arten, und füge zugleich die aus ihren Summen entstehenden trapezischen Pyramidale hinzu.

Trapezische Zahlen aus 2.

Arithmet. Progreſſion.	Trapezische Zahlen.	Trapez. Pyramidale.
2	2	2
3	5	7
4	9	16
5	14	30
6	20	50
7	27	77
8	35	112

u. ſ. w.

Trapezische Zahlen aus 3.

Arithmet. Progreſſion.	Trapez. Zahlen.	Trapez. Pyramidale.
3	3	3
4	7	10
5	12	22
6	18	40
7	25	65
8	33	98
9	42	140

u. ſ. w.

Trapezische Zahlen aus 4.

Arithmet. Progreſſion.	Trapez. Zahlen.	Trapez. Pyramidalen.
4	4	4
5	9	13
6	15	28
7	22	50
8	30	80
9	39	119
10	49	168

u. ſ. w.

Trapezische Zahlen aus 5.

Arithmet. Progreſſion.	Trapez. Zahlen.	Trapez. Pyramidalen.
5	5	5
6	11	16
7	18	34
8	26	60
9	35	95
10	45	140
11	56	196

u. ſ. w.

§. 250.

Von den trapezischen Zahlen aus 2, ſehe man bey Fig. 4. Tab. VIII. die Zahl 27, in deren Umfange die kleinern Trapezien 20, 14, 9, 5 und 2 enthalten ſind, geometriſch vorgeſtellet; von denen aus 3 ſehe man bey Fig. 5. Tab. VIII. die Zahl 25, in deren Umfange die kleinern Trapezien 18, 12, 7 und 3 enthalten ſind; und von denen aus 4 ſehe man bey Fig. 6. Tab. VIII. die Zahl 22, in deren Umfange die kleinern Trapezien 15, 9 und 4 enthalten ſind.

(I.) Aus

(I.) Aus der gegebnen größten und kleinsten Seite eines Trapezii den numerischen Inhalt desselben zu finden. §. 251.

1) Addiret 1 zur Differenz der größten und kleinste Seite, und halbiret das Collect, welches die halbe Anzahl der Glieder oder Linien geben wird. 2) Multipliciret solch durch die Summe der größten und kleinsten Seite. Zum Exempel, wenn die größte Linie = 6 und die kleinste = 2, so ist

1) $6-2=4$
$+1$
5
2) $2\frac{1}{2}$

2) $6+2=8$
$2\frac{1}{2}$
20 der gefundne numerische Wehrt, oder die Summe der Punkte des Trapezii.

§. 252.

Die aus einer zum Grunde liegenden trapezischen Grundfläche entstehenden arithmetischen Pyramiden müssen nicht mit den im §. 246. erklärten gestutzten Pyramiden vermischet werden. Die **gestutzten Pyramiden**, welche sowohl 3 als 4 und mehreckigt seyn können, entstehen aus **weggelaßnen Polygonen**, und die trapezischen, welche niemals mehr oder weniger als viereckigt seyn können, aus **abgekürzten Polygonen**. Bey der gestutzten Pyramide bestehen alle Schichten aus ganzen Polygonen, und es fehlen blos in der Höhe einige Polygone; bey der trapezischen Pyramide hingegen bestehen alle Schichten aus abgekürzten Triangeln, das ist, aus lauter Trapezien. Endlich kann die trapezische Pyramide selbst gestutzet werden. Wenn man die bey Fig. 4. 5. 6. Tab. VIII. vorgestellten Trapezien zum Grunde trapezischer Pyramiden leget, und selbige mit den darinnen enthaltnen kleinern Trapezien überbauet, so hat man Exempel.

(II.) Den

(II.) Den numerischen Inhalt einer trapezischen Pyramide zu finden, deren kleinste Seite = 2 ist. §. 253.

Berechnet aus der größten Seite der trapezischen Grundfläche den Inhalt einer dreyeckigten Pyramide, und ziehet von dem gefundnen Inhalt derselben die größte Seite der trapezischen Grundfläche ab. Z. E. wenn die größte Seite = 7, so ist

84 Inhalt einer dreyeckigten Pyramide, deren
— 7 Seite = 7.

77 der gefundne Inhalt der trapezischen Pyramide, oder Summe der in selbiger enthaltnen Kugeln.

(III.) Den numerischen Inhalt einer trapezischen Pyramide zu finden, deren kleinste Seite = 3 ist. §. 254.

Berechnet aus der größten Seite der trapezischen Grundfläche den Inhalt einer dreyeckigten Pyramide. 2) Duplieret die größte Seite des Trapezii, und addiret zum Product die um 2 verminderte größte Seite. 3) Ziehet das Collect von dem aus der ersten Operation resultirenden Inhalt einer dreyeckigten Pyramide ab. Z. E. wenn die größte Seite = 7, so ist

1) 84 Inhalt der dreyeck. Pyram. per suppos.
2) 2 × 7 = 14
7 — 2 = 5
19
3) 84 — 19 = 65 Inhalt der trapezischen Pyramide.

(IV.) Den numerischen Inhalt einer trapezischen Pyramide zu finden, deren kleinste Seite = 4 ist. §. 255.

1) Berechnet aus der größten Seite der trapezischen Grundfläche den Inhalt einer dreyeckigten Pyramide. 2) Multipliciret die größte Seite des Trapezii durch die kleinste, und addiret zum Product das Duplum der Differenz der größten und kleinsten Seite. 3) Ziehet das Col-

lect von dem Inhalt einer dreyeckigten Pyramide, so wie solcher durch die erste Operation gefunden worden, ab. Z. E. wenn die gröſte Seite = 7, so ist

1) 84 der Inhalt der dreyeck. Pyramide.

2) $7 \times 4 = 28$

$7 - 4 = 3$

$\frac{2}{6 = 6}$

$\frac{}{34}$

3) $84 - 34 = 50$ Inhalt der trapeziſchen Pyramide.

(V.) Den numeriſchen Inhalt einer trapeziſchen Pyramide zu finden, deren kleinſte Seite = 5 iſt. §. 256.

1) Berechnet aus der gröſten Seite der trapeziſchen Grundfläche den Inhalt einer dreyeckigten Pyramide. 2) Multipliciret die gröſte Seite des Trapezii durch die kleinſte, und behaltet das Product. 3) Multipliciret die kleinſte Seite des Trapezii durch die mit 1 vermehrte Differenz der gröſten und kleinſten Seite, und addiret das Product der zweyten Operation. 4) Ziehet das Collect von dem Inhalt einer dreyeckigten Pyramide, der durch die erſte Operation gefunden worden, ab. Z. E. es ſey die gröſte Seite = 7.

1) 84 der Inhalt einer dreyeck. Pyramide, deren Seite = 7.

2) $7 \times 5 = 35$.

3) $7 - 5 = 2$ Differenz

$+ \frac{1}{3}$

kleinſte Seite des Trap. $\frac{5}{15}$

$15 + 35 = 50$.

4) $84 - 50 = 34$ gefundner Inhalt der trapeziſchen Pyramide.

§. 257.

§. 257.

In jeder ganzen trapezischen Pyramide ist die Zahl der höchsten Schicht der characteristischen Zahl der Grundfläche, d. i. der kleinsten Seite gleich. Wenn z. E. die kleinste Seite 2 ist, so ist die Zahl der höchsten Schicht auch 2; ist jene 3, so ist diese auch 3, u. s. w. Ferner sind in jeder ganzen trapezischen Pyramide die über die zwey mittlern Seiten erbauten Triangel vollständig; das ist, wenn die mittlere Seite der Grundschicht fünf Kugeln enthält, so enthält die folgende höhere 4; und darauf kommen 3, 2, und 1. Wenn sich also diese Triangel nicht mit 1 endigen, oder wenn die Zahl der höchsten Schicht nicht mit der Zahl der kleinsten Seite übereinkömmt: so ist solches ein Zeichen, daß die Pyramide gestutzt ist; und um zu wissen, wie viel Glieder oder Schichte ihr fehlen, darf man nur die höchste Zahl des unvollständigen Triangels untersuchen. Ist solche 4, so fehlen 3 Schichte; ist solche 3, so fehlen 2 Schichte; ist solche 2, so fehlet eine Schicht, u. s. w. Die um 1 verminderte höchste Zahl des unvollständigen Triangels ist also die Zahl der fehlenden Schichte. Die in diesen fehlenden Schichten enthaltne Anzahl von Kugeln wird am leichtesten gefunden, wenn man so viele simple Progreßionalen, von der Zahl der kleinsten Seite an, zusammensetzet, als Schichte fehlen; aus diesen Progreßionalen eben so viele trapezische Zahlen, und aus den trapezischen wiederum eben so viele trapezische Pyramidalzahlen formiret. Die größte dieser Pyramidalen wird von dem Inhalt der für ganz angenommnen, und darnach berechneten Pyramide abgezogen, und der Rest giebet den Inhalt der gestutzten trapezischen Pyramide.

Es sey eine trapezische Pyramide, deren größte Seite 8, und kleinste 4 ist. Es enthält die oberste Schicht aber nicht 4 Kugeln, sondern mehrere, und die höchste Zahl der über die mittlern Seiten erbaueten Triangel ist nicht 1, sondern 3. Es ist die Pyramide also gestutzt,

und es fehlen ihr zwey Schichte. Die in selbigen enthaltne Kugeln zu finden, heisset es:

Zahl der kleinsten Seite	4	4	4
	5	9	13 die gröſste Pyramidale.

Wenn nun, nach obigem Unterricht der Inhalt einer trapezischen Pyramide, deren kleinste Seite = 4, und gröſste = 8, die Zahl 80 ist, und von 80 die Pyramidale 13 abgezogen wird: so bleiben 67 für den Inhalt der gestutzten trapezischen Pyramide.

Vierter Abschnitt.

Von den central Polygonalzahlen.

§. 258.

Wenn man die simpeln Trigonalen von der Nulle anfangen läſſet; sie durch die Winkelzahl eines Polygons, es sey welches es wolle, multipliciret, und das Product mit 1 vermehret: so entstehet eine Polygonale, deren Einheiten sich dergestalt geometrisch versetzen lassen, daß in die Mitte der Figur ein Punkt kömmt, aus welchem man nach allen Ecken derselben gerade Linien ziehen kann. Es wird eine solche Zahl überhaupt eine central oder volle Polygonalzahl, insbesondere aber eine central Trigonalzahl genennet, wenn sie durch die Winkelzahl eines Triangels produciret worden; eine central Tetragonalzahl, wenn sie durch die Winkelzahl eines Quadrats entstanden; eine central Pentagonalzahl, wenn sie durch die Winkelzahl eines Fünfecks erzeuget worden, u. s. w.

Es seyn die mit der Nulle anhebenden simpeln Trigonalen 0, 1, 3, 6, 10, 15 ꝛc.

Wenn man solche mit 3 multipliciret, und das Product mit 1 vermehret: so entstehen die central Trigonalzahlen 1, 4, 10, 19, 31, 46 ꝛc.

Wenn

Wenn man ſolche mit 4 multipliciret, und das Product mit 1 vermehret: ſo entſtehen die central Tetragonalzahlen 1, 5, 13, 25, 41, 61 ꝛc.

Wenn man ſolche mit 5 multipliciret, und das Product mit 1 vermehret: ſo entſtehen die central Pentagonalzahlen 1, 6, 16, 31, 51, 76 ꝛc. u. ſ. w. als:

Centraltrigonale.

0 × 3	+ 1	= 1
1 × 3	+ 1	= 4
3 × 3	+ 1	= 10
6 × 3	+ 1	= 19
10 × 3	+ 1	= 31
15 × 3	+ 1	= 46

u. ſ. w.

Centraltetragonale.

0 × 4	+ 1	= 1
1 × 4	+ 1	= 5
3 × 4	+ 1	= 13
6 × 4	+ 1	= 25
10 × 4	+ 1	= 41
15 × 4	+ 1	= 61

u. ſ. w.

Centralpentagonale.

0 × 5	+ 1	= 1
1 × 5	+ 1	= 6
3 × 5	+ 1	= 16
6 × 5	+ 1	= 31
10 × 5	+ 1	= 51
15 × 5	+ 1	= 76

u. ſ. w.

Centralhexagonale.

0 × 6	+ 1	= 1
1 × 6	+ 1	= 7
3 × 6	+ 1	= 19
6 × 6	+ 1	= 37
10 × 6	+ 1	= 61
15 × 6	+ 1	= 91

u. ſ. w.

Eine geometriſche Vorſtellung

1) Der Centraltrigonale 19, welche in ihrem Umfange die vorhergehenden drey Centralen 10, 4 und 1 enthält, ſehe man bey Fig. 3. Tab. II.

2) Der Centraltetragonale 25, welche in ihrem Umfange die drey vorhergehenden Centralen 13, 5 und 1 enthält, ſehe man bey Fig. 4. Tab. II.

3) Der Centralpentagonale 31, welche in ihrem Umfange die drey vorhergehenden Centralen 16, 6 und 1 enthält, ſehe man bey Fig. 5. Tab. II.

4) Der Centralhexagonale 37, welche in ihrem Umfange die drey vorhergehenden Centralen 19, 7 und 1 enthält, ſehe man bey Fig. 6. Tab. II.

5) Der symmetrischen Centraltetragonale 61, welche in ihrem Umfange die fünf vorhergehenden kleinern 41, 25, 13, 5, und 1 enthält, bey Tab. VII. Fig. 7.

6) Der symmetrischen Centralpentagonale 91, welche in ihrem Umfange die fünf vorhergehenden kleinern 61, 37, 19, 7 und 1 enthält, bey Tab. VII. Fig. 8.

§. 259.

Wenn man die central Polygonalzahlen in Ansehung ihrer Folge hintereinander untersuchet, und von jeder folgenden größern die vorhergehende kleinere abzieht: so erscheinen Zahlen, welche alle um so viel von einander differiren, als die Winkelzahl des Polygons, durch welches sie produciret worden, Einheiten begreifft. Es seyn

Die central Trigonalzahlen

1, 4, 10, 19, 31, 46.

Wenn nun		Differenz.
1 von 4	= 3	3
4 von 10	= 6	3
10 von 19	= 9	3
19 von 31	= 12	3
31 von 46	= 15	3 u. s. w.

Die central Tetragonalzahlen

1, 5, 13, 25, 41, 61.

		Differenz.
1 von 5	= 4	4
5 von 13	= 8	4
13 von 25	= 12	4
25 von 41	= 16	4
41 von 61	= 20	4 u. s. w.

so siehet man, daß die central Trigonalzahlen eine simple arithmetische Progreßion zurücke lassen, worinnen alle Glieder um 3 differiren; und daß die central Tetragonalzahlen eine simple arithmetische Progreßion zurücklassen, worinnen alle Glieder um 4 differiren. Eine ähnliche Bewandtniß hat es mit den central Pentagonalzahlen, welche eine arithmetische Progreßion zurück lassen, in welchen alle Glieder um 5 differiren, u. s. w. Es können also die mit der Null anfangenden simpeln arithmetischen Progreßionen, als:

0	Differ.	0	Differ.	0	Differ.	0	Differ.
3	3	4	4	5	5	6	6
6	3	8	4	10	5	12	6
9	3	12	4	15	5	18	6
12	3	16	4	20	5	24	6 u. s. w.

für

für die Grundprogreßionalen der Centralpolygonalen angenommen werden, obgleich, zur Erhaltung des Centers in jedem Geschlecht, und damit ganze Pyramiden über die Centralen construiret werden können, jede erste Centrale einer Progreßion mit 1 anheben muß. In diesem Falle kann die Herleitung der Centralpolygonalen von den, ohne die Einheit und also mit der Null anfangenden simpeln arithmetischen Progreßionen auch folgendergestalt gezeiget werden.

Im Geschlechte der Centraltrigonalen.

$0+1=1$
$1+3=4$
$1+3+6=10$
$1+3+6+9=19$
$1+3+6+9+12=31$
u. s. w.

Im Geschlechte der Centraltetragonalen.

$0+1=1$
$1+4=5$
$1+4+8=13$
$1+4+8+12=25$
$1+4+8+12+16=41$
u. s. w.

§. 260.

In Absicht auf die Herleitung der Centralpolygonalen von den simpeln Trigonalzahlen ist zu merken, daß die Seite einer Centralzahl allezeit um 1 größer ist, als die Seite der simpeln Trigonale, aus welcher sie entstanden. Zum Exempel, die Seite der Centraltrigonale 19 ist 4; und die Seite der simpeln Trigonale 6, aus welcher sie durch $6 \times 3 = 18$ und $18 + 1 = 19$ entstanden, wie vorhin gezeiget worden, ist nicht mehr als 3, weil $1 + 2 + 3 = 6$.

(I) Zu einer gegebnen Centralpolygonale die Seite zu finden; oder, welches einerley ist, aus selbiger die Wurzel zu ziehen. Oder es wird eine Anzahl Kugeln gegeben; zu berechnen, wie viele davon zur Seite der Grundfläche eines zu bestimmenden Centralpolygons genommen werden müssen. §. 261.

1) Dupliret die gegebne Centralpolygonale, und dividiret das Product durch die Winkelzahl.

2) Ziehet aus dem Quotienten die Quadratwurzel, und addiret 1.

Es sey die gegebne Centralpolygonale die central viereckigte Zahl 61; oder die Anzahl der Kugeln sey 61, und das zu construirende Centralpolygon sey viereckigt.

Also $2 \times 61 = 122$

$4)\overline{122}$

$\sqrt{\overline{30\frac{1}{4}}}$

5

$+ 1$

6 die gefundne Seite oder Wurzel der Centraltetragonale 61, oder die Anzahl der Kugeln, welche zur Seite der Grundfläche eines zu construirenden Centraltetragons erfordert werden, ist 6.

Da die gefundne Seite die Zahl 6 ist: so suche man die sechste simple Trigonale, welche, indem allhier von der Nulle an gerechnet wird, die Zahl 15 ist, als 0, 1, 3, 6, 10, 15. Multipliciret die Zahl 15 mit der Zahl des gegebnen Polygons, allhier 4, und addiret zum Product die Einheit. Das Collect 61 wird der vorhergehenden Operation zur Probe dienen.

Oder, da die Winkelzahl des gegebnen Polygons die Zahl 4 ist: so addiret die Zahl 4 so vielmal — 1, als die gefundne Seite 6 Einheiten enthält, und also fünfmal; summiret die gefundnen Progreßionalen, und addiret 1, als:

4	4	4
4	8	12
4	12	24
4	16	40
4	20	$60 + 1 = 61$.

Oder machet die Probe nach Anleitung folgender Aufgabe.

(II.) Den numerischen Inhalt eines gegebnen Polygons zu finden; oder aus der gegebenen Winkel- und Seitenzahl die Centralpolygonale zu finden. Oder die Anzahl

der

der Kugeln zu einem zu construirenden Centralpolygon zu berechnen. §. 262.

Erste Auflösung.

Multipliciret die simple Trigonale der um 1 verminderten Seitenzahl mit der Zahl des gegebnen Polygons, und addiret 1 zum Product.

Es sey die Winkelzahl 3, und die Seitenzahl 4.

4 — 1 = 3

4

12

2) 6 die simple Trigonale der um 1 verminderten Seitenzahl.

3 die Winkelzahl, oder die Zahl des Polygons.

18

\+ 1

19 die gefundne Centraltrigonale; oder der numerische Inhalt des Centralpolygons, dessen Winkelzahl 3 ist, und die Seite 4; oder die Zahl der Kugeln, die zu einem central Trigonalpolygon erfordert werden, dessen Seite 4 seyn soll.

Zweyte Auflösung.

1) Multipliciret die um 1 verminderte Seitenzahl mit der Winkelzahl, und halbiret das Product.

2) Multipliciret den Quotienten mit der Seitenzahl, und addiret 1 zum Product.

Es sey die Winkelzahl 3, und die Seitenzahl 4.

1) 4 — 1 = 3

3

2) 9

4½

3) 4

18

\+ 1

19 die gefundne Centraltrigonale.

(III.) Aus der gegebnen Winkel- und Seitenzahl einer Centralpolygonale die gröſte Zahl der arithmetiſchen Progreßion, aus welcher die Centralpolygonale ſummiret worden, zu finden. §. 263.

(Dieſe gröſte Zahl heiſſet bey den alten Arithmetikern das *Extremum maius* einer Polygonale.)

Multipliciret die Winkelzahl durch die Seite, und ſubtrahiret von dem Product die Winkelzahl. Z. E.

Wenn die Winkelzahl = 3 und die Seite = 6, ſo iſt $3 \times 6 = 18$, und $18 - 3 = 15$, die gefundne gröſte Zahl von $1 + 3 + 6 + 9 + 12 + 15$, aus welchen die Centraltrigonale 46, deren Seite = 6, entſtanden iſt.

Wenn die Winkelzahl = 4 und die Seite = 5, ſo iſt $4 \times 5 = 20$, und $20 - 4 = 16$, die gefundne gröſte Zahl von $1 + 4 + 8 + 12 + 16$, aus welchen die Centraltetragonale 41, deren Seite = 5, entſtanden iſt.

Ich hohle bey dieſer Gelegenheit eine in dem zweyten Abſchnitte von den ſimpeln Polygonalen ausgelaſſne ähnliche Aufgabe nach, als:

(IV.) Aus der gegebnen Winkel- und Seitenzahl einer ſimpeln Polygonale die gröſte Zahl der arithmetiſchen Progreßion, aus welcher dieſe Polygonale ſummiret worden, zu finden. §. 264.

Subtrahiret 1 von der Seite; multipliciret den Reſt mit der Eckzahl — 2, und addiret 1 zum Product, als:

Wenn die Winkelzahl = 6 und die Seite 12, ſo iſt

$12 - 1 = 11$

$4 = 6 - 2$

44

$+ 1$

45 die gröſte Zahl aus $1 + 5 + 9 + 13 + 17 + 21 + 25 + 29 + 33 + 37 + 41 + 45$, aus welchen die ſimple Hexagonale 276, deren Seite = 12, entſtanden.

Wenn die Winkelzahl = 3 und die Seite = 5, ſo iſt

$5 - 1 = 4$

$1 = 3 - 2$

4

$+ 1$

5 die gröſte Zahl aus $1 + 2 + 3 + 4 + 5$, aus welchen die ſimple Trigonale 15, deren Seite = 5, entſtanden.

Fünf-

Fünfter Abschnitt.

Von den central Pyramidalzahlen.

§. 265.

Central Pyramidalzahlen sind, die aus central Polygonalzahlen summiret werden, und zwar entspringen aus den Centraltrigonalen dreyeckigte Centralpyramidale; aus den Centraltetragonalen viereckigte Centralpyramidale, u. s. w. Man sehe folgende Exempel.

Dreyeck. Central-pyram.	Central-trigonale.	Arithm. Progression.	Diffr.	Viereck. Central-pyram.	Central-tetragonale.	Arithm. Progression.	Diffr.
1	1	0		1	1	0	
5	4	3	3	6	5	4	4
15	10	6	3	19	13	8	4
34	19	9	3	44	25	12	4
65	31	12	3	85	41	16	4

Fünfeck. Central-pyramidale.	Central-pentagonale.	Arithm. Progression.	Diffr.	Sechseckigte Central-pyram.	Central-hexagonale.	Arithm. Progression.	Diffr.
1	1	0		1	1	0	
7	6	5	5	8	7	6	6
23	16	10	5	27	19	12	6
54	31	15	5	64	37	18	6
105	51	20	5	125	61	24	6

u. s. w.

Man wird in dem lezten Exempel bemerken, daß die sechseckigten Centralpyramidalen mit den Cubikzahlen 1, 8, 27, 64, 125, u. s. w. einerley sind, ob sich gleich die Körper von einander unterscheiden.

§. 266.

Wenn die Centralpolygone, aus deren Summe eine central Pyramidalzahl erzeuget worden, dergestalt übereinander gesetzet werden, daß über jedes grössere Polygon ein kleine-

kleineres ähnliches, dessen Seite allezeit 1 weniger ist, zu stehen kömmt, und daß die Seite des obersten Polygons sich endlich in 1 verliehret, so entstehet eine Centralpyramide. Es lässet sich dieser Proceß aber nur mit den vier- und sechseckigten Centralzahlen, und zwar durch den Gebrauch der Würfel bequem vornehmen.

(A) Die viereckigte central Pyramidalzahl 19, aus 13 + 5 + 1 vorzustellen.

1) Formiret, nach Anleitung der Fig. 7. Tab. II. aus 13 Würfeln, ein Quadrat mit abwechselnden Zwischenräumen von gleicher Größe.

Die Würfel werden durch die vermittelst beyder Diagonalen unterschiedene Quadrate angedeutet; und es sind sowohl die andern nicht so unterschiedne, als auch die unvollendeten Quadrate die Zwischenräume.

2) Setzet, nach Anleitung der Fig. 8. Tab. II. auf die fünf mittlern Würfel des vorhergehenden Quadrats, ein aus 5 Würfeln bestehendes kleineres ähnliches Quadrat, und formiret die Spitze der Pyramide durch einen einzelnen Würfel, der über den mittelsten des aus 5 Würfeln bestehenden kleinern Quadrats gesetzet wird.

Vorhergehende Operation bringet eine, aus drey Schichten bestehende, reguläre viereckigte Pyramide hervor, da gegentheils, wenn die Polygone nach der bey Fig. 1 und 2. Tab. III. verzeichneten Art geordnet, und die Würfel dichte neben einander gestellet werden, eine parallelogrammische Pyramide zum Vorschein kömmt. Es müssen die parallelogrammischen Pyramiden dieser Art aber mit denen aus den länglichten Zahlen entspringenden Pyramiden, von welchen in der Folge gehandelt werden wird, nicht vermischet werden. Wir wollen, um sie von einander zu unterscheiden

ſcheiden, die allhier vorkommenden Pyramiden mit einſpringenden Flächen nennen.

(B) Die ſechseckigte central Pyramidalzahl 27, aus 19 + 7 + 1 vorzuſtellen.

1) Formiret die Unterlage der Pyramide, nach Anweiſung der Fig. 5. Tab. III. mit 19 dichte aneinander ſchlieſſenden Würfeln.

2) Ueberbauet die Unterlage, nach Anweiſung der Fig. 6. Tab. III. mit 7 dichte an einander ſchlieſſenden Würfeln, und vollendet die Pyramide durch Anbringung eines einzelnen Würfels über den mittelſten Würfel der mittlern Schicht. Oder:

Formiret die Pyramide, nach Anleitung der Fig. 3 und 4, Tab. III. mit abwechſelnden Zwiſchenräumen. Es bringet aber nur der vorhergehende Proceß eine reguläre arithmetiſche Centralpyramide, und dieſer letztere eine ſymmetriſche zum Vorſchein.

§. 267.

Aus der gegebnen Winkel- und Seitenzahl die Centralpyramidale ſelbſt zu finden; oder den numeriſchen Inhalt einer Centralpyramide zu berechnen.

1) Cubiret die Seitenzahl, und multipliciret den Cubus mit der Winkelzahl. 2) Berechnet die Differenz zwiſchen 6 und der Winkelzahl, und multipliciret damit die Seitenzahl. 3) Wenn die Winkelzahl eine 6 oder darunter iſt: ſo addiret das Product der zweyten Operation zu dem Product der erſten, und theilet das Product mit 6. Iſt die Winkelzahl aber über 6, ſo ſubtrahiret das Product der zweyten Operation von dem Product der erſten; und theilet den Reſt mit 6.

Es sey die Winkelzahl = 5 und die Seite = 7.

1) $9^3 = 729$ × 5 = 3645

2) $6 - 5 = 1$ × $\frac{9}{9}$

3) 3645 + 9 = 3654

6) $\frac{3654}{609}$ die gefundne Zahl.

Wenn man, da die Seite = 9, die 9 ersten Glieder der central Pentagonalzahlen 1. 6. 16. 31. 51. 76. 106. 141. 181 addiret: so ist die Summe der vorigen 609 gleich.

Es sey die Winkelzahl = 7 und die Seite = 4.

1) $4^3 = 64$ × 7 = 448

2) $7 - 6 = 1$ × $\frac{4}{4}$

4) 448 − 4 = 444

6) $\frac{444}{74}$ die gefundne Zahl.

Es sey die Winkelzahl = 6 und die Seite = 3.

1) $3^3 = 27$ × 6 = 162

2) $6 - 6 = 0$ × $\frac{3}{0}$

3) 162 + 0 = 162

6) $\frac{162}{27}$ die gefundne Zahl.

Es sey die Winkelzahl = 4 und die Seite = 5.

1) $5^3 = 125$ × 4 = 500

2) $6 - 4 = 2$ × $\frac{5}{10}$

3) 500 + 10 = 510

6) $\frac{510}{85}$ die gefundne Zahl.

Sechster Abschnitt.

Von den pyramidal Pyramidalzahlen; simpeln und vollen.

§. 268.

Wir wissen, wie die Polygonalzahlen aus simpeln Progreßionalen, und aus den Polygonalzahlen wiederum Pyramidale entspringen. Wenn die Pyramidalzahlen wieder aufs neue summiret werden; die von selbigen durch die Addition entspringenden Zahlen wiederum, und immer so weiter fort: so entstehen Zahlen, die man überhaupt pyramidal Pyramidalzahlen nennet; insbesondere aber, nach dem Grade ihrer Entspringung, durch Pyramidalzahlen erster Ordnung, zweyter Ordnung u. s. w. characterisiret. Es sind aber

Pyramidalzahlen erster Ordnung, oder Größe oder ersten Rangs diejenigen, die aus Polygonalen summiret werden. Von diesen ist in dem dritten und fünften Abschnitt schlechtweg unter der Benennung von **Pyramidalzahlen** gehandelt worden.

Pyramidalzahlen zweyter Ordnung sind, die aus den schlechtweg sogenannten Pyramidalen, oder aus den Pyramidalzahlen erster Ordnung summiret werden.

Pyramidalzahlen dritter Ordnung sind, die aus den Pyramidalzahlen zweyter Ordnung summiret werden; und so weiter.

Diese pyramidal Pyramidalzahlen können sowohl simpel als central oder voll seyn, und finden in allen Geschlechten statt, im 3, 4, 5, 6, 7 und mehreckigten. Weil aber in der Geometrie nicht mehr als dreyerley Arten von Dimensionen vorhanden sind, und diese Dimensionen, welche in Absicht auf die Länge bey den simpeln Progreßionalen anfangen; in Absicht auf die Länge und Breite zugleich, mit den Polygonalen fortgehen, und in Absicht auf die Länge, Breite

Breite und Dicke zugleich, bey den Pyramidalen erster Ordnung aufhören, durch diese dreyerley Arten von figürlichen Zahlen erschöpfet worden sind: so ist es nicht möglich, die Pyramidalen 2ter, 3ter, 4ter Ordnung u. s. w. durch Punkte geometrisch vorzustellen. Wir müssen uns also begnügen, sie bloß arithmetisch kennen zu lernen, und hiezu werden folgende Exempel hinlänglich seyn.

(A) Es seyn die simpeln Trigonale 1, 3, 6, 10, 15, 21 ꝛc. Hieraus entspringen folgende dreyeckigte simple Pyramidale 1ster, 2ter, 3ter und 4ter Ordnung.

Simple Trigon.	Pyramid. 1ster Ord.	2ter Ordnung.	3ter Ordnung.	4ter Ordnung.
1	1	1	1	1
3	4	5	6	7
6	10	15	21	28
10	20	35	56	84
15	35	70	126	210
21	56	126	252	462

u. s. w.

Wenn man vorhergehende simple Trigonal- und Pyramidalzahlen mit den, in der Lehre von der ausschliessenden Verbindung unähnlicher Größen, vorkommenden combinatorischen Zahlen vergleichet: so wird man finden, daß die simpeln Trigonale mit den binarischen; die simpeln Pyramidale erster Ordnung mit den ternarischen; die zweyter Ordnung mit den quaternarischen; die dritter Ordnung mit den quinarischen; die vierter Ordnung mit den senarischen, u. s. w. einerley sind.

(B) Es seyn die simpeln Tetragonale 1, 4, 9, 16, 25, 36. Hieraus entspringen folgende viereckigte simple Pyramidale 1ster, 2ter, 3ter und 4ter Ordnung.

Simple Tetrag.	Pyramid. 1. Ordn.	2ter Ord. nung.	3ter Ord- nung.	4ter Ord- nung.
1	1	1	1	1
4	5	6	7	8
9	14	20	27	35
16	30	50	77	112
25	55	105	182	294

u. ſ. w.

(C) Es ſeyn die Centraltrigonale 1, 4, 10, 19, 31. Hieraus entſpringen folgende dreyeckigte Centralpyramidale von den vier erſtern Ordnungen.

Central- trigonale.	Pyramid. 1. Ordn.	2ter Ord- nung.	3ter Ord- nung.	4ter Ord- nung.
1	1	1	1	1
4	5	6	7	8
10	19	21	28	36
19	34	55	83	119
31	65	120	203	322

u. ſ. w.

(D) Es ſeyn die Centraltetragonale 1, 5, 13, 25, 41. Hieraus entſpringen folgende Centralpyramidale von den vier erſtern Ordnungen.

Centralte- tragonale	Pyramid. 1. Ordn.	2ter Ord- nung.	3ter Ord- nung.	4ter Ord- nung.
1	1	1	1	1
5	6	7	8	9
13	19	26		43
25	44	70	104	147
41	85	155	259	406

u. ſ. w.

Siebenter Abschnitt.

Von den Potenzen der durch die Addition entstehenden figürlichen Zahlen, oder von den arithmetischen Potenzen.

§. 269.

So wie die verschiednen Glieder einer geometrischen Progreßion, deren erstes Glied dem Exponenten gleich ist, um mehrer Bequemlichkeit willen durch die Wörter **Potenz** oder **Dignität**, und zwar durch 1ste, 2te, 3te Potenz u. s. w. unterschieden werden: so pflegen die Mathematiker diese Wörter, obwohl auf eine etwas verschiedene Art, bey der zusammengesetzten arithmetischen Progreßion anzuwenden, indem sie jeder neuen **Zusammensetzung** eine neue Potenz oder Dignität zueignen. Vermittelst dieses Umstandes wird jede Wurzel oder Seite einer Polygonalzahl eine erste Potenz; jede Polygonalzahl eine zweyte Potenz; jede Pyramidalzahl 1ster Ordnung eine dritte Potenz; jede Pyramidalzahl 2ter Ordnung eine vierte Potenz, u. s. w. genennet. Besteht die einfache arithmetische Grundprogreßion aus dreyeckigten Zahlen, so bekömmt man Trigonalpotenzen; besteht sie aus viereckigten Zahlen, so bekömmt man Tetragonalpotenzen, und so weiter. Einige Exempel werden dieses deutlicher machen.

(A) **Es sey die simple arithmetische Progreßion** 1. 2. 3. 4. ꝛc.

Da aus der gegebnen Progreßion 1. 2. 3. 4. ꝛc. die Trigonalzahlen ihren Ursprung nehmen, wie im §. 219. gezeiget worden ist: so können auch keine andern als **Trigonalpotenzen** kommen, als:

Erste

Erſte Trigonalpotenzen in den Seiten der Wurzeln.	Simple arithmet. Progreß.	2te Trigonalpotenzen.	3te Trigonalpotenzen.	4te Trigonalpotenzen.	5te Trigonalpotenzen.	6te Trigonalpotenzen.
1	1	1	1	1	1	1
2	2	3	4	5	6	7
3	3	6	10	15	21	28
4	4	10	20	35	56	84 u. ſ. w.

In vorhergehenden Trigonalpotenzen iſt die Zahl 2 die Wurzel von der zweyten Trigonalpotenz 3; von der dritten Trigonalpotenz 4; von der vierten Trigonalpotenz 5, u. ſ. w. Denn $1+2=3$; $1+3=4$; und $1+4=5$, u. ſ. w.

Ferner iſt die Zahl 3 die Wurzel von der zweyten Trigonalpotenz 6; von der dritten Trigonalpotenz 10; von der vierten Trigonalpotenz 15, u. ſ. w. Denn $1+2+3=6$; und $1+3+6=10$; und $1+4+10=15$, u. ſ. w.

Endlich iſt die Zahl 4 die Wurzel von der zweyten Trigonalpotenz 10; von der dritten Trigonalpotenz 20; von der vierten Trigonalpotenz 35, u. ſ. w. Denn $1+2+3+4=10$; und $1+3+6+10=20$; und $1+4+10+20=35$, u. ſ. w.

Anmerkung.

Es iſt aus §. 220. bekannt, daß in den Trigonalen die Zahl der Wurzel allezeit der größten ſummirten aus der ſimpeln arithmetiſchen Progreßion gleich iſt.

(B) Es ſey die ſimple arithmetiſche Progreßion 1, 3, 5, 7. ꝛc.

Da aus der gegebnen Progreßion die Tetragonalzahlen entſpringen: ſo können keine andere als Tetragonalpotenzen kommen.

Erſte Tetragonalpotenzen in den Seiten der Würfel.	Simple arithmet. Progreſſ.	2te Tetragonalpotenzen.	3te Tetragonalpotenzen.	4te Tetragonalpotenzen.	5te Tetragonalpotenzen.	6te Tetragonalpotenzen.	
1	1	1	1	1	1	1	
2	3	4	5	6	7	8	
3	5	9	14	20	27	35	
4	7	16	30	50	77	112	
5	9	25	55	105	182	294	u. ſ. w.

In vorhergehenden Tetragonalpotenzen iſt die Zahl 2 die Wurzel von der zweyten Potenz 4; von der dritten 5; von der vierten 6, u. ſ. w. Denn 1 + 3, woraus 4 entſteht; und 1 + 4, woraus 5 entſteht; und 1 + 5, woraus 6 entſteht, machen nicht mehr als zwey Zahlen, und es iſt aus §. 220. bekannt, daß die Anzahl der ſummirten Zahlen die Wurzel der daraus entſtehenden Potenz iſt.

Ferner iſt die Zahl 3 die Wurzel von der zweyten Potenz 9; von der dritten 14; von der vierten 20, u. ſ. w. Denn 1 + 3 + 5, woraus 9 entſteht; 1 + 4 + 9, woraus 14 entſteht, und 1 + 5 + 14, woraus 20 entſteht, machen nicht mehr als drey Zahlen, u. ſ. w.

§. 270.

Generalregel für die Trigonalpotenzen.

Zu jeder gegebnen Zahl die verſchiednen Trigonalpotenzen, eine nach der andern, ihrer Ordnung gemäß zu finden.

1) Multipliciret die gegebne Zahl mit der um 1 erhöhten oder größern Zahl derſelben, und theilet das Product mit dem Exponenten. Der Quotient giebet die zweyte Trigonalpotenz.

Man verſtehet durch den Exponenten die Ordnungszahl der Potenz. Alſo iſt die Zahl 2 der Exponent von der zweyten Potenz; die Zahl 3 der Exponent von der dritten Potenz, u. ſ. w.

2) Mul-

2) Multipliciret die gefundne zweyte Trigonalpotenz mit der um 2 erhöhten gegebnen Zahl, und theilet das Product mit dem Exponenten, welcher allhier 3 iſt, weil die dritte Potenz geſuchet wird. Der Quotient giebet die dritte Trigonalpotenz.

3) Multipliciret die gefundne dritte Trigonalpotenz mit der um 3 erhöhten gegebnen Zahl, und theilet das Product mit dem Exponenten, welcher nunmehr 4 iſt. Der Quotient giebet die vierte Trigonalpotenz.

4) Fahret auf ähnliche Art, mit beſtändig ſteigenden Multiplicatoren und Diviſoren fort, um die 5te, 6te, 7te Trigonalpotenz u. ſ. w. zu finden.

Es ſey die gegebne Zahl 3.

Operat. 3

4 die um 1 erhöhte oder größere gegebne Zahl.

2) 12

6 die zweyte Trigonalpotenz von 3; ſonſt die Trigonale von 3.

5 die um 2 erhöhte gegebne Zahl.

3) 30

10 die dritte Trigonalpotenz von 3; ſonſt die Pyramidale erſter Ordnung von 3.

6 die um 3 erhöhte gegebne Zahl.

4) 60

15 die vierte Trigonalpotenz von 3; ſonſt die Pyramidale zweyter Ordnung von 3.

7 die um 4 erhöhte gegebne Zahl.

5) 105

21 die fünfte Trigonalpotenz von 3; ſonſt die Pyramidale dritter Ordnung von 3.

8 die um 5 erhöhte gegebne Zahl.

6) 168

28 die ſechſte Trigonalpotenz von 3; ſonſt die Pyramidale vierter Ordnung von 3.

u. ſ. w.

Achter Abschnitt.

Progreßionstabellen der aus der Addition entstehenden Polygonal- und Pyramidalzahlen.

§. 271.

Es kommen in dem figürlichen Calcul nicht allein sehr viele, noch nicht durch Regeln bearbeitete, Aufgaben vor; sondern es giebet auch verschiedene, deren Auflösung sehr vielen Schwierigkeiten unterworfen ist. Die Erfindung gewisser Zahlen läßet sich nicht nach Generalregeln bequem vornehmen, und für jede Frage eine Specialregel zu erdenken, ist zu weitläuftig. Annoch kommen im Gebrauch gewisse Zahlen öfter vor, als andere, und solche jedesmal aufs neue zu berechnen, veranlasset einen Aufhalt bey der Arbeit. In allen diesen Fällen ist es gut, Progreßionstabellen bey der Hand zu haben, aus welchen man sofort ersehen kann, ob eine gegebne Zahl eine Polygonale oder Pyramidale ist, oder nicht, und ob man aus einer gegebnen Anzahl Kugeln eine Pyramide formiren kann, oder nicht. Es muß aber die Construction solcher Tabellen bekannt seyn, damit man solche, wenn es nöthig ist, auf beyden Seiten so weit fortführen könne, als man will. Ich werde den Anfang zu vier solchen Tabellen darlegen, und jedesmal zeigen, wie solche weiter erstrecket werden können. Da die pyramidal Pyramidalzahlen, wovon ich im sechsten Abschnitt gehandelt, bey jedem Geschlecht mit Exempeln erläutert worden, welche den Anfang zu einer Tabelle enthalten, so übergehe ich solche allhier, und erinnere bloß, daß, da die simpeln dreyeckigten pyramidal Pyramidalzahlzahlen, welche im bemeldten Abschnitt bey (A) Seite 240, erkläret worden, die merkwürdigsten sind, es keine unebne Arbeit seyn wird, solche tabellarisch weiter fortzuführen.

Anfang einer Progreßionstabelle AA der simpeln Polygonalzahlen.

Ecke oder Wurzel	3 Eck.	4 Eck.	5 Eck.	6 Eck.	7 Eck.	8 Eck.	9 Eck.	10 Eck.	11 Eck.	12 Eck.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33
4	10	16	22	28	34	40	46	52	58	64
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105
6	21	36	51	66	81	96	111	126	141	156
7	28	49	70	91	112	133	154	175	196	217
8	36	64	92	120	148	176	204	232	260	288
9	45	81	117	153	189	225	261	297	333	369
10	55	100	145	190	235	280	325	370	415	460
11	66	121	176	231	286	341	396	451	506	561
12	78	144	210	276	342	408	474	540	606	672
u. s. w.										

§. 272.

Textur der Tabelle. 1) Addiret, auf bekannte Art, die Wurzeln 1. 2. 3. 4 ꝛc. so entstehen die simpeln Trigonalzahlen 1. 3. 6. 10 ꝛc. so wie man solche unter der Rubrik vom 3-Eck, nach der Reihe herunter verzeichnet findet.

2) Formiret die aus der Wurzel 2 hervorgehenden verschiednen Polygonale, die in ihrer Horizontalfolge hinter einander nichts als eine simple arithmetische Progreßion machen, durch die erste Trigonale 1, indem solche zur Differenz dieser Progreßionalen genommen und zu jeder vorhergehenden Zahl addiret wird. Kommt 3. 4. 5. 6 ꝛc.

3) Formiret die auf die Wurzel 3 gegründeten Polygonale durch die zweyte Trigonale 3, indem solche zu 6, und zu jedem Collect aufs neue addiret wird; kommt die simple arithmetische Progreßion 6. 9. 12. 15 ꝛc.

4) Formiret die zur Wurzel 4 gehörigen Polygonale durch die dritte Trigonale 6, indem solche zu 10, und zu je-

dem Collect aufs neue addiret wird; kömmt die simple Progreßion 10. 16. 22. 28 u. s. w.

§. 273.

Gebrauch der Tabelle. 1) Es werden 28 Kugeln gegeben, um daraus ein simples Sechseck zu formiren. Wie viele Kugeln werden auf eine Seite des Sechsecks kommen? Man suche die Rubrik 6 Eck, und unter selbiger die Zahl 28. Wenn nun unter der Rubrike von Seite oder Wurzel die der hexagonischen Zahl 28 zugehörige Wurzel gesuchet wird: so findet man daselbst die Zahl 4, und werden also 4 Kugeln auf eine Seite des zu construirenden Sechseckes kommen. Man sehe annoch Tab. II. Fig. 2.

2) Es soll ein simples Sechseck formiret werden, und auf eine Seite desselben sollen 4 Kugeln kommen. Wie viele Kugeln werden überhaupt erfordert? Man suche unter der Rubrik der Seiten die Zahl 4, und unter der Rubrik von 6 Eck die daraus erzeugte Hexagonalzahl. Wenn nun das Fach, in welches beyde Rubriken zusammentreffen, die Zahl 28 enthält: so ist 28 die verlangte Zahl der zur Construction des Sechsecks nöthigen Kugeln.

Anfang einer Progreßionstabelle BB der central Polygonalzahlen.

Seite oder Wurzel	3 Eck.	4 Eck.	5 Eck.	6 Eck.	7 Eck	8 Eck.	9 Eck.	10 Eck.	11 Eck.	12 Eck.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37
4	19	25	31	37	43	49	55	61	67	73
5	31	41	51	61	71	81	91	101	111	121
6	46	61	76	91	106	121	136	151	166	181
7	64	85	106	127	148	169	190	211	232	253
8	85	113	141	169	197	225	253	281	309	337
9	109	145	181	217	253	289	325	361	397	433
10	136	181	226	271	316	361	406	451	496	541
11	166	221	276	331	386	441	496	551	606	661
12	199	265	331	397	463	529	595	661	727	793

§. 274.

Textur der Tabelle. 1) Multipliciret die Wurzel 1 mit dem Exponenten des Polygons, und addiret zum Product die erste Centralpolygonale 1. Das Collect giebet die zweyte Centralpolygonale. Das Polygon sey 3. Also $1 \times 3 = 3$, und $3 + 1 = 4$; die gefundne dreyeckigte Centralpolygonale.

2) Multipliciret die Wurzel 2 mit dem Exponenten des Polygons, und addiret die vorhin gefundne zweyte Centralpolygonale. Das Collect giebet die dritte Centralpolygonale. Das Polygon sey wiederum 3. Also $2 \times 3 = 6$, und $6 + 4 = 10$; die gefundne dreyeckigte Centralpolygonale.

3) Multipliciret die Wurzel 3 mit dem Exponenten des Polygons, und addiret die vorhin gefundne dritte Centralpolygonale. Das Collect giebet die vierte Centralpolygonale. Das Polygon sey wiederum 3. Also $3 \times 3 = 9$ und $9 + 10 = 19$, die gefundne dreyeckigte Centralpolygonale.

Die Differenzen der die simpeln Progreßionalen enthaltenden Horizontalreihen sind wiederum die Trigonalzahlen, so wie bey der Tabelle (AA), nemlich 1, 3, 6, 10, 15 u. s. w. Die aus der Wurzel 2 entstehenden Polygonalen 4, 5, 6, 7 haben die 1 zur Differenz; die aus der Wurzel 3 entstehenden 10, 13, 16, 19 ꝛc. haben die 3 zur Differenz, u. s. w.

§. 275.

Gebrauch der Tabelle. 1) Es werden 37 Kugeln gegeben, um daraus ein Centralsechseck zu formiren. Wie viele Kugeln werden auf eine Seite des Sechsecks kommen? Vier. Man sehe annoch Fig. 6. Tab. II.

2) Es soll ein Centralsechseck formiret werden, und auf eine Seite desselben sollen 4 Kugeln kommen. Aus wie viel Kugeln wird das ganze Sechseck bestehen? Aus sieben und dreyßig. Man sehe annoch Fig. 6. Tab. II.

Anfang einer Progreßionstabelle CC der simplen Pyramidalzahlen.

Seite oder Wurzel	3 Eck.	4 Eck.	5 Eck.	6 Eck.	7 Eck.	8 Eck.	9 Eck.	10 Eck.	11 Eck	12 Eck.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46
4	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
5	35	55	75	95	115	135	155	175	195	215
6	56	91	126	161	196	231	266	301	336	371
7	84	140	196	252	308	364	420	476	532	588
8	120	204	288	372	456	540	624	708	792	876
9	165	285	405	525	645	765	885	1005	1125	1245
10	220	385	550	715	880	1045	1210	1375	1540	1705
11	286	506	726	946	1166	1386	1606	1826	2046	2266
12	364	650	936	1222	1508	1794	2080	2366	2652	2938

§. 276.

Textur der Tabelle. Wenn man die Zahlen jeder Horizontalreihe unter sich vergleichet, so findet man, daß z. E. die Reihe 4. 5. 6. 7 ꝛc. die Zahl 1 zur Differenz hat; daß die Reihe 10. 14. 18. 22 ꝛc. die Zahl 4, und daß die Reihe 20. 30. 40. 50 ꝛc. die Zahl 10 zu ihrer Differenz hat, u. s. w. Diese Differenzzahlen findet man unter der Rubrik vom 3 Eck, wo sie mit 1. 4. 10. 20. 35 ꝛc. die dreyeckigten simpeln Pyramidalen formiren. Wenn nun jede folgende Horizontalreihe die simpeln dreyeckigten Pyramidalen der vorhergehenden Reihe zu ihrer Differenz hat, wie aus obiger Vergleichung erhellet: so brauchet man nichts weiter, als die Perpendikularreihe der dreyeckigten Pyramidalen 1. 4. 10. 20 ꝛc. so weit zu erstrecken, als man beliebet, um jede folgende Horizontalreihe mit der dreyeckigten Pyramidalzahl der vorhergehenden Reihe formiren zu können. Z. E. um die aus der Wurzel 7 hervorgehenden Pyramidalen 84. 140. 196. 252 ꝛc. zu finden. Die Zahl 84

ist

iſt per Hypotheſin da, und die vorhergehende dreyeckigte Pyramidale iſt 56. Saget alſo 56 + 84 = 140; 56 + 140 = 196; 56 + 196 = 252; 56 + 252 = 308, und ſo weiter.

§. 277.

Gebrauch der Tabelle. 1) Es werden 165 Kugeln gegeben, um daraus einen dreyeckigten Kugelhaufen zu formiren. Wie viele Kugeln werden auf eine Seite der Unterlage kommen? Neun.

2) Es ſoll ein dreyeckigter Kugelhauffen aufgeſetzet werden, und eine Seite der Unterlage ſoll aus 10 Kugeln beſtehen. Wie viele Kugeln werden dazu erfordert? Zweyhundert und zwanzig.

Anfang einer Progreßionstabelle DD der central Pyramidalzahlen.

Seite oder Wurzel	3 Eck.	4 Eck.	5 Eck.	6 Eck.	7 Eck.	8 Eck.	9 Eck.	10 Eck.	11 Eck.	12 Eck.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
3	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51
4	34	44	54	64	74	84	94	104	114	124
5	65	85	105	125	145	165	185	205	225	245
6	111	146	181	216	251	286	321	356	391	426
7	175	231	287	343	399	455	511	567	623	679
8	260	344	428	512	596	680	764	848	932	1016
9	369	489	609	729	849	969	1089	1209	1329	1449
10	505	670	835	1000	1165	1330	1495	1660	1825	1990
11	671	891	1111	1331	1551	1771	1991	2211	2431	2651
12	870	1156	1442	1728	2014	2300	2586	2872	3158	3444

§. 278.

Textur der Tabelle. Die Perpendikularreihe der dreyeckigten Centralpyramidalen, 1. 5. 15. 34. 65 ꝛc. muß nach der Regel des fünften Abſchnitts, §. 265. 267. geſuchet werden,

den, und man erſtrecket ſolche ſo weit man will. Wenn dieſes geſchehen iſt, ſo nimmt man die dreyeckigten ſimpeln Pyramidalen 1. 4. 10. 20. 35 ꝛc. mit deren Hülfe die vorhergehende Tabelle CC formiret worden, vor ſich, und verfährt, wie folget, z. E. um die aus der Wurzel 4 entſtehenden Centralpyramidalen zu finden. Die Zahl 34 aus der Reihe der perpendikulär heruntergehenden dreyeckigten Centralpyramidalen wird vorausgeſetzt da zu ſeyn; und die vor der Wurzel 4 vorhergehende Zahl 3 hat zu ihrer ſimpeln Pyramidale 10, wie bekannt iſt. Saget alſo: 10 + 34 = 44; 10 + 44 = 54; 10 + 54 = 64, u. ſ. w.

§. 279.

Gebrauch der Tabelle. 1) Es werden 85 Kugeln gegeben, um daraus eine viereckigte Centralpyramide zu verfertigen. Wie viele Würfel werden auf eine Seite der Unterlage genommen werden müſſen? Fünf. 2) Es ſoll eine viereckigte Centralpyramide formiret werden, und eine Seite der Unterlage ſoll aus fünf Würfeln beſtehen. Wie viele Würfel werden dazu erfordert? Fünf und achtzig.

Neunter Abſchnitt.

Von Erfindung der figürlichen Zahlen durch die Multiplication.

§. 280.

In dem erſten Abſchnitt dieſes Hauptſtücks, in welchem wir von Erfindung der figürlichen Zahlen durch die Addition gehandelt, wurden die Polygonalzahlen als Summen einer einfachen arithmetiſchen Progreßion, und die körperlichen, und zwar daſelbſt pyramidenförmige Zahlen als Summen zweyer oder mehrer Polygonalzahlen beſchrieben. In dieſem Abſchnitt, wo die figürlichen Zahlen durch die Multiplication geſuchet werden, ſind die Polygonalzahlen nichts anders als ein Product von zwey, und die körperlichen von drey Factoren oder Seiten. Dieſe verſchiedne

schiedne Beschreibung wird kein Befremden erwecken, wenn man bedenkt, daß die Multiplication nichts weiter als eine abgekürzte Addition ist, und daß folglich alles was durch die Multiplication gefunden wird, auch durch die Addition, obwohl durch einige Umwege gefunden werden kann. Da nun gewisse figürliche Zahlen weit bequemer durch die Multiplication als Addition gefunden werden können, und just diejenigen, wovon allhier gehandelt werden soll, in diesem Falle sind: so mußten wir uns natürlicher Weise nach dem Idiom der Multiplication richten, und die figürlichen Zahlen daraus beschreiben. Es sind aber die hier vorkommenden figürlichen Zahlen keine andere als flache und körperliche viereckigte Zahlen.

§. 281.

Bey der Multiplication für die flachen viereckigten Zahlen sind die beyden Factoren entweder gleich oder ungleich. 1) Sind sie gleich, so entstehen viereckigte Zahlen, die in der Lehre von der Erfindung der figürlichen Zahlen durch die Addition Tetragonalzahlen, und allhier Quadratzahlen genennet werden. Man beschreibet sie als Zahlen, deren Einheiten sich in ein reguläres Viereck versetzen lassen, und sie haben auch ihre Benennung daher. Auf diese Weise ist die Zahl 4 eine Quadratzahl, weil sie aus 2×2 entspringet; und die Zahl 9, weil sie aus 3×3 entspringet.

2) Sind die beyden Factoren ungleich, so entstehen länglicht viereckigte Zahlen, welche insgemein schlechtweg länglichte oder parallelogrammische Zahlen genennet, und als Zahlen beschrieben werden, deren Einheiten sich in ein länglichtes Viereck versetzen lassen. Auf diese Weise ist die Zahl 6 aus 2×3, und die Zahl 10 aus 2×5 eine länglichte Zahl.

Der Unterscheid zwischen beyderley Arten von Zahlen, ist also, geometrisch betrachtet dieser, daß in den Quadratzahlen Länge und Breite einander gleich, und daß solche in den länglichten Zahlen ungleich sind.

§. 282.

§. 282.

Bey der Multiplication für die körperlichen viereckigten Zahlen sind die drey Factoren entweder gleich, oder nur ihrer zwey, oder sie sind alle drey ungleich. 1) Wenn alle drey Factoren gleich sind, so entstehet eine körperliche Zahl, die sich in einen Cubus versetzen lässet, und daher eine Cubikzahl genennet wird. Versetzet 4 Würfel in ein Quadrat, und setzet ein zweytes gleiches Quadrat darüber: so entstehet die Cubikzahl 8 aus $2\times2\times2$.

2) Wenn unter den drey Factoren nur zwey gleich sind: so entstehet eine körperliche Zahl, die sich in ein viereckigtes Prisma versetzen lässet, und daher eine viereckigte prismatische Zahl genennet wird. Formiret ein Parallelogramm, 3 lang und 2 breit. Setzet ein zweytes gleiches Parallelogramm darüber: so kömmt das viereckigte Prisma 12, aus $2\times3\times2=12$.

3) Wenn alle drey Factoren ungleich sind, so entstehet eine körperliche Zahl, die sich in ein Parallelepipedum versetzen lässet, und daher eine parallelepipedische Zahl genennet wird. Formiret ein Parallelogramm aus sechs Würfeln, 3 lang und 2 breit, wie vorhin. Setzet drey gleiche Parallelogrammen darüber: so entstehet das Parallelepipedum 24 aus $2\times3\times4=24$.

Anmerkung.

Die Quadratzahlen werden sonsten auch gleich gleiche Zahlen, und die parallelogrammischen ungleich ungleiche Zahlen genennet. Wenn die parallelogrammischen Zahlen aus zwey geraden Zahlen bestehen: so werden sie gerad gerade Zahlen genennet, z. E. 24 aus 4×6; und wenn sie aus zwey ungeraden Zahlen bestehen, so werden sie ungerad ungerade Zahlen genennet, z. E. 15 aus 3×5. Ist der eine Factor gerade und der andere ungerade, so heissen sie gerade ungerade, als $2\times3=6$; oder ungerad gerade, als $3\times4=12$. Die Cubikzahlen werden sonsten auch gleich gleich gleiche Zahlen, und die parallelepipedischen ungleich ungleich ungleiche Zahlen genennet. Wenn die dritte Seite der prismatischen Zahl kleiner als die beyden andern gleichen sind: so heisset sie eine gleich gleich kleinere

Zahl

Zahl, z. E. $3 \times 3 \times 2 = 18$; und wenn die dritte Seite gröſſer iſt, als die beyden andern gleichen, ſo heiſſet ſie eine gleich gleich gröſſere Zahl, als $2 \times 2 \times 3 = 12$.*)

§. 283.

Es exiſtiret eine Flächenzahl, zu deren Erfindung ein gewiſſer Lehrſatz des Pythagoras von dem rechtwinklichten Triangel Gelegenheit gegeben, und welcher bey dem Parallelogramm um ſo mehr genutzet werden kann, da jedes Parallelogramm juſt aus zwey gleichen rechtwinklichten Triangeln beſteht. Dieſer uns bereits bekannte Lehrſatz iſt: daß das Quadrat der Hypotenuſe eines rechtwinklichten Triangels, den ſummirten Quadraten der beyden Catheten zuſammengenommen gleich iſt. Die zu bemerkende Flächenzahl heiſſet eine Diametralzahl, und es wird dadurch jedes Product zweyer Zahlen verſtanden, deren Quadrate zuſammengenommen dem Quadrat einer dritten gröſſern Zahl gleich ſind. Wenn nun dieſer Fall nirgends anders, als bey dem rechtwinklichten Triangel vorkommt, ſo geſchicht es dadurch, daß die Diametralzahl auch als das Product der Höhe in die Grundlinie eines rechtwinklichten Triangels, oder auch als eine ſolche Zahl beſchrieben wird, welche den duplirten Inhalt eines rechtwinklichten Triangels enthält.

Es ſeyn die drey Zahlen 3, 4, 5 eines rechtwinklichten Triangels. Das Product der beyden Zahlen 3 und 4 iſt 12. Wenn nun die Quadrate derſelben $9 + 16 = 25$: ſo iſt vermöge der erſten Beſchreibung die Zahl 12, in ſoweit ſolche aus 3×4 entſtanden, eine Diametralzahl. Die zweyte Beſchreibung erkläret ſich von ſelbſt durch die Höhe 3 und die Grundlinie 4; und die dritte Beſchreibung iſt aus der Ausmeſſung des Triangels nach ſeinem Flächeninhalt klar. Dieſer durch die mit der halben Grundlinie multiplicirte Höhe gefundne Inhalt iſt 6. Dupliret denſelben, ſo kömmt die Diametralzahl 12, deren Diameter die Hypotenuſe

*) Man ſehe allhier, was im §. 2. der Anleit. zu den Anfangsgr. des Progreſſionalcalculs von den ebenen und dichten Zahlen geſetzet worden iſt.

tenuse 5 ist, so wie ihre Seiten die Höhe und Grundlinie durch 3 und 4 sind.

Dergleichen Diametralzahlen sind nun alle parallelogrammische Zahlen, obgleich die Hypotenuse, welche in dem Parallelogramm zur Diagonale wird, nicht allezeit in ganzen Zahlen dargeleget werden kann; so wie gegentheils, wenn sich diese in ganzen Zahlen finden lässet, die Seiten nicht allezeit in solchen erscheinen. In dem Bezirk der monadischen Zahlen sind nicht mehr als die Zahlen 3, 4 und 5, welche den pythagorischen Lehrsatz in ganzen Zahlen geben, und eine ganze Diametralzahl entspringen lassen, nemlich die Zahl 12. Eine andre Diametralzahl ist 60, welche aus dem rechtwinklichten Triangel 5, 12, 13 entstehet, in welchem die Seiten 5 und 12, unter einander multipliciret, die Zahl 60 geben; und in welchem das Quadrat 169 aus dem Diameter 13, den Quadraten 25 aus 5×5, und 144 aus 12×12, wenn solche addiret werden, gleich ist. Der rechtwinklichte Triangel 6, 8, 10 bestehet zwar nur aus dem Duplo des obigen 3, 4, 5. Hingegen giebet er, durch 6×8, die Diametralzahl 48; und die Summe der Quadrate von 6 und 8 ist gleich dem Quadrate von 10, nemlich 100. Ein andrer rechtwinklichter Triangel in ganzen Zahlen ist 7, 24, 25; ein anderer 8, 15, 17; ein anderer 9, 40, 41, und so weiter.

Anmerkung.

Wenn die beyden Catheten, oder die Höhe und Grundlinie eines rechtwinklichten Triangels von gleicher Größe sind: so kann derselbe niemals in ganzen Zahlen dargeleget werden. Z. E. es sey ein rechtwinklichter Triangel, dessen Basis $= 12$, und Höhe auch $= 12$. Wenn nun $12 \times 12 = 144$, und $2 \times 144 = 288$: so sollte das Quadrat der Hypotenuse auch 288 geben. Es existiret aber keine Quadratzahl, die 288 groß wäre, obgleich eine von 289 vorhanden ist, die der Wurzel 17 angehöret.

§. 284.

Wie man die durch die Multiplication erzeugten figürlichen Zahlen in eine Progreßion bringet, wird in den folgenden Abschnitten gezeiget werden.

Zehn-

Zehnter Abschnitt.

Von der Progreßion der durch die Multiplication mit gleichen Factoren entstehenden viereckigten flachen und körperlichen Zahlen, ihren geometrischen Vorstellungen, und Eigenschaften.

§. 285.

Es ist aus dem vorhergehenden Abschnitt bekannt, daß die Quadratzahlen ein Product von zwey gleichen Zahlen oder Factoren sind, und die Cubikzahlen ein Product von drey gleichen Factoren. Da die kleinsten Factoren (in ganzen Zahlen) keine andere Zahlen als die Einheiten seyn können: so folget, daß wenn man die Quadrat- und Cubikzahlen in einer Progreßion beysammen haben will, man die Multiplication mit den Einheiten anfangen, und also erstlich die 1, hernach die 2, alsdenn die 3 u. s. w. so vielmal setzen, und mit sich selbst multipliciren müße, als zur Hervorbringung einer Quadrat- oder Cubikzahl nöthig ist; z. E.

(a) Die Quadratzahlen nach ihrer Ordnung zu bekommen.

1 × 1 = 1
2 × 2 = 4
3 × 3 = 9
4 × 4 = 16
5 × 5 = 25
6 × 6 = 36

(b) Die Cubikzahlen nach ihrer Ordnung zu bekommen.

1 × 1 × 1 = 1
2 × 2 × 2 = 8
3 × 3 × 3 = 27
4 × 4 × 4 = 64
5 × 5 × 5 = 125
6 × 6 × 6 = 216

§. 286.

Man siehet, daß vermittelst dieses Processes die Quadrat- und Cubikzahlen aus den verschiednen geometrischen Progreßionen zusammengesuchet werden; denn die Quadratzahl 4 und Cubikzahl 8 gehören in die Progreßionem du-

plam 2. 4. 8. 16 ꝛc. Die Quadratzahl 9 und Cubikzahl 27 gehören in die Progreßionem triplam 3. 9. 27. 81. ꝛc. u. s. w. Ungeachtet aber diese Zahlen auf solche Art zusammengelesen werden, so machen sie nichts desto weniger, jede Art unter sich, eine Progreßion aus, und zwar eine zusammengesetzte arithmetische Progreßion, wie man aus folgender Vorstellung, von welcher das leztere Exempel bereits in den Anfangsgründen des Progreßionalcalculs gelegentlich vorgekommen ist, ersehen wird.

Quadratzahlen.	Erste Differenzen.	Zweyte Differenzen.
1	0	0
4	3	0
9	5	2
16	7	2
25	9	2
36	11	2
u. s. w.		

Cubikzahlen.	Erste Differenzen.	Zweyte Differenzen.	Dritte Differenzen.
1	0	0	0
8	7	0	0
27	19	12	0
64	37	18	6
125	61	24	6
216	91	30	6
u. s. w.			

§. 287.

Da sowohl die Quadrat- als Cubikzahlen eine arithmetische Progreßion machen; die arithmetische Progreßion aber aus der Addition entspringet: so müssen die Quadrat- und Cubikzahlen auch durch die Addition gefunden werden können. Von den Quadratzahlen ist uns solches bereits in der Lehre von der Erfindung der figürlichen Zahlen durch die Addition, woselbst sie unter der Benennung von Tetragonalzahlen vorkommen, bekannt geworden. Ich will den Proceß aber allhier kürzlich, wiewohl mit etwas veränderter Manier, wiederhohlen, und nicht allein die Erfindung der Cubikzahlen durch die Addition, sondern annoch eine andere Aufgabe für beyde Arten von Zahlen hinzufügen, damit man die hieher gehörigen Lehren an einem Orte beysammen haben möge.

(I.) Die

(I.) Die Quadratzahlen nach ihrer Ordnung von 1 an zu finden. §. 288.

Summiret die ungeraden Zahlen 1. 3. 5. 7. 9. u. ſ. w. dergeſtalt, daß für das Quadrat der Wurzel 2 die beyden erſten ungeraden Zahlen 1 und 3; für das Quadrat der Wurzel 3 die drey erſten 1. 3 und 5; für das Quadrat der Wurzel 4 die vier erſten 1. 3. 5 und 7, u. ſ. w. ſummiret werden, als:

Für die Wurzel 1, 1 = 1
2, 1 + 3 = 4
3, 1 + 3 + 5 = 9
4, 1 + 3 + 5 + 7 = 16
5, 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25
6, 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36
7, 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49
u. ſ. w.

(II.) Aus der bekannten Zahl eines Quadrats das Quadrat der zunächſt folgenden höhern Zahl zu finden. §. 289.

Summiret das gegebne Quadrat, die Wurzel deſſelben, und die Wurzel des geſuchten Quadrats. Es ſey z. E. $10^2 = 100$. Hieraus 11^2 zu finden.

Das gegebne Quadrat = 100
Wurzel deſſelben = 10
Dieſe Wurzel + 1 = 11
121 Das gefundne Quadrat der Zahl 11.

(III.) Die Cubikzahlen nach ihrer Ordnung von 1 an zu finden. §. 290.

1) Summiret die arithmetiſche Progreßion 1. 6. 12. 18. 24. 30, u. ſ. w. kömmt die central Hexagonalprogreſſion 1. 7. 19. 37. 61 ꝛc. 2) Summiret die gekommne Progreßion: ſo kommen die Cubikzahlen 1. 8. 27. 64, u. ſ. w. als:

als:	1	1	1
	6	7	8
	12	19	27
	18	37	64
	24	61	125 u. s. w.

Auf eine andere Art.

Addiret so viele ungerade Zahlen, als die Wurzel des zu findenden Cubus Einheiten enthält, doch so, daß die zur Erfindung des vorhergehenden Cubus gebrauchten ungeraden Zahlen nicht wieder zur Erfindung des folgenden gebrauchet werden. Eine Vorstellung wird dieses deutlicher machen.

Wurzeln.

1, $1 = 1$
2, $3 + 5 = 8$
3, $7 + 9 + 11 = 27$
4, $13 + 15 + 17 + 19 = 64$
5, $21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125$
6, $31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 = 216$

(IV.) Aus der bekannten Zahl eines Cubus den Cubus der zunächst folgenden höhern Zahl zu finden. §. 291.

1) Multipliciret das Triplum der Wurzel des gegebnen Cubus mit der Wurzel des zu findenden Cubus. 2) Summiret das um 1 vermehrte Product und den gegebnen Cubus. Z. E. es sey $10^3 = 1000$; um daraus 11^3 zu finden.

Das Triplum der Wurzel 10 des gegebnen Cubus ist	= 30
Wurzel des zu findenden Cubus	= 11
	330
	+ 1
Der gegebne Cubus	1000
	1331. Der gefundne Cubus von 11.

Auf

Auf eine andere Art.

Summiret 1) die gegebne Cubikzahl; 2) das triplirte Quadrat ihrer Wurzel; 3) das Duplum dieſer Wurzel, und 4) die Wurzel der zu findenden Cubikzahl. Z. E. aus $10^3 = 1000$ die Zahl 11^3 zu finden.

1000	Die gegebne Cubikzahl.
300	Triplirtes Quadrat 100 der Wurzel 10.
20	Duplum dieſer Wurzel.
11	Wurzel der zu findenden Cubikzahl.
1331	Der gefundne Cubus von 111.

Anmerkung.

Wer die Guldiniſchen oder Wolfiſchen Quadrat- und Cubikzahlentabellen entweder weiter fortführen oder nur revidiren wollte, welches leztere keine unnöthige Arbeit ſeyn dürfte, würde dazu keinen bequemern Calcul, als den bey der erſten oder zweyten, und vierten Aufgabe nach der erſtern Manier, erwählen können.

§. 292.

Zu den durch die Multiplication mit gleichen Factoren entſtehenden figürlichen Zahlen gehören auch die Biquadrat- Superſoliden- Quadratcubik- und alle folgenden Zahlen, ſo wie ſolche in der Lehre von der geometriſchen Progreßion dargeleget worden, die, ob ſie gleich die Sphäre der Geometrie überſteigen, dennoch in dem Calcul ihren, obwohl nicht ſo ausgebreiteten Nutzen, als die Quadrat- und Cubikzahlen haben. Sie überſteigen aber die Sphäre der Geometrie, weil ſolche nicht mehr als eine dreyfache Art der Dimenſion zum Gegenſtande hat; bey jenen Zahlen aber Körper von vier, fünf und mehr Dimenſionen gedacht werden müſſen, und in der ganzen Welt kein Körper exiſtiret, der ſo vielfacher Dimenſionen fähig wäre. Es hat mit dieſen Zahlen alſo eben die Bewandtniß, als mit den durch die Addition entſtehenden Pyramidalen 2ter, 3ter, 4ter Ordnung, u. ſ. w. und ſowohl alle dieſe Pyramidal- als Biquadrat- Superſolide- und Quadratcubiſche Kör-

per ꝛc. sind eingebildte Körper, wovon man sich nur einen uneigentlichen und entweder vom Flächen- oder Cubikmaaß erborgten Begriff machen kann.

§. 293.

Die Biquadratzahlen können auch durch die Addition der ungeraden Zahlen gefunden werden, wie die Quadrat- und Cubikzahlen, wenn allezeit so viele ungerade Zahlen nach ihrer natürlichen Ordnung von 1 an, addiret werden, als die Progreßion der Quadratzahlen in jedem Gliede Einheiten enthält. Wenn nun das erste Glied der quadratischen Progreßion eine 1 ist; das zweyte eine 4; das dritte eine 9; das vierte eine 16, u. s. w. so fange man zuvörderst die Biquadratische Progreßion mit 1 an, und addire hernach, um die zweyte biquadratische Zahl zu erhalten, die vier ersten ungeraden Zahlen; um die dritte zu erhalten, die neun ersten ungeraden Zahlen; um die vierte zu erhalten, die sechszehn ersten ungeraden Zahlen, u. s. w. als:

1 = 1
1+3+5+7 = 16
1+3+5+7+9+11+13+15+17 = 81
1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25+27+29+31 = 256

§. 294.

Wenn die Frage wäre, wie man die Quadrat und Cubiktabellen am leichtesten mit Biquadrattabellen vermehren könne, so würde, da das Quadrat und der Cubus der Wurzel des verlangten Biquadrats aus den zwey ersten Tabellen bekannt sind, solches vermittelst folgender Operationen geschehen können.

1) Summiret die nächst kleinere Wurzel, ihr Quadrat und ihren Cubus, und quadrupliret die Summe.

2) Addiret das Duplum des Quadrats der nächst kleinern Zahl + 1.

3) Ad-

3) Addiret das gegebne Collect zum gegebnen Biquadrat.

Z. E. es sey gegeben das Biquadrat 331776 von 24, und es soll das Biquadrat von 25 gefunden werden.

1)	$24 =$	24
	$24^2 =$	576
	$24^3 =$	13824
		14424
		4
		57696
2)	$2\times24^2+1$	1153
		58849
	$+24^4=+$	331776
		$390625 = 25^4$.

§. 295.

Daß, so wie die Quadrat- und Cubikzahlen, so auch die Biquadrat-Superſolide und Quadratcubikzahlen, auf die arithmetiſche Progreßion zurückgeführet werden können, iſt aus folgender Vorſtellung zu erſehen.

(A) Biquadratzahlen.	Erſte Differenzen.	Zweyte Differenzen.	Dritte Differenzen.	Vierte Differenzen.
1	0	0	0	0
16	15	0	0	0
81	65	50	0	0
256	175	110	60	0
625	369	194	84	24
1296	671	302	108	24
2401	1105	434	132	24
4096	1695	590	156	24 u. ſ. w.

(B) Superfolide-Zahlen.	Erste Differenzen.	Zweyte Differenzen.	Dritte Differenzen.	Vierte Differenzen.	Fünfte Differenzen.
1	0	0	0	0	0
32	31	0	0	0	0
243	211	180	0	0	0
1024	781	570	390	0	0
3125	2101	1320	750	360	0
7776	4651	2550	1230	480	120
16807	9031	4380	1830	600	120
32768	15961	6930	2550	720	120 u. s. w.

(C) Quadrat-cubische Zahlen.	Erste Differenzen.	Zweyte Differenzen.	Dritte Differenzen.	Vierte Differenzen.	5te Differenzen	6te Differenzen
1	0	0	0	0	0	0
64	63	0	0	0	0	0
729	665	602	0	0	0	0
4096	3367	2702	2100	0	0	0
15625	11529	8162	5460	3360	0	0
46656	31031	19502	11340	5880	2520	0
117649	70993	39962	20460	9120	3240	720
262144	144495	73502	33540	13080	3960	720
531441	269297	124802	51300	17760	4680	720
1000000	468559	199262	74460	23160	5400	720
	u. s. w.					

Man wird bemerket haben, daß die leztern Differenzen der vorhergehenden auf die arithmetische Progreßion reducirten Quadrat- Cubik- Biquadrat- Supersolide und Quadratcubikzahlen, aus den Zahlen 2. 6. 24. 120, und 720 bestehen. Diese Zahlen gehören in den combinatorischen Calcul, und zwar zur Lehre von der abwechselnden Verbindung unähnlicher Grössen. Man kann daselbst die Folge dieser Zahlen nachschlagen, wenn man etwann mit der Reduction der geometrischen Zahlen auf die arithmetische Progreßion weiter fortfahren, und von der Richtigkeit der leztern gesichert seyn will.

§. 296.

§. 296.

Die geometrische Vorstellung einer Quadratzahl ist zwar bereits oben in dem Artikel von den Tetragonalzahlen gelehret worden, indem beyde Wörter einerley bedeuten. Ich will sie aber noch einmal auf eine etwas veränderte Art kürzlich wiederhohlen, und die Vorstellung der andern folgenden Zahlen hinzufügen.

(A) Vorstellung der Quadratzahlen 4, 9 und 16. Wenn man ein Quadrat aufreisset, und den Raum von einer Ecke zur andern durch zwey Punkte unterscheidet: so hat man die Quadratzahl 4 aus 2 X 2. Unterscheidet man diesen Raum durch drey in gleicher Weite von einander abstehende Punkte: so hat man die Quadratzahl 9 aus 3 X 3; und unterscheidet man den Raum durch vier Punkte: so hat man die Zahl 16 aus 4 X 4 u. s. w. Man sehe Fig. 9. Tab. I. wo man diese und noch mehrere Quadratzahlen, und zwar allezeit jede vorhergehende kleinere in dem Umfang der folgenden größern enthalten findet. Wenn man mit Kugeln oder Würfeln ein Quadrat formiren will, so muß die Anzahl der Reihen oder Linien und die Anzahl der Kugeln in jeder Reihe der Wurzel der Quadratzahl gleich seyn, wie z. E. bey Fig. 7. und 9, Tab. III, wo die Quadrate 4 und 9 vorgestellet sind.

(B) Vorstellung der Cubikzahlen. Construiret aus Würfeln ein Quadrat, dessen Wurzel 2 ist, und setzet darüber ein zweytes gleiches Quadrat: so kömmt der Cubus 8. Construiret ein Quadrat, dessen Wurzel 3 ist, und setzet zwey gleiche Quadrate darüber: so kömmt der Cubus 27. Construiret ein Quadrat, dessen Wurzel 4 ist, und setzet darüber drey gleiche Quadrate: so kömmt der Cubus 64, u. s. w.

Im perspectivischen Riß wird ein Cubus vorgestellet, wie bey Fig. 1. Tab. IV. wo AB die Länge, BC die Breite, und CD die Tiefe des Körpers bezeichnet. Auf eine andere Art findet man den Cubus bey Fig. 8. dieser Tafel vorgestellet. Wenn man jede Art der Dimension aus zwey

Punkten concipiret: so ist die Zahl des Cubus die Zahl 8, aus 2 X 2 X 2 = AB X BC X CD. Concipiret man solche aus drey Punkten, so ist die Zahl des Cubus die Zahl 27 aus 3 X 3 X 3 = AB X BC X CD. Concipiret man solche aus vier Punkten: so ist die Zahl des Cubus 64 aus 4 X 4 X 4 = AB X BC X CD, u. s. w.

(C) Vorstellung der Biquadratzahlen. Wenn man die Biquadratzahlen ausser ihrer Beziehung auf diejenige Progreßion, in welche sie ihrer Wurzel nach hingehören, betrachtet: so sind sie entweder ordentliche Quadratzahlen aus einer andern Progreßion, oder sie sind parallelogrammische; in beyden Fällen aber Zahlen von zwey Dimensionen; oder sie sind ordentliche prismatische Zahlen, und in diesem Falle von drey Dimensionen. Z. E. die Biquadratzahl 16 aus der zweyten geometrischen Progreßion 2. 4. 8. 16 ꝛc. ist ausser ihrer Beziehung auf diese Progreßion eine ordentliche Quadratzahl, die in die vierte Progreßion 4. 16. 64 ꝛc. gehöret, und daselbst aus 4 X 4 entstehet. Sie ist ferner eine parallelogrammische Zahl, in so weit man sie aus 2 X 8 herleitet, und in beyden Fällen ist sie eine Flächenzahl. Endlich ist sie eine prismatische, und also eine Zahl von drey Dimensionen, in soweit sie aus 2 X 2 X 4 = 16 entspringet.

Betrachtet man aber die Zahl 16 als ein Product aus 2 X 2 X 2 X 2, und also als eine Zahl von vier Dimensionen: so stellet man solche im Flächenmaaße vor, wie bey Fig. 8. Tab. III. nemlich als eine solche Zahl, deren Wurzel der Wurzel des kleinern mit Diagonalen durchzogenen Quadrats gleich ist, und welche, als ein Quadrat aus einem Quadrat, das kleinere Quadrat viermal enthält, indem die Wurzel der beyden Quadrate die Zahl 2, und 2 X 2 = 4 ist.

Wenn die Zahl 81 auf eine ähnliche Art als ein Product aus 3 X 3 X 3 X 3, und also als eine Zahl von vier Dimensionen betrachtet wird: so ist ihre Vorstellung im Flächenmaaße wie bey Fig. 10. Tab. III.

Im

Im perſpectiviſchen Riß endlich zeiget ſich eine Biquadratzahl, wie bey Fig. 2 und 9, Tab. IV. Wenn man ſich die vier Dimenſionen AB X BC X CD X DE eine jede mit zwey Punkten denket, ſo kömmt 16 aus 2 X 2 X 2 X 2, und denket man ſich ſolche mit drey Punkten, ſo kömmt 81 aus 3 X 3 X 3 X 3; u. ſ. w.

Anmerkung.

Es iſt oben geſaget worden, daß die Vorſtellungen der Körper von vier und mehrern Dimenſionen uneigentlich und erborgt ſind. Den Beweis hat man an vorhergehendem Riß, in welchem die beyden Dimenſionen BC und CD eigentlich nur eine einzige Dimenſion durch BD, und zwar alsdenn die Länge des Körpers, ſo wie AB deſſen Breite und DE deſſen Tiefe machen. Wenn bey dieſen Umſtänden BD = 4, und AB = 2, und DE = 2: ſo kömmt nichts anders, als ein priſmatiſcher Körper aus den Zahlen 4 X 2 X 2 = 16; und läſſet man BD für 9 gelten, AB 3, und DE 3: ſo beſtehet das Priſma aus 9 X 3 X 3 = 81. Man kann dieſes auf alle folgende das geometriſche Maaß überſteigende Zahlen und deren Körper in gehörigem Verhältniß anwenden.

(D) **Vorſtellung der Superſolidenzahlen**, welche allezeit die mittlere Proportionale zwiſchen einer durch eben dieſelbe Wurzel hervorgebrachten Quadrat- und Cubikzahl ſind. Ihre körperliche Zeichnung iſt bey Fig. 3. oder 10. Tab. IV, zu ſehen, wo AB X BC X CD X DE X EF = den fünf gleichen Factoren 2 X 2 X 2 X 2 X 2 oder 3 X 3 X 3 X 3 X 3. Die erſtern Factoren geben die Zahl 32, und die leztern geben 243.

Im Flächenmaaße kann die Superſolidezahl niemals anders, als auſſer ihrer Relation, concipiret werden, und da iſt ſie allezeit eine parallelogrammiſche Zahl, die alsdenn in Abſicht auf 32, entweder aus 4 X 8 = 32, Fig. 11. Tab. III. oder aus 2 X 16 = 32, Fig. 12. Tab. III. entſtanden iſt.

(E) **Vorſtellung der Quadratcubikzahlen.** Es ſey die Zahl 64. Wenn man dieſe Zahl auſſer ihren Zuſammen-

sammenhang setzet, und 1) im Flächenmaaß betrachtet: so ist sie daselbst entweder eine ordentliche Quadratzahl aus $8 \times 8 = 64$, die in die Progreßionem octuplam 8. 64. 512 ꝛc. gehöret; oder sie ist eine parallelogrammische Zahl, die entweder aus 2×32, oder 4×16 hervorgebracht seyn kann. 2) Betrachtet man sie hernach im körperlichen Maaß, so ist sie eine ordentliche Cubikzahl aus $4 \times 4 \times 4 = 64$, die in die Progreßionem quadruplam gehöret.

Allhier, wo sie unter der Benennung einer Quadratcubikzahl, mit sechs Dimensionen erscheinet, wird sie, wie bey Fig. 13, Tab. III. als eine Flächenzahl vorgestellet, deren Wurzel der Wurzel des kleinern mit Diagonalen durchzognen Quadrats gleich ist, indem, so wie dieses Quadrat 4 aus 2×2 entstanden, also jenes aus $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$ entstanden ist.

Als eine körperliche Zahl findet man die Quadratcubikzahl 64 bey Tab. IV. Fig. 4 und 11, woselbst $AB \times BC \; CD \times DE \times EF \times FG = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$.

(F) Ich füge annoch die perspectivischen Abbildungen 1) von einer Bsupersoliden Zahl hinzu bey Tab. IV. Fig. 5. und auf eine andere Art bey Fig. 12. Tab. IV. 2) Von einer Triquadratzahl bey Fig. 6. Tab. IV. und auf eine andere Art bey Fig. 1. Tab. V., und 3) von einer Bicubikzahl bey Fig. 7. Tab. IV. und Fig. 2. Tab. V.

§. 297.

Die bekanntern Eigenschaften der viereckigten flachen und körperlichen Zahlen sind:

1) Daß jedes Produkt eines Quadrats in ein anderes ein Quadrat ist; daß jedes Product eines Cubus in einen andern ein Cubus ist; daß jedes Product eines Biquadrats in ein anderes ein Biquadrat ist, u. s. w. und die Wurzeln der gekommnen Quadrat- Cubik- und Biquadratzahlen sind = dem Product der zum Grunde liegenden einen Wurzel in die andere. Z. E.

$2^2 \times 3^2$

$2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36 = 6^2$ und $6 = 2 \times 3$.
$2^3 \times 3^3 = 8 \times 27 = 216 = 6^3$ und $6 = 2 \times 3$.
$2^4 \times 3^4 = 16 \times 81 = 1296 = 6^4$ und $6 = 2 \times 3$.

2) Daß jedes Product zwey durch eine gleiche Zahl vergrößerter Quadrate ein Quadrat ist. Es seyn die Quadrate 4 und 9. Wenn jedes derselben durch 2 vergrössert wird: so kömmt 8 und 18, und $8 \times 18 = 144 = 12^2$. Wenn jedes derselben durch 3 vergrössert wird: so kömmt 12 und 27, und $12 \times 27 = 324 = 18^2$.

3) Aus dem Product einer quadrirten Zahl in eine nicht quadrirte entstehet so wenig ein Quadrat, als aus der Addition einer geraden und ungeraden Zahl eine gerade Zahl entstehen kann. Z. E. 4×6, oder 4×7, oder 4×8 geben keine Quadrate.

4) Alle vollkommne Quadrate haben entweder eine Null, eins, vier, fünf, sechs oder neun zu ihrer ersten Ziffer rechter Hand; und alle Zahlen, welche daselbst eine zwey, drey, sieben oder acht haben sind unvollkommne Quadratzahlen. Mit den Cubikzahlen verhält es sich in diesem Stücke anders, indem sowohl die vier leztern als sechs erstern Ziffern für die ersten Ziffern rechter Hand kommen.

5) In jedem Zehend der Quadrat- und Cubikzahlen folgen die ersten Ziffern rechter Hand einander in eben derjenigen Ordnung, als sie in den Quadraten und Cubis von der Wurzel 1 bis 10 folgen, welches bey Verfertigung einer Quadrat- oder Cubikzahlentabelle sehr zu bemerken ist. Es ist aber die Ordnung dieser Ziffern bey den Quadratzahlen folgende 1. 4. 9. 6. 5. 6. 9. 4. 1. und 0, z. E. im ersten Zehend: 1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81. 100, und im zweyten Zehend: 121. 144. 169. 196. 225. 256. 289. 324. 361. 400.

Die

Die Ordnung dieser Ziffern bey den Cubikzahlen ist hingegen: 1. 8. 7. 4. 5. 6. 3. 2. 9.

6) Alle Quadrate, womit sich ein Zehend derselben endiget, verhalten sich unter einander in der Ordnung ihrer Folge, wie die Quadrate von 1 an in ihrer Folge; und alle Cubikzahlen, womit sich ein Zehend derselben endiget, verhalten sich unter einander in der Ordnung ihrer Folge, wie die Cubikzahlen von 1 an in ihrer Folge. Z. E.

Wurzeln.	Quadrate.	□te von 1 an	Wurzeln.	Cubi.	Cubi von 1 an.
10	100	1	10	1000	1
20	400	4	20	8000	8
30	900	9	30	27000	27
40	1600	16	40	64000	64
50	2500	25	50	125000	125
60	3600	36	60	216000	216
70	4900	49	70	343000	343
80	6400	64	80	512000	512
90	8100	81	90	729000	729
100	10000	100	100	1000000	1000
110	12100	121	110	1331000	1331
120	14400	144	120	1728000	1728

u. s. w.

7) So wie zwischen jeden zwey geraden, ingleichen zwischen zwey jeden ungeraden Zahlen eine arithmetische Mittelproportionale in ganzen Zahlen statt findet: so findet zwischen zwey jeden Quadraten, oder zwischen zwey jeden durch eine gleiche Zahl vergrößerten Quadraten eine geometrische Mittelproportionale in ganzen Zahlen statt. Es seyn die zwey geraden Zahlen 4 und 16, welche zugleich zwey Quadrate sind; ingleichen die beyden ungeraden 9 und 25, welche auch zwey Quadrate sind: so ist

4. 16 — 4 × 16 = 64

4 — √64 = 8 Mittelproport.

20 — Also 4. 8. 16. geometr. Proportion.

2) 20 = 10 Mittelprop.

Also 4. 10. 16. arithmet. Proportion.

9. 25 — 9 × 25 = 225

9 — √225 = 15 Mittelproport.

34 — Also 9. 15. 25. geometr. Proportion.

2) 34 = 17 Mittelproport.

Also 9. 17. 25. arithmet. Proportion.

und vergrößert, z. E. mit 2.

4 . 16 — 2 — 2

2 — 2 — 8 × 32 = √256 = 16 Mittelpr.

8 × 32 = √256 — 16 Mittelpr.

Also 8. 16. 32. geometr. Proportion.

9 . 25 — 2 — 2

2 — 2 — 18 × 50 = √900 = 30 Mittelpr.

Also 18. 30. 50. geomet. Proportion.

8) Wenn eine zwischen zwey Quadraten gestellte Mittelproportionale dupliret wird, zu dem Duplo die beyden Quadrate addiret werden, und aus dem Collect die Wurzel gezogen wird, so ist diese Wurzel = den summirten Wurzeln der beyden Quadrate. Z. E. wenn 4 : 8 : 16, so ist

8 × 2 = 16, und 16 + 4 + 16 = 36, und √36 = 6 = 2 + 4, und 2 ist die Quadratwurzel von 4, und 4 von 16.

9) Jede Differenz zweyer Quadrate ist gleich dem Product aus der Summe ihrer Wurzeln in die Differenz derselben, z. E.

$12^2 - 6^2 = 144 - 36 = 108$

und $(12 + 6) \times (12 - 6) = 18 \times 6 = 108$.

10) Jede

10) Jede Quadratzahl — 1 ist gleich dem Product ihrer Wurzel — 1 in diese Wurzel + 1. Z. E. Wenn die Quadratzahl = 25, so ist

$25 - 1 = 24$, und $24 = (5 - 1) \times (5 + 1) = 4 \times 6$.

Eilfter Abschnitt.

Von der Progreßion der durch die Multiplication mit ungleichen Factoren entstehenden simpeln länglichten oder parallelogrammischen Zahlen.

§. 298.

Alle parallelogrammische oder länglichte Zahlen, die aus der bloßen Multiplication zwey ungleicher Factoren entstehen, werden **simple länglichte**, oder schlechtweg **länglichte** oder **parallelogrammische Zahlen** genennet. Man theilet sie in ein- zwey- drey- vier und mehrlänglichte, und diese Eintheilung ist auf die Differenz ihrer Seiten gegründet, nach welcher sie

einlänglicht sind, wenn die Differenz ihrer Seiten 1 ist, oder, wenn die Länge und Breite um 1 unterschieden sind. Auf diese Weise ist die Zahl 6 eine einlänglichte Zahl, indem sie aus 3 X 2 entstanden, und die Differenz zwischen der Länge 3 und der Breite 2 die Zahl 1 ist.

Zweylänglicht, wenn die Differenz ihrer Seiten 2 ist, z. E. die Zahl 8 aus 4 X 2.

Dreylänglicht, wenn die Differenz ihrer Seiten 3 ist, z. E. die Zahl 10 aus 5 X 2. u. s. w.

Anmerkung.

Eben dieselbe länglichte Zahl kann zu mehr als einer Classe gehören, z. E. die Zahl 24, welche so gut eine zweylänglichte, wegen 6 X 4 = 24; als fünflänglichte wegen 8 X 3 = 24, oder zehnlänglichte wegen 12 X 2 = 24 seyn kann. Um

zu

zu wissen, zu was für einer Classe eine Zahl gehöret, deren Länge und Breite bekannt ist, brauchet man nur diese Grössenmaassen von einander abzuziehen. Die Differenz zeiget die Classe, wohin die Zahl gehöret. Es sey die Zahl 48; die Breite 3 und die Länge 16. Wenn nun 3 von 16 die Zahl 13 zurück lässet: so ist die Zahl 48 allhier eine dreyzehnlänglichte Zahl. Ist die Breite 6 und die Länge 8: so ist die Zahl 48 eine zweylänglichte Zahl. u. s. w.

Die einlänglichten Zahlen werden insgemein numeri altera parte longiores vnitate genennet; die zweylänglichten numeri altera parte longiores binario; die dreylänglichten numeri altera parte longiores ternario, u. s. w. Statt *longiores* kann man auch *breuiores* sagen. Man nennet sie auch barlongische Zahlen, wiewohl wiederum andere mit diesem Nahmen diejenigen Zahlen belegen, welche aus zwey geraden Zahlen summiret werden, die um zwey Einheiten differiren, z. E. 6. 10. 14. 18. 22. u. s. w. aus

2 + 4 = 6	8 + 10 = 18
4 + 6 = 10	10 + 12 = 22
6 + 8 = 14	12 + 14 = 26 u. s. w.

§. 299.

Um die länglichten Zahlen nach ihrer Ordnung zu finden, und Progreßionen daraus zu bilden, nehme man zwey um 1 differirende arithmetische Progreßionen; lasse die eine beständig mit 1, und die andere mit der um 1 vermehrten Differenz der Seiten anfangen, und multiplicire ihre Zahlen. Die Zahlen der kleinsten Progreßion sind die Wurzeln der kommenden länglichten Zahlen. Z. E.

(A) Die einlänglichten Zahlen zu finden. Die Differenz der Seiten ist 1, welche + 1 = 2, als:

1.	2.	3.	4.	5.	6	Wurz.
2.	3.	4.	5.	6.	7	
2.	6.	12.	20.	30.	42	Einlängl. Zahlen.

(B) Die zweylänglichten Zahlen zu finden. Die Differenz der Seiten ist 2, welche + 1 = 3, als:

1.	2.	3.	4.	5.	6	Wurz.
3.	4.	5.	6.	7.	8	
3.	8.	15.	24.	35.	48	Zweylängl. Zahlen.

(C) Die dreylänglichten Zahlen zu finden. Die Differenz der Seiten ist 3, welche + 1 = 4, als:

1.	2.	3.	4.	5.	6 Wurz.
4.	5.	6.	7.	8.	9
4.	10.	18.	28.	40.	54 Dreylängl. Zahlen.

(D) Die vierlänglichten Zahlen zu finden. Die Differenz der Seiten ist 4, welche + 1 = 5, als:

1.	2.	3.	4.	5.	6 Wurz.
5.	6.	7.	8.	9.	10
5.	12.	21.	32.	45.	60 Vierlängl. Zahlen.

(E) Die fünflänglichten Zahlen zu finden. Die Differenz der Seiten ist 5, welche + 1 = 6, als:

1.	2.	3.	4.	5.	6 Wurz.
6.	7.	8.	9.	10.	11
6.	14.	24.	36.	50.	66 Fünflängl. Zahlen.

(F) Die sechslänglichten Zahlen zu finden. Die Differenz der Seiten ist 6, welche + 1 = 7, als:

1.	2.	3.	4.	5.	6 Wurz.
7.	8.	9.	10.	11.	12
7.	16.	27.	40.	55.	72 Sechslängl. Zahlen.

§. 300.

Alle Classen der länglichten Zahlen können auf eine zusammengesetzte arithmetische Progreßion, deren lezte Differenz allezeit die Zahl 2 ist, zurückgeführet werden, wie man aus folgender Vorstellung siehet.

Progreßion der einlänglichten Zahlen.	Erste Differenzen	Zweyte Differenzen.
2	0	0
6	4	0
12	6	2
20	8	2
u. s. w.		

Progreßion der zweylänglichten Zahlen.	Erste Differenzen	Zweyte Differenzen.
3	0	0
8	5	0
15	7	2
24	9	2
u. s. w.		

Man kann also die länglichten Zahlen ebenfalls durch die Addition finden, wenn man arithmetische Zahlreihen, deren Glieder um 2 unterschieden sind, summiret. Z. E.

a) Aus

a) Aus der arithmetiſchen Zahlreihe 2, 4, 6, 8, 10 ꝛc. entſtehen die einlänglichten Zahlen 2, 6, 12, 20, 30, u. ſ. w.

b) Aus der arithmetiſchen Zahlreihe 3, 5, 7, 9, 11 ꝛc. entſtehen die zweylänglichten Zahlen 3, 8, 15, 24, 35, u. ſ. w. und

c) aus der arithmetiſchen Zahlreihe 4, 6, 8, 10, 12 ꝛc. entſtehen die dreylänglichten Zahlen 4, 10, 18, 28, 40, 54 u. ſ. w.

(a) $2 = 2$
$2 + 4 = 6$
$2 + 4 + 6 = 12$
$2 + 4 + 6 + 8 = 20$
u. ſ. w.

(b) $3 = 3$
$3 + 5 = 8$
$3 + 5 + 7 = 15$
$3 + 5 + 7 + 9 = 24$
u. ſ. w.

(c) $4 = 4$
$4 + 6 = 10$
$4 + 6 + 8 = 18$
$4 + 6 + 8 + 10 = 28$ u. ſ. w.

In allen Progreßionen der länglichten Zahlen iſt das erſte Glied dem mit 1 vermehrten Unterſcheide der Seiten gleich. Z. E. in den dreylänglichten Zahlen iſt der Unterſcheid der Seiten 3. Wenn nun $3 + 1 = 4$: ſo iſt die Zahl 4 das erſte Glied dieſer Progreßion.

§. 301.

Wie die länglichten Zahlen geometriſch vorgeſtellet werden, iſt bey Tab. V. zu ſehen; und zwar findet man bey Fig. 3 die vier einlänglichten Zahlen 2, 6, 12, 20; bey Fig. 4 die vier zweylänglichten Zahlen 3, 8, 15, 24; und bey Fig. 5 die vier dreylänglichten Zahlen 4, 10, 18, 28, und iſt jede vorhergehende kleinere in der folgenden größern enthalten.

(I.) Den arithmetiſchen Perimeter eines Parallelogramms zu finden. §. 302.

Multipliciret die Länge + 1 mit der Breite, und ziehet das Duplum der Länge von dem Producte ab.

Es sey die Länge 7, und die Breite 4.

$7 + 1 = 8$
$8 + 4 = 32$
$32 - 2 + 7 = 18$ Der gefundne Perimeter.

Oder, multipliciret die Breite — 2 mit der Länge, und addiret die Breite, als:

$4 - 2 = 2$
$2 \times 7 = 14$
$14 + 4 = 18$ der Perimeter.

(II.) Den numerischen Inhalt eines Parallelogramms zu finden; oder aus der gegebnen Länge und Breite die länglichte Zahl selbst zu finden. §. 303.

Multipliciret die Länge mit der Breite.

Es sey die Länge 7 und die Breite 4.

$$\begin{array}{r} 7 \\ 4 \\ \hline 28 \end{array}$$

der numerische Inhalt; welcher zugleich das kleinere Parallelogramm 18 aus 6×3; das noch kleinere 10 aus 5×2, und das kleinste 4 enthält.

(III.) Aus einer gegebnen länglichten Zahl und der Differenz ihrer Seiten die Wurzel, und mithin die Länge und Breite dieser Zahl zu finden. §. 304.

1) Quadriret die halbirte Differenz der Seiten; addiret das Quadrat zu der länglichten Zahl, und ziehet aus dem Collect die Quadratwurzel. 2) Subtrahiret von der Quadratwurzel die halbe Seitenzahl. Der Rest giebt die Breite. Addiret den Rest zur Differenz, so kömmt die Länge, als:

Es ſey die länglichte Zahl = 55 und die Differenz der Seiten = 6.

Alſo: 1) $\frac{6}{2}$

3, und $3^2 = 9$

$+55$

64 und $\sqrt{64}$

8

2) $8 - 3 = 5$ Die gefundne Wurzel, welche die Breite der Zahl iſt.

$+6$

11 Die gefundne Länge.

(IV.) Aus einer gegebnen Seite einer länglichten Zahl und der Differenz der Seiten, die andere Seite und die Zahl zu finden. §. 305.

Iſt die gegebne Seite die Breite der Zahl, ſo addiret ſolche zur Differenz, und multipliciret das Collect durch die Breite.

Iſt die gegebne Seite aber die Länge der Zahl, ſo ſubtrahiret von ſolcher die Differenz, und multiplicirt den Reſt durch die Länge, als:

Wenn die Breite = 5, und die Differenz der Seiten = 6, ſo iſt	Wenn die Länge = 11 und die Differenz der Seiten = 6, ſo iſt
1) $5 + 6 = 11$ die gefundene Länge.	1) $11 - 6 = 5$ die gefundene Breite.
2) $11 \times 5 = 55$ die Zahl ſelbſt.	2) $11 \times 5 = 55$ die Zahl ſelbſt.

Anhang
zum eilften Abschnitt.
Von den Pronikzahlen.

§. 306.

Es ist eine Flächenzahl, die mit den einlänglichten Zahlen zwar völlig einerley ist, aber wegen ihres besondern Gebrauchs anders benennet, und aus der Summe eines Quadrats und dessen Wurzel hergeleitet wird. Man nennet sie eine **Pronikzahl**. Es seyn die Quadratzahlen 1. 4. 9. 16. 25, und deren Wurzeln 1. 2. 3. 4. 5. Hieraus entstehen die Pronikzahlen 2. 6. 12. 20. 30. als:

1 + 1 = 2
4 + 2 = 6
9 + 3 = 12
16 + 4 = 20
25 + 5 = 30 u. s. w.

§. 307.

Ungeachtet die Pronikzahlen, vermöge vorhergehenden §. 306. anders als die einlänglichten Zahlen entstehen: so werden sie dennoch geometrisch auf einerley Art vorgestellet. Um solches aber bewerkstelligen zu können, ist es nöthig, vorher aus der Pronikzahl die Wurzel zu ziehen. Diese Wurzel giebt die **Breite** der Figur, und wenn man mit der Wurzel in die Pronikzahl dividiret, so kömmt die **Länge** derselben.

Aufgabe.
die Pronikwurzel auszuziehen.

§. 308.

1) Vermehrt das Quadruplum der gegebnen Pronikzahl mit 1. 2) Ziehet aus dem Collect die Quadratwurzel, und vermindert solche um 1. 3) Halbiret den Rest. Der Quotient giebt die Pronikwurzel.

Es sey die Pronikzahl 30.

1) $30 \times 4 = 120$
$+ 1$
$121.$

2) $\sqrt{121}$
11, und $11 - 1 = 10.$

3) $\frac{10}{2} = 5$ Die gefundne Pronikwurzel von 30.

Wenn nun nach dem vorhergehenden, die gefundne Pronikwurzel 5 die Breite der zu construirenden pronischen Figur giebet; und mit der Wurzel 5 in die gegebne Pronikzahl 30 dividiret wird: so kömmt 6 für die Länge der Figur.

Hat man eine Tabelle von den Quadratzahlen, so suche man das der Pronikzahl am nächsten kommende kleinere Quadrat auf. Die Wurzel desselben ist die Pronikwurzel. Z. E. es sey die Pronikzahl 3080. Dieser kömmt am nächsten das Quadrat 3025. Die Wurzel desselben 55 ist auch die Pronikwurzel, indem $7025 + 55 = 3080$.

Es sey aus $1\frac{1}{3}$ die Pronikwurzel zu ziehen.

Also 1) $1\frac{1}{3} = \frac{12}{9}$, und $\frac{12}{9} \times 4 = \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9}$
$+ 1$
$5\frac{4}{9}$

2) $5\frac{4}{9} = \frac{49}{9}$ und $\sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$
$- 1$
$1\frac{1}{3}.$

3) $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3} \times \frac{2}{1} = \frac{8}{3} = \frac{2}{1}$. Die gefundne Pronikwurzel aus $1\frac{1}{3}$ ist also $= \frac{2}{1}$.

Zwölfter Abschnitt.

Von den aus der Multiplication mit zwey ungleichen Factoren unter dreyen, entstehenden viereckigten prismatischen Zahlen.

§. 309.

Der Fall einer Multiplication mit zwey ungleichen Factoren unter dreyen existiret, wenn eine länglichte Zahl entweder durch ihre Länge oder Breite multipliciret wird; und aus solcher Operation entstehen nichts als viereckigte prismatische Zahlen; als

Breite	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Länge	2.	3.	4.	5.	6.	7.

Factoren der einlänglichten Zahlen.

einlängl. Zahlen.	2.	6.	12.	20.	30.	42
Breite	1.	2.	3.	4.	5.	6

Die gefundnen prismatischen Zahlen: 2. 12. 36. 80 150. 252

	2.	6.	12.	20.	30.	42
Länge	2.	3.	4.	5.	6.	7

Die gefundnen prismatischen Zahlen: 4. 18. 48 100. 180. 294

Ingleichen.

Breite	1.	2.	3.	4.	5.	6
Länge	3	4.	5.	6.	7.	8

Factoren der zweylänglichten Zahlen.

zweylängl. Zahlen.	3.	8	15.	24.	35.	48
Breite	1.	2.	3.	4.	5.	6

Die gefundnen prismatischen Zahlen: 3. 16. 45. 96. 175. 288

	3.	8.	15.	24.	35.	48
Länge	3.	4.	5.	6.	7.	8

Die gefundnen prismatischen Zahlen: 9. 32. 75. 144. 245. 384

§. 310.

Da bey dem Cubus nur eine einzige Figur, nemlich das reguläre Quadrat, zum Grunde lieget, und die drey geometrischen Dimensionen, Länge, Breite und Tiefe einander gleich sind: so ist es einerley, wie derselbe gestellet wird. Anders verhält es sich mit dem viereckigten Prisma. Da bey selbigem zweyerley Arten von Figuren herrschen, das reguläre Quadrat und das Parallelogramm: so hat selbiges zweyerley Art von Stand, indem es entweder auf eine Quadrat- oder parallelogrammische Fläche gestellet werden kann.

Da vermittelst dieser Veränderung des Standes nicht allein die drey Stücke des körperlichen Maaßes, Länge, Breite und Tiefe unter einander verwechselt werden, sondern auch öfters in eben demselben Stande, durch Veranlassung gewisser Umstände, die Länge für die Breite, und umgekehrt, die Breite für die Länge genommen wird: so geschicht es daher, daß die prismatischen Zahlen auf sechserley Art erscheinen; und diese Arten entstehen

No. 1) Durch gleiche Länge und Tiefe mit kleinerer Breite, als 3 lang, 2 breit, 6, 3 tief, 18. Setzet nach Anleitung der Fig. 14. Tab. III. eine Schicht von 6 Würfeln zusammen, und zwey andere gleiche Schichten darüber.

No. 2) Durch gleiche Breite und Tiefe mit kleinerer Länge, als 2 lang, 3 breit, 6, 3 tief, 18. Ist einerley mit No. 1. nur daß die Breite allhier für die Länge genommen wird.

No. 3) Durch gleiche Breite und Tiefe mit größerer Länge, als 3 lang, 2 breit, 6, 2 tief, 12. Setzet nach Anleitung der Fig. 15. Tab. III. eine Schicht von 6 Würfeln zusammen und eine gleiche Schicht darüber.

No. 4) Durch gleiche Länge und Tiefe mit größrer Breite, als 2 lang, 3 breit, 6, 2 tief, 12 Ist mit No. 3 einerley, unter Veränderung der Breite in die Länge.

No. 5) Durch gleiche Länge und Breite mit kleinerer Tiefe, als

3 lang
3 breit
9
2 tief
18 Setzet das Prisma von No. 1. auf eine der Quadratflächen.

No. 6) Durch gleiche Länge und Breite mit größrer Tiefe, als

2 lang
2 breit
4
3 tief
12. Stellet das Prisma von No. 3 auf eine der beyden □flächen.

Verfertiget zwey Prismata von Pappe. Nehmet für die längere Seite des Parallelogramms 3, und für die kürzere Seite 2 Zoll. Die Seite des Quadrats sey 3. Dieses Prisma ist für No. 1. 2 und 5.

Nehmt für die längere Seite des Parallelogramms 3, und für die kürzere Seite 2 Zoll. Die Seite des Quadrats sey 2. Dieses Prisma ist für No. 3. 4 und 6.

Man schlage hievon die Lehre von der Construction der eckigten Körper nach, wo man die Netze zu diesen Körpern finden wird.

§. 311.

Alle prismatische Progreßionen können auf eine zusammengesetzte arithmetische Progreßion zurückgeführet werden, deren dritte Differenz beständig eine 6 ist. Der Proceß der Zurückführung ist bekannt.

Den arithmetischen Inhalt eines Prismatis zu finden. §. 312.

Multipliciret die Länge mit der Breite, und das kommende Product mit der Tiefe.

Es sey die Länge 5, die Breite 4 und die Tiefe 4.

5 Länge
4 Breite
20
4 Tiefe
80 Inhalt des Prismatis.

Dieh-

Dreyzehnter Abschnitt.

Von den aus der Multiplication mit drey ungleichen Factoren entstehenden parallelepipedischen Zahlen.

§. 313.

Wenn man eine länglichte Zahl durch eine andere Zahl multipliciret, die weder der Länge noch Breite gleich ist: so existiret der Fall einer Multiplication mit drey ungleichen Factoren, und es entstehet daher eine parallelepipedische Zahl, als

Breite.	1.	2.	3.	4.	5.	6	} Factoren der
Länge.	2.	3.	4.	5.	6.	7	} einlängl. Zahlen.
einlängl. Zahlen.	2.	6.	12.	20.	30.	42.	
ungleiche Zahlen	3.	4.	5.	6.	7.	8.	
Die gefundnen parallelepipedischen Zahlen.	6.	24.	60.	120.	210.	336.	

1.	2.	3.	4.	5.	6.	Breite.	
3.	4.	5.	6.	7.	8.	Länge.	
3.	8.	15.	24.	35.	48.	zweylängl. Zahlen.	
2.	3.	4.	5.	6.	7.	ungleiche Zahlen.	
6.	24.	60.	120.	210.	336.	die gefundnen parallelepipedischen Zahlen.	

und so weiter.

Ferner:

Breite	1.	2.	3.	4.	5.	6	} Factoren der
Länge	4.	5.	6.	7.	8.	9	} einlängl. Zahlen.
dreylängl. Zahlen.	4.	10.	18.	28.	40.	54.	
ungleiche Zahlen.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	
Die gefundnen parallelepipedischen Zahlen.	8.	30.	72.	140.	240.	378.	

1.	2.	3.	4.	5.	6.	Breite.
4.	5.	6.	7.	8.	9.	Länge.
4.	10.	18.	28.	40.	54.	dreylängl. Zahlen.
3.	4.	5.	6.	7.	8.	ungleiche Zahlen.
12.	40.	90.	168.	280.	432.	Die gefundnen parallelepipedischen Zahlen.
u. s. w.						

§. 314.

So wie das Prisma eine zweyfache Art von Stellung zuläſſet, da es entweder auf einer Quadrat- oder auf einer parallelogrammiſchen Fläche ruhen kann: ſo iſt das Parallelepipedum einer dreyfachen Veränderung in Abſicht auf dieſen Ruheſtand fähig, indem es entweder auf eine der beyden gröſsern, oder eine der beyden mittlern, oder eine der beyden kleinern parallelogrammiſchen Flächen geſtellet werden kann. Dieſer Umſtand giebt zu ſechserley Arten von parallelepipediſchen Zahlen Gelegenheit, welche folgendergeſtalt entſtehen.

No. 1) Wenn die Länge gröſſer als die Breite, und die Breite gröſser als die Tiefe iſt, als

4 lang
3 breit
12
2 tief
24.

Setzet nach Anleitung der Fig. 16. Tab. III. eine Schicht von 12 Würfeln zuſammen, und eine gleiche Schicht darüber. Das Parallelepipedum ruhet allhier auf der gröſsten Seite.

No. 2) Wenn die Breite gröſſer als die Länge, und die Länge gröſser als die Tiefe iſt, z. E.

3 lang
4 breit
12
2 tief
24.

Iſt mit No. 1. einerley, nur daſs die Länge für die Breite genommen wird.

No. 3)

No. 3) Wenn die Länge gröſſer als die Tiefe, und die Tiefe gröſſer als die Breite iſt, als

4 lang
2 breit
8
3 tief
24.

Stellet das Parallelepipedum auf die aus 8 Würfeln beſtehende mittlere Fläche, nach Anleitung der Fig. 17. Tab. III. Hier werden drey ſolcher Schichten über einander geſetzet.

No. 4) Wenn die Breite gröſſer als die Tiefe, und die Tiefe gröſſer als die Länge iſt, als

2 lang
4 breit
8
3 tief
24

Iſt mit No. 2. einerley; nur daß die Länge für die Breite genommen wird.

No. 5) Wenn die Breite kleiner als die Länge, und die Länge kleiner als die Tiefe iſt, als

3 lang
2 breit
6
4 tief
24.

Stellet das Parallelepipedum auf die kleinere aus 6 Würfeln beſtehende Fläche, nach Anleitung der Fig. 15. Tab. III. Hier werden vier ſolcher Schichten über einander geſetzet.

No. 6) Wenn die Länge kleiner als die Breite, und die Breite kleiner als die Tiefe iſt, als

2 lang
3 breit
6
4 tief
24

Iſt mit No. 5. einerley; nur daß die Länge für die Breite genommen wird.

Verfertiget ein Parallelepipedum aus Pappe. Zwey Parallelogrammen ſeyn jedes 4 lang und 3 breit; zwey andere ſeyn jedes 4 lang und 2 breit, und die beyden lezteren ſeyn jedes 3 lang und 2 breit: ſo habt ihr einen Körper für alle 6 Veränderungen der parallelepipedischen Zahl 24.

§. 315.

Alle parallelepipedische Progreßionen können auf eine zuſammengeſetzte arithmetiſche Progreßion zurückgeführet werden, deren dritte Differenz beſtändig eine 6 iſt.

§. 316

Den arithmetischen Inhalt eines Parallelepipedi zu finden, oder den Inhalt eines parallelepipedischen Würfelhaufens zu berechnen. §. 316.

Multipliciret die Länge mit der Breite, und das kommende Product mit der Tiefe.

Es sey die Länge 6, die Breite 5 und die Tiefe 4.

6 Länge
5 Breite
30
4 Tiefe
120 Inhalt des Parallelepipedi.

Vierzehnter Abschnitt.

Von den simpeln länglichten Pyramidalzahlen.

§. 317.

Wenn zwey und mehrere auf einander folgende simple länglichte Zahlen, von dem ersten Gliede der Progreßion an, summiret werden, so entstehen simple länglichte Pyramidalzahlen.

a) Es seyn die einlänglichten Zahlen 2. 6. 12. 20. 30. 42. ꝛc.

Wenn nun $2=2$; $2+6=8$; $2+6+12=20$; $2+6+12+20=40$ u. s. w. so entstehen aus selbigen die länglichten Pyramidalzahlen 2. 8. 20. 40. 70. 112. u. s. w.

b) Es seyn die zweylänglichten Zahlen 3. 8. 15. 24. 35. 48 ꝛc.

Wenn nun $3=3$; $3+8=11$; $3+8+15=26$; $3+8+15+24=50$, u. s. w. so entstehen aus selbigen die länglichten Pyramidalzahlen 3. 11. 26. 50. 85. 133. ꝛc.

c) Es

c) Es seyn die dreylänglichten Zahlen 4. 10. 18. 28. 40. 54. ꝛc.

Wenn nun $4 = 4$; $4 + 10 = 14$; $4 + 10 + 18 = 32$, u. s. w. so entstehen aus selbigen die länglichten Pyramidalzahlen 4. 14. 32. 60. 100. 154 ꝛc.

§. 318.

Alle länglichte Pyramidalprogreßionen lassen sich auf eine zusammengesetzte arithmetische Progreßion zurückführen, deren lezte Differenz eine 2 ist.

§. 319.

Wenn die Parallelogrammen, aus deren Summe eine simple länglichte Pyramidalzahl erzeuget wird, dergestalt über einander gesetzet werden, daß über jedes größere Parallelogramm ein kleineres ähnliches, dessen jede Seite allezeit 1 weniger ist, zu stehen kömmt, und so lange damit fortgefahren wird, bis die Zahl der übereinander liegenden Schichte und die Zahl der Breite des zum Grunde liegenden Parallelogramms gleich werden: so entstehet eine simple länglichte Pyramidalzahl.

Die simple länglichte Pyramidalzahl 40. zu formiren.

1) Formiret nach Anleitung der Fig. 3. Tab. V. mit 20 an einander schliessenden Kugeln ein Parallelogramm, 5 lang und 4 breit.

2) Bauet über selbiges, nach Anleitung eben dieser Figur, das aus 12 Kugeln bestehende kleinere Parallelogramm, 4 lang und 3 breit.

3) Setzet über vorhergehendes Parallelogramm das aus 6 Kugeln bestehende kleinere Parallelogramm 3 lang und 2 breit;

4) Leget über vorhergehendes Parallelogramm 2 Kugeln: so ist die Pyramide fertig, deren arithmetischer Inhalt seyn wird $40 = 20 + 12 + 6 + 2$; und welche 4 Schichten enthält, so wie die Breite 4 ist.

Anmer-

Anmerkung.

Die hier vorkommenden länglichten Pyramiden werden zum Unterscheide derjenigen, von welchen im fünften Abschnitt dieses Hauptstücks gehandelt worden, eigentlich länglichte Pyramiden genennet. Der Unterscheid ist sichtbar, indem in den uneigentlich länglichten Pyramiden, von welchen im bemeldten fünften Abschnitt gehandelt worden, die Spitze der Pyramide eine 1 ist; in den eigentlich länglichten aber niemals unter 2 seyn kann, indem die kleinste längliche Pyramidalzahlen aus der Addition der länglichten Zahlen entstehen. Es ist wahr, daß, wenn die eigentlich länglichten Pyramiden durch Würfel vorgestellet werden, die oberste Schicht derselben allezeit eine 1 seyn kann. Aber dieses ist dem Ursprung der länglichten Pyramidalen entgegen, und man muß sich allhier nach der Art richten, wie die länglichten Kugelhaufen in den Zeughäusern aufgesetzet werden, und wie solche vermöge der Beschaffenheit der Kugeln, nach welcher nur über ihrer drey oder vier, nicht aber über zweyen, eine einzelne Kugel ruhen kann, solche aufgesetzet werden können. Uebrigens ist in den eigentlich länglichten Pyramiden, von deren Zahlen allhier gehandelt wird, die Zahl der obersten Schicht allezeit der Zahl der Breite — 2 gleich.

(I.) Aus der gegebnen Länge und Breite der Seiten die simple länglichte Pyramidalzahl zu finden; oder den Inhalt eines länglichten Kugelhaufens zu berechnen. §. 320.

Erste Auflösung.

1) Addiret die mit 1 vermehrte Differenz der Länge und Breite zum Duplo der Länge, und dividirt das Collect mit 3. 2) Multipliciret den Quotienten durch die Trigonale der Breite.

Es sey die Länge 9 und die Breite 6.

1) 9 Länge
6 Breite
Differenz 3 + 1 = 4
9 } Duplum
9 } der Länge
22
3) 7⅓

6 Breite
7
42
2) 21 Trigonale der Breite

2) 21 Trigonale
7⅓ der Breite
154 die gefundene Pyramidalzahl, oder Inhalt des gegebnen länglichten Kugelhaufens.

Zweyte

Zweyte Auflöſung.

1) Dividiret das mit 1 vermehrte Duplum der Breite durch 3. 2) Multipliciret den Quotienten durch die Trigonale der Breite. 3) Multipliciret die Trigonale der Breite mit der Differenz der Länge und Breite, und addiret das Product zum Product der zweyten Operation.

Es ſey die Länge 9 und die Breite 6.

1) 6 } Duplum der Breite
6 }
1 mit 1 vermehrt
13

3) $\frac{13}{4\frac{1}{3}}$

2) 6 Breite
7
2) 42
21 Trigonale der Breite
$4\frac{1}{3}$ Quotient der 1ſten
91 Operation.

3) 9 Länge
6 Breite
3 Differenz
21 Trigonale der Breite
63
91 Product der 2ten Oper.
154 Inhalt des Kugelhaufens.

Dritte Auflöſung.

Multipliciret die Trigonale der Breite mit der Länge, und ſubtrahiret die dreyeckigte Pyramidale der um 1 verminderten Breite; z. E. wenn die Länge 9, und die Breite = 6.

Die Trigonale von 6 iſt 21
Länge 9
189
Dreyeck. Pyram. von 6 – 1 iſt 35
154 die gefundne Zahl.

Anmerkung.

Da die Zahl der Breite jederzeit der Zahl der Schichten gleich iſt; die Breite aber, ſo wie die Länge, ſich bey jeder Schicht um 1 vermindert: ſo kann die vorhergehende Aufgabe auch folgendergeſtalt aufgelöſet werden.

Länge. 9 . 8 . 7 . 6 . 5 . 4
Breite. 6 . 5 4 . 3 . 2 . 1

54+40+28+18+10+4=154

(II.) Aus dem Inhalt der Grundfläche eines länglichten Kugelhaufens, und der Differenz der Länge und Breite desselben, die Länge und Breite des Haufens zu bestimmen; oder aus dem Inhalt der Grundfläche einer länglichten Pyramide, und der Differenz ihrer Länge und Breite, die Länge und Breite ihrer Grundfläche zu berechnen. §. 321.

1) Quadriret die halbirte Differenz der Länge und Breite, und addiret das Product zu der gegebnen Anzahl von Kugeln; oder

wenn die halbe Differenz ein Bruch ist:

quadriret die ganze Differenz; dividirt mit 4, und addiret den Quotienten zu der gegebnen Anzahl von Kugeln.

2) Ziehet die Quadratwurzel aus dem Collect; subtrahiret von selbiger die halbirte Differenz der Länge und Breite, und addiret zum Rest die ganze Differenz. Die Subtraction giebt die Breite, und die Addition die Länge.

Es sey die Anzahl der Kugeln in der Grundfläche 96, und die Differenz der Länge und Breite 10.

10 die ganze Differenz
2) 5 die halbe Differenz
5
25 Quadrat derselben
96 Anzahl der Kugeln
$\sqrt{}$ 121 Collect
11 die □wurzel aus 121
Subt. 5 die halbe Differenz
6 die gefundne Breite
Add. 10 die ganze Differenz
16 die gefundne Länge.

Es sey die Anzahl der Kugeln in der Grundfläche 112, und die Differenz der Länge und Breite 9.

9 Die ganze Differenz.
9
4) 81 Quadrat derselben.
20¼
Add. 112 Anzahl der Kugeln
$\sqrt{}$ 132¼ Collect
11½ die □wurzel aus 131¼
Subtr. 4½ die halbe Differenz
7 die gefundne Breite
+ 9 die ganze Differenz
16 die gefundne Länge.

§. 322.

§. 322.

Ich füge den Anfang einer Progreßionaltabelle hinzu, in welcher nicht allein die in dieſem Abſchnitt erklärten länglichten, ſondern auch die Tetragonalpyramiden, von welchen im ſechſten Abſchnitt bey (B) Seite 240 und 241 gehandelt worden, und welche ſonſten in der Tabelle (CC), VIII. Abſchnitt, bereits vorgekommen, zugleich enthalten ſind. Denn da die viereckigte Pyramide ſowohl auf eine reguläre als ſymmetriſche Grundfläche aufgeführet werden kann, ſo wird es gut ſeyn, die die Berechnung eines viereckigten Kugelhaufens betreffenden Aufgaben, in einer und eben derſelben Tabelle beyſammen zu haben.

Progreßionstabelle EE über ſämtliche regulär und länglicht viereckigte ſimple Pyramidalen.

Breite der Grundfläche.

Länge der Grundfläche.	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35
3	8	14	20	26	32	38	44	50	56	62	68
4	11	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
5	14	26	40	55	70	85	100	115	130	145	160
6	17	32	50	70	91	112	133	154	175	196	217
7	20	38	60	85	112	140	168	196	224	252	280
8	23	44	70	100	133	168	204	240	276	312	348
9	26	50	80	115	154	196	240	285	330	375	420
10	29	56	90	130	175	224	276	330	385	440	495
11	32	62	100	145	196	252	312	375	440	506	572
12	35	68	110	160	217	280	348	420	495	572	650

und ſo weiter.

§. 323.

Textur der Tabelle. Jede Horizontalreihe der Zahlen muß so lange nach der Regel gesuchet werden, bis die Differenzen anfangen beständig zu werden. So werden z. E. solche in der durch die Länge 4 characterisirten Reihe 4. 11. 20. 30. 40 erst zwischen 20 und 30 beständig; in der durch die Länge 5 characterisirten Reihe 5. 14. 26. 40. 55. 70, erst zwischen 40 und 55; in der durch die Länge 6 characterisirten Reihe 6. 17. 32. 50. 70. 91. 112. erst zwischen 70 und 91, und so weiter, immer um ein Glied später. Es sind diese Differenzen aber die simpeln Trigonalzahlen 1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. 36, u. s. w. Die Fortschreitung der Breite, z. E. 2. 3. 4. 5 hat die 1 zur Differenz; die aus diesen Breiten und der Länge 2 entstehenden Pyramiden 5. 8. 11. 14, haben die 3 zur Differenz u. s. w. Sobald nun die beständige Differenz jeder Reihe gefunden ist, kostet es keine Mühe, die Tabelle durch die blosse Addition weiter auszudehnen.

Oder, multipliciret die Zahlen der Länge und Breite, und addiret die Zahl aus dem Fache, das zur Länge -1, und zur Breite -1 gehöret. Z. E. die Zahl 112 für die Länge 7 und Breite 6 zu finden, saget: $7\times 6=42$, nnd $42+70=112$. Die addirte Zahl 70 ist die Zahl für die Länge $7-1=6$, und die Breite $6-1=5$. Die Rechnung für das erste perpendikulär heruntergehende Fach ist also: $(2\times 2)+1=5$, $(2\times 3)+2=8$, $(2\times 4)+3=11$, u. s. w. Für das zweyte Fach: $3\times 2+2=8$, $3\times 3+5=14$, $3\times 4+8=20$, u. s. w.

§. 324.

Gebrauch der Tabelle. 1) Es ist ein viereckigter Kugelhaufen, 8 lang und 6 breit. Wie viele Kugeln sind darinnen enthalten? Das Fach, in welchem die Rubrik der Länge 8 mit der Breite 6 zusammen kömmt, giebet die Zahl 133, und also sind 133 Kugeln in dem gegebnen Haufen enthalten.

2) Ein Kugelhaufen enthält 133 Kugeln, und ist 8 lang. Wie breit ist derselbe? Sechs.

Funfzehn-

Funfzehnter Abſchnitt.

Von den central länglichten Zahlen.

§. 325.

Es iſt aus dem eilften Abſchnitt bekannt, daß, wenn zwey um 1 differirende arithmetiſche Progreßionen durch die Multiplication zuſammengeſetzet werden, das Reſultat eine Progreßion von ſimpeln länglichten Zahlen iſt. Wenn dieſe ſimple länglichte Zahlen, und zwar jedesmal zwey unmittelbar auf einander folgende, wiederum ſummiret werden, ſo entſtehet eine Progreßion von **central länglichten Zahlen**, deren Wurzeln die kleinſten Zahlen aus den beyden arithmetiſchen Progreßionen ſind, aus welchen die ſimpeln länglichten Zahlen entſtanden. Z. E.

α) 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8 Wurzeln.
× 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9

2. 6. 12. 20. 30. 42. 56. 72 Simple einlängl.
+ 2. 6. 12. 20. 30. 42. 56 Zahlen.

2. 8. 18. 32. 50. 72. 98. 128 Central einlängl. Zahlen.

β) 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8 Wurzeln.
× 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10

3. 8. 15. 24. 35. 48. 63. 80 Simple zweylängl. Zahlen.
+ 3. 8. 15. 24. 35. 48. 63

3. 11. 23. 39. 59. 83. 111. 143 Central zweylängl. Zahlen.

γ) 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8 Wurzeln
× 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11

4. 10. 18. 28. 40. 54. 70. 88 Simple dreylängl. Zahlen.
+ 4. 10. 18. 28. 40. 54. 70

4. 14. 28. 46. 68. 94. 124. 158 Central dreylängl. Zahlen.

δ) 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8 Wurzeln.
×5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12

5. 12. 21. 32. 45. 60. 77. 96 Simple vierlängl. Zahlen.
+ 5. 12. 21. 32. 45. 60. 77

5. 17. 33. 53. 77. 105. 137. 173 Central vierlängl. Zahlen.
und so weiter.

§. 326.

Alle central länglichte Zahlen lassen sich in eine zusammengesetzte arithmetische Progreßion auflösen, deren lezte Differenzen beständig eine 4 sind.

§. 327.

Wie die central länglichten Zahlen geometrisch vorgestellet werden, ist aus Tab. V. zu sehen; und zwar findet man bey Fig. 6. die vier ersten zweylänglichten Centralzahlen 3. 11. 23. 39., und bey Fig. 7. die vier ersten vierlänglichten 5. 17. 33. 53. Mit Würfeln kann man sich die erstere Figur aus 3. 11. 23. 39 nach Anleitung der Fig. 4. Tab. VI. deutlich machen. Es lassen sich aber nur die gerade länglichten Zahlen dieser Art, z. E. die zwey- vier- sechs- achtlänglichten, u. s. w. nicht aber die ungerade länglichten, mit einem Center geometrisch vorstellen.

(I.) Den arithmetischen Perimeter eines Centralparallelogramms zu finden. §. 328.

Multipliciret die Länge mit der Breite, und ziehet die mit der Differenz der Seiten vermehrte Länge von dem Product ab.

Es sey die Länge 6 und die Breite 4.

6 Länge — 6
4 Breite — 4
24 — 2 Differenz der Seiten.
8 — 6 Länge.
16 der Perimeter. — 8

Oder addiret die Dupla der Länge und Breite, und subtrahiret 4, als:

2 × 6 = 12
2 × 4 = 8
20
4
16 Der Perimeter.

(II.) Den

(II.) Den numerischen Inhalt eines Centralparallelogramms zu finden; oder aus der gegebnen Länge und Breite die central längliche Zahl selbst zu finden. §. 329.

1) Multipliciret die Länge mit der Breite, und behaltet das Product.

2) Multipliciret die Länge — 1, mit der Breite — 1, und addiret das Product zu dem vorhergehenden.

Es sey die Länge 6 und die Breite 4.

6 Länge	5 die um 1 verminderte Länge 6
4 Breite	3 die um 1 verminderte Breite 4
24 Product der ersten	15 Product der zweyten Operation.
15 Operation.	
39 Der numerische Inhalt des Centralparallelogramms.	

(III.) Aus einer gegebnen central länglichten Zahl und der Differenz ihrer Seiten, die Wurzel und mithin die Länge und Breite dieser Zahl zu finden. §. 330.

1) Addiret zur gegebnen Zahl die Differenz oder Ueberlänge der andern Seite — 1; dupliret das Collect und behaltet das Duplum. 2) Quadriret die Differenz — 1, und addiret das Quadrat zu dem Duplo der ersten Operation. 3) Ziehet aus dem Collect die Quadratwurzel, und subtrahiret von der Quadratwurzel die Differenz — 1. Theilet den Rest durch 2. Der Quotient ist die Wurzel, welche die Breite der Zahl giebet. 4) Addiret die Wurzel zur Differenz, so kömmt die Länge. Z. E. Wenn die central länglichte Zahl = 173, und die Differenz der Seiten = 4, so ist

1)		2)	
	173		3 = 4 — 1
+	3 = 4 — 1		3
	176		9
×	2	+	352
	352		361

3) $\sqrt{\frac{361}{19}}$

$3 = 4 - 1$

2) $\frac{16}{8}$ die gefundene Wurzel, welche die Breite der Zahl giebet.

4) $8 + 4 = 12$ die gefundene Länge der Zahl 173. Man sehe das oben gegebne Exempel von central vierlänglichten Zahlen, Seite 294, f).

(IV.) Aus der gegebnen Wurzel und der Differenz der Seiten die central länglichte Zahl selbst zu finden. §. 331.

1) Quadriret die Wurzel, duplirt das □, und behaltet das Duplum. 2) Duplirt die Wurzel, subtrahirt 1 von dem Product, und multiplicirt den Rest mit der Differenz — 1. 3) Addiret das Product zu dem Duplo der ersten Operation. Z. E. Wenn die Wurzel = 8, und die Differenz = 4, so ist

1) $8^2 = 64$ und $64 \times 2 = 128$.

2) $8 \times 2 = 16$ und $16 - 1 = 15$

$3 = 4 - 1$

45

3) $45 + 128$

173 die gefundne Zahl.

Sechzehnter Abschnitt.

Von den central länglichten Pyramidalzahlen.

§. 332.

Wenn zwey und mehr auf einander folgende central längliche Zahlen, von dem ersten Gliede der Progreßion an, summiret werden: so entstehen central länglichte Pyramidalen.

a) Es

(a) Es seyn die zweylänglichten Centralen 3. 11. 23. 39. 59. 83 ꝛc.

Wenn nun 3 = 3; 3 + 11 = 14; 3 + 11 + 23 = 37, u. s. w. so kommen die central zweylänglichten Pyramidalen 3. 14. 37. 76. 135. 218 u. s. w.

(b) Es seyn die vierlänglichten Centralen 5. 17. 33. 53. 77. 105. ꝛc.

Wenn nun 5 = 5; 5 + 17 = 22; 5 + 17 + 33 = 55, u. s. w. so kommen die central vierlänglichten Pyramidalen 5. 22. 55. 108. 185 u. s. w.

§. 333.

Alle central länglichte Pyramidalzahlen lassen sich auf eine zusammengesetzte arithmetische Progreßion zurückführen, deren lezte Differenz beständig eine 4 ist.

§. 334.

Wenn die central Parallelogrammen, aus deren Summe eine central länglichte Pyramidalzahl erzeuget wird, dergestallt über einander gesetzet werden, daß über jedes kleinere Parallelogramm ein kleineres ähnliches, dessen Seite allezeit 1 weniger ist, zu stehen kömmt, und so lange damit fortgefahren wird, bis die Zahl der übereinanderliegenden Schichte und die Zahl der Breite des zum Grunde liegenden Parallelogramms gleich werden: so entstehet eine central länglichte Pyramidalzahl.

Die central länglichte Pyramidalzahl 76 zu formiren.

Da diese Zahl 75 aus den vier zweylänglichten Centralen 3. 11. 23. 39 entstanden: so

1) Formiret, nach Anleitung der Fig. 1. Tab. VI. mit 39 Würfeln ein aus abwechselnden Zwischenräumen bestehendes Parallelogramm.

2) Bauet über selbiges, nach Anleitung der Fig. 2. Tab. VI. das aus 23 Würfeln bestehende kleinere Parallelogramm.

3) Setzet über vorhergehendes Parallelogramm, nach Anleitung der Fig. 3. Tab. VI. das aus 11 Würfeln bestehende kleinere Parallelogramm.

4) Leget über vorhergehendes Parallelogramm 3 Würfel: so ist die Pyramide fertig.

Anmerkung.

Es kann diese Pyramide auch mit dichte an einander liegenden Würfeln, nach Anleitung der Fig. 4 5. 6. Tab. VI. formiret werden.

Aus der gegebnen Länge und Breite der Seiten die central länglichte Pyramidale selbst zu finden. §. 335.

Erste Manier.

1) Addiret zum Product der Länge und Breite das Product der um 1 verminderten Länge und Breite, und behaltet das Collect. 2) Addiret zum Product der um 1 verminderten Länge und Breite das Product der um 2 verminderten Länge und Breite, und behaltet das Collect. 3) Addiret zum Product der um 2 verminderten Länge und Breite das Product der um 3 verminderten Länge und Breite, und behaltet das Collect. 4) Wiederhohlet diesen Proceß auf ähnliche Art, bis die Zahl der Operationen der Zahl der Breite, welche allezeit die Zahl der Schichten ist, gleichkömme; und addiret zulezt alle Collecte.

Es sey die Länge 6 und die Breite 4.

1 Operat.	2 Oper.	3 Oper.	4 Oper.
6 . 5	5 . 4	4 . 3	3
4 . 3	3 . 2	2 . 1	1
24 . 15	15 . 8	8 . 3	3
+ 15	+ 8	+ 3	
39 Collect der 1sten Operat.	23	11	

\+ 23 der zweyten Operat.
\+ 11 der dritten
\+ 3 der vierten
76 Inhalt der Pyramide.

Zweyte

Zweyte Manier.

1) Multipliciret die Trigonale der Breite mit der Länge, ingleichen die Trigonale der Breite — 1 mit der Länge — 1, und addiret beyde Producte. 2) Summiret die dreyeckigte Pyramidale der Breite — 1 und auch der Breite — 2. 3) Subtrahiret die Summe der zweyten Operation von der Summe der ersten. Z. E. es sey die Länge 6 und die Breite 4.

1) Trigonale der Breite 4 = 10
die Länge = 6
60
+ 30
90 Collect der ersten Operation.

Trigonale der Breite — 1 (= 3) = 6
die Länge — 1 = 5
30

2) Dreyeck. Pyramide der Breite — 1 (= 3) = 10
" " " " — 2 = 2 = + 4
14 Collect der zweyten Operation.

3) Collect der ersten Operat. = 90
" " zweyten = — 14
76 gefundne central längslichte Pyramidale.

Es sey die Länge = 9 und die Breite = 5.

1) Trig. von 5 = 15
9
135
80
215

Trig. von 4 = 10
die Länge — 1 = 8
80

2) Dreyeck. Pyram. der Breite — 1 (= 4) = 20
— 2 (= 3) = 10
30

3) Collect der 1sten Operat. 215
2ten Operat. — 30
185 gefundne central längl. Pyramidale.

Siebenzehn-

Siebenzehnter Abschnitt.

Von den Säulenförmigen oder Columnarzahlen.

§. 336.

Wenn eine Polygonalzahl mit ihrer Seite multiplicirt wird, so wird das Product eine Säulenförmige oder Columnarzahl genennet. Ist die Polygonalzahl simpel, so entstehet eine simple Columnarzahl, und ist sie central, so entsteht eine central Columnarzahl. Da die Polygonale drey- vier- fünf- und mehreckigt seyn kann: so können drey- vier- fünf- und mehreckigte Columnarzahlen hervorgebracht werden, und aus der Addition der Columnarzahlen entstehen pyramidal Columnarzahlen.

(I.) Simple Columnarzahlen. §. 337.

α) Es seyn die simpeln Trigonalen 1. 3. 6. 10. 15. 21 u. s. w.
und deren Seiten 1. 2. 3. 4. 5. 6 multipl.
so entstehen folgende simple dreyeckigte Columnare 1. 6. 18. 40. 75. 126

Formiret die Trigonale 3 zweymal liegend oder stehend, mit Würfeln, und setzet sie über oder neben einander. In beyden Fällen entstehet die simple dreyeckigte Columnare 6.

Formiret die Trigonale 6 dreymal, und füget sie zusammen: so kömmt die simple dreyeckigte Columnare 18, und so weiter.

β) Es seyn die simpeln Tetragonalen 1. 4. 9. 16. 25. 36 u. s. w.
und deren Seiten 1. 2. 3. 4. 5. 6
so entstehen folgende viereckigte simple Columnare 1. 8. 27. 64. 125. 216.

Diese Zahlen sind mit den Cubikzahlen völlig einerley. Denn formiret das Quadrat 4 zweymal: so entstehet ein Cubus, und allhier die simple viereckigte Colum-

Columnare 8. Formiret das Quadrat 9 dreymal; ſo entſtehet ein Cubus, und allhier die ſimple viereckigte Columnare 27, u. ſ. w.

γ) Es ſeyn annoch die ſimpeln Pentagonalen und Hexagonalen

1.	5.	12.	22.	35	u. ſ. w.	1.	6.	15.	28. 45 u. ſ. w.
Seiten 1.	2.	3.	4.	5		Seiten 1.	2.	3.	4. 5
Simple fünfeckigte Columnarzahlen. 1.	10.	36.	88.	175		Simple ſechseckigte Columnarzahlen. 1.	12.	45.	112. 225

δ) Alle dieſe ſimple Columnarprogreßionale laſſen ſich auf eine ſimple arithmetiſche Progreßion zurücke führen, deren Differenzen in den dreyeckigten Columnaren die Zahl 3; in den viereckigten die Zahl 6; in den fünfeckigten die Zahl 9; in den ſechseckigten die Zahl 12; in den ſiebeneckigten die Zahl 15 u. ſ. w. iſt.

Aus der gegebnen Eck- und Seitenzahl die ſimple Columnare ſelbſt zu finden. §. 338.

1) Subtrahiret 2 von der Eckzahl, und behaltet den Reſt. 2) Subtrahiret 1 von der Seitenzahl, und multipliciret den Reſt mit dem Reſt der erſten Operation. 3) Addiret 2 zum vorigen Product; multipliciret das Collect mit der halben Seitenzahl, und das kommende Product mit der ganzen Seitenzahl, als:

Es ſey die Eckzahl = 6 und die Seitenzahl = 4; oder die Wurzel einer ſechseckigten Columnare ſey 4; die Columnare ſelber zu finden.

Alſo 1) 6 − 2 = 4
2) 4 − 1 = 3 u. 3 × 4 = 12.
3) 12 + 2 = 14

2 = 4 − 2
28
4
112 die geſundne ſechseckigte Columnare.

Es ſey die Eckzahl = 14 und die Seitenzahl = 9.

Alſo 1) 14 − 2 = 12
2) 9 − 1 = 8, u. 8 × 12 = 96
3) 96 + 2 = 98

4½ = 9 − 4½
441
9
3969 die geſundne vierzehneckigte Columnare.

(11.) Sim-

(II.) Simple columnar Pyramidalzahlen. §. 339.

Selbige entstehen aus der Addition der simpeln Columnaren, z. E.

α) Es seyn die simpeln **dreyeckigten Columnaren** 1. 6. 18. 40. 75.

Saget $1 = 1$
$1 + 6 = 7$
$1 + 6 + 18 = 25$
$1 + 6 + 18 + 40 = 65$, u. s. w. so entstehen die **dreyeckigten simpeln columnar Pyramidalzahlen** 1. 7. 25. 65. 140 u. s. w.

Formiret mit Würfeln die simple dreyeckigte Columnare 18 liegend. Setzet darüber die vorhergehende simple Columnare 6 auch liegend, und hierüber die 1: so kömmt die dreyeckigte Columnarpyramidale 25.

β) Es seyn die simpeln **viereckigten Columnaren** 1. 8. 27. 64. 125.

Saget $1 = 1$
$1 + 8 = 9$
$1 + 8 + 27 = 36$
$1 + 8 + 27 + 64 = 100$ u. s. w. so entstehen die **viereckigten simpeln columnar Pyramidalzahlen** 1. 9. 36. 100. u. s. w.

Formiret die simple viereckigte Columnarzahl 27; setzet darüber die Columnarzahl 8, und über diese die Zahl 1: so kömmt die viereckigte Columnarpyramidale 36. und so weiter.

γ) Es können alle diese simple columnar Pyramidalzahlen auf eine arithmetische Progreßion zurückgeführet werden.

δ) Wenn die Columnarpyramidalen wieder summiret werden, so entstehen columnar pyramidal Pyramidale von verschiedner Ordnung.

(III.) Cen-

(III.) Central Columnarzahlen. §. 340.

α) Es seyn die central Trigonalzahlen
1. 4. 10. 19. 31 u.s.w.
und deren Seiten 1. 2. 3. 4. 5
so entstehen folgende dreyeckigte central Columnarzahlen 1. 8. 30. 76. 155

β) Es seyn die Centraltetragonalen 1. 5. 13. 25. 41. 61 u.s.w.
und deren Seiten 1. 2. 3. 4. 5. 6
Viereckigte Centralcolumnare 1. 10. 39. 100. 205. 366

Formiret die Centraltetragonale 5 zweymal, und setzet sie zusammen: so kömmt die viereckigte central Columnarzahl 10. Formiret die Centraltetragonale 13 dreymal, und setzet sie zusammen: so kömmt die viereckigte central Columnarzahl 39, u.s.w.

γ) Alle hieher gehörige Progreßionale lassen sich auf eine arithmetische Progreßion zurückführen.

(IV.) Central columnar Pyramidalzahlen. §. 341.

Selbige entstehen aus der Addition der Centralcolumnaren, z. E.

α) Es seyn die dreyeckigten Centralcolumnaren 1. 8. 30. 76. 155 ꝛc.

Saget: 1 = 1
1 + 8 = 9
1 + 8 + 30 = 39
1 + 8 + 30 + 76 = 115 u.s.w. so entstehen die dreyeckigten central Columnarpyramidalen 1. 9. 39. 115. 270 u. s. w.

β) Es seyn die viereckigten Centralcolumnaren 1. 10. 39. 100. 205. 366 u. s. w.

Saget:

Saget: 1 = 1
1 + 10 = 11
1 + 10 + 39 = 50
1 + 10 + 39 + 100 = 150 u. s. w. so entstehen die viereckigten central Columnarpyramidalen 1. 11. 50. 150. 355. 721 u. s. w.

Formiret die viereckigte central Columnarzahl 10, und setzet 1 darüber: so kömmt die Pyramide 11.

Formiret die viereckigte central Columnarzahl 39. Setzet die Zahl 10 darüber, und über diese die Zahl 1: so entsteht die Pyramide 50. u. s. w.

γ) Alle diese Pyramidale lassen sich auf eine simple arithmetische Progreßion zurücke führen.

δ) Wenn diese Pyramidalen wieder summiret werden, so entstehen central- columnar- pyramidal Pyramidalzahlen von verschiedner Ordnung.

Anmerkung.

Die aus den parallelogrammischen Zahlen entstehende Columnarzahlen, und deren Pyramiden sind nichts anders als prismatische, parallelepipedische, prismatische Pyramidal- und parallelepipedische Pyramidalzahlen; weshalb ich sie übergehe.

Achtzehnter Abschnitt.

Von den Thurmförmigen oder Pyrgoidalzahlen.

§. 342.

Wenn man eine Pyramidal- und Columnarzahl von einerley Geschlecht dergestalt zusammensetzet, daß die Seite der Pyramidalzahl 1 weniger als die Seite der Columnarzahl ist, so wird die Summe eine **Thurmförmige oder Pyrgoidalzahl** genennet. Eine solche Zahl kann entweder simpel oder central seyn.

(I.) Sim-

(I.) Simple Pyrgoidalzahlen. §. 343.

α) Es seyn die simpeln dreyeckigten Columnaren 1. 6. 18. 40. 75. 126, und die dreyeckigten simpeln Pyramidalen 1. 4. 10. 20. 35. 56. Um diese Zahlen dergestalt zusammenzusetzen, daß die Seiten der Pyramidalzahlen allezeit 1 weniger betragen, heben wir die Folge der leztern mit einer Nulle an, als:

Pyramidale.	0.	1.	4.	10.	20.	35 u. s. w.
Columnare.	1.	6.	18.	40.	75.	126
Dreyeck. simple Pyrgoidale.	1.	7.	22.	50.	95.	161.

Formiret mit Würfeln die dreyeckigte simple Columnarzahl 6, und setzet 1 darüber: so kömmt die dreyeckigte simple Pyrgoidalzahl 7. Formiret die dreyeckigte simple Columnare 18; setzet den Triangel 3 darüber, und über die 3 eine 1: so kömmt die dreyeckigte simple Pyrgoidalzahl 22. u. s. w.

β) Es seyn die simpeln viereckigten Columnaren 1. 8. 27. 64. 125. 216 ꝛc. und die viereckigten simpeln Pyramidalen 1. 5. 14. 30. 55. 91. Stehet also:

Pyramidale.	0.	1.	5.	14.	30.	55.
Columnare.	1.	8.	27.	64.	125.	216.
viereck. simple Pyrgoidalen.	1.	9.	32.	78.	155.	271.

Formiret die simple viereckigte Columnarzahl 8, und setzet 1 darüber: so kömmt die simple viereckigte Pyrgoidalzahl 9. Formiret die simple viereckigte Columnarzahl 27; setzet das Quadrat 4, und über dieses die Zahl 1: so kömmt die simple viereckigte Pyrgoidale 32. u. s. w.

Alle diese Pyrgoidalzahlen lassen sich auf eine einfache arithmetische Progreßion zurückführen. Wenn die Pyrgoidalzahlen, nach Art der Pyramidalen, wieder summiret werden, so entstehen pyrgoidal Pyrgoidalzahlen von verschiedner Ordnung.

Aus der gegebenen Eck- und Seitenzahl die simple Pyrgoidale selbst zu finden. §. 344.

1) Dupliret die Eckzahl, subtrahiret 7 und behaltet den Rest. 2) Triplirt die Seitenzahl, subtrahiret 1 von dem Product; multipliciret den Rest mit dem Rest der ersten Operation, und behaltet das Product. 3) Subtrahiret 2 von der Eckzahl; quadrupliret den Rest, und multipliciret das Quadruplum mit dem Quadrat der Seitenzahl. 4) Subtrahiret von dem Product der dritten Operation das behaltne Product der zweyten, und multipliciret den Rest mit $\frac{1}{6}$ aus der Seitenzahl, als:

Es sey die Eckzahl = 4 und die Seitenzahl = 6; oder die Wurzel einer viereckigten Pyrgoidale sey 6; die Pyrgoidale selbst zu finden.

1) $4 \times 2 = 8$, und $8 - 7 = 1$. 3) $4 - 2 = 2$ und $2 \times 4 = 8$
$6^2 = 36$
288

2) $6 \times 3 = 18$, u. $18 - 1 = 17$.
$17 \times 1 = 17$.

4) $288 - 17 = 271$

1 ist $\frac{1}{6}$ aus 6

271 die gefundene viereckigte Pyrgoidale.

Oder:

1) Suchet für gegenwärtiges Exempel eine simple viereckigte Columnare, deren Seite = 6. 2) Suchet eine simple viereckigte Pyramidale, deren Seite $= 6 - 1$, und also deren Seite 5. 3) Addiret beyde Zahlen. Die simple viereckigte Columnare aus der Seite 6 ist 216, und die simple viereckigte Pyramidale aus der Seite 5 ist 55. Wenn nun $216 + 55 = 271$, so ist vermittelst dieses Processes auch die verlangte viereckigte Pyrgoidale gefunden worden.

(II) Central Pyrgoidalzahlen. §. 345.

Selbige entstehen aus der Addition der Centralpyramidal- und central Columnarzahlen, z. E.

α) Es seyn die dreyeckigten central Columnarzahlen 1. 8. 30. 76. 155; und die dreyeckigten central Pyramidalzahlen 1. 5. 15. 34. 65. Stehet also:

Pyra-

Pyramidale. 0. 1. 5. 15. 34.
Columnare. 1. 8. 30. 76. 155. u. ſ. w.

dreyeck. central Pyrgoidal-zahlen. 1. 9. 35. 91. 189.

β) Es ſeyn die viereckigten central Columnarzahlen 1. 10. 39. 100. 205. 366, und die viereckigten central Pyramidalzahlen 1. 6. 19. 44. 85. 146. Stehet alſo:

Pyramidale. 0. 1. 6. 19. 44. 85.
Columnare. 1. 10. 39. 100. 205. 366. u. ſ. w.

viereck. cent. Pyrgoid. 1. 11. 45. 119. 249. 451.

Formiret die viereckigte Centralcolumnare 10, und ſetzet 1 darüber: ſo kömmt die viereckigte Centralpyrgoidale 11. Formiret die viereckigte Centralcolumnare 39; ſetzet die Centraltetragonale 5 darüber, und über dieſe eine 1: ſo kömmt die viereckigte Centralpyrgoidale 45, u. ſ. w.

Alle dieſe Centralpyrgoidalzahlen laſſen ſich auf eine einfache arithmetiſche Progreßion zurücke führen. Wenn ſelbige, nach Art der Pyramidalzahlen, wieder ſummiret werden: ſo entſtehen central pyrgoidal Pyrgoidalzahlen von verſchiedner Ordnung.

Neunzehnter Abſchnitt.

Von den Polyedralzahlen.

§. 346.

Die Zahlen ähnlicher Polyeder, deren Seiten von jedem kleinern zum nächſtfolgenden größern um 1 differiren, werden **Polyedralzahlen** genennet. Sie unterſcheiden ſich, wie die fünf regulären Körper der Geometrie, in **Tetraedal- Hexaedral- Octaedral- Dodekaedral- und Ikoſaedralzahlen**, und ſind entweder ſimpel oder central.

(I.) Simple Polyedralzahlen. §. 347.

α) Die simpeln Tetraedralzahlen zu finden.

Multipliciret die gegebne Wurzel + 1 mit der Wurzel + 2, und multiplicirt ein Drittheil des Products mit der halben Wurzel.

Wenn z. E. die Wurzel 8, so ist

8 + 1 = 9
8 + 2 = 10
90
3 = 30
4 = 8/2
120 die gefundene simple Tetraedrale.

Wenn z. E. die Wurzel 5, so ist

5 + 1 = 6
5 + 2 = 7
42
3 = 14
2½ = 5/2
35 die gefundene simple Tetraedrale.

Da die simpeln Tetraedalen mit den simpeln dreyeckigten Pyramidalzahlen 1. 4. 10. 20. 35. 56. 84. 120. 165 ꝛc. einerley sind: so können sie nicht allein wie selbige geometrisch vorgestellet, sondern auch wie jene gefunden werden, wenn man die gegebne Wurzel mit der Wurzel + 1 und + 2 multipliciret, und in das Product mit 1 × 2 × 3 dividiret. Z. E. wenn die Wurzel = 8, so ist

$$\frac{8 \times 9 \times 10}{1 \times 2 \times 3} = \frac{720}{6} = 120.$$

β) Die simpeln Hexaedralzahlen zu finden. §. 348.

Cubiret die Wurzel. Z. E. wenn solche = 8, so ist die simple Hexaedrale = 512. Diese Zahlen sind also mit den Cubikzahlen, ingleichen mit den viereckigten simpeln Columnaren 1. 8. 27. 64. 125. 216. 343. 512. 729 u. s. w. von welchen im §. 337. gehandelt worden, einerley.

γ) Die simpeln Octaedralzahlen zu finden. §. 349.

Multipliciret den Cubus der gegebnen Wurzel mit der Zahl 4; addiret zum Product das Duplum der Wurzel, und dividiret das Collect mit 6.

Wenn

Wenn z. E. die Wurzel = 8, ſo iſt

$8^3 = 512$

4

2048

16 = 2×8

2064

6) 344 die gefundene Octaedrale.

Wenn die Wurzel = 5, ſo iſt

$5^3 = 125$

4

500

10 = 2×5

510

6) 85 die gefundene Octaedrale.

Die ſimpeln Octaedralen ſind mit den viereckigten Centralpyramidalen 1. 6. 19. 44. 85. 146. 231. 344 ꝛc. einerley.

δ) Die ſimpeln Dodekaedralzahlen zu finden. §. 350.

Multipliciret das Noncuplum der Wurzel mit der Wurzel — 1; addiret 2 zum Product, und multipliciret das Collect mit der halben Wurzel. Z. E.

Wenn die Wurzel = 8, ſo iſt

9×8 = 72

7 = 8 — 1

504 + 2 = 506

4 = 4/1

2024 die gefundne Dodekaedrale.

Wenn die Wurzel = 5, ſo iſt

9×5 = 45

4 = 5 — 1

180 + 2 = 182

2½ = 5/2

455 die gefundne Dodekaedrale.

Die ſimpeln Dodekaedralen ſind mit den neuneckigten Centralcolumnaren 1. 20. 84. 220. 455. 816 u. ſ. w. einerley; als es ſeyn

Die cent. Enneagonalen	1.	10.	28.	55.	91.	136.	190.	253.
und deren Seiten	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
neckigte Centralcolumn.	1.	20.	84.	220.	455.	816.	1330.	2024.

ε) Die ſimpeln Ikoſaedralzahlen zu finden. §. 351.

Multipliciret das Quintuplum der Wurzel mit der Wurzel — 1; addiret 2 zum Product, und multipliciret das Collect mit der halben Wurzel. Z. E.

Wenn die Wurzel = 8, so ist

$5 \times 8 = 40$

$7 = 8 - 1$

$280 + 2 = 282$

$4 = \frac{8}{2}$

1128 die gefundne Ikosaedrale.

Die stumpfen Ikosaedralzahlen sind mit den fünfeckigten Centralcolumnaren 1. 12. 48. 124. 255. 456 u. s. w. einerley; als es seyn

Die Centralpentagonalen	1.	6.	16.	31.	51.	76.	106.	141
und deren Seiten	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8
5eckigte Centralcolumn.	1.	12.	48.	124.	255.	456.	742.	1128

(II.) Central Polyedralzahlen. §. 352.

α) Die central Tetraedralzahlen zu finden.

Addiret den Cubus der Wurzel zum Cubus der um 1 verminderten Wurzel. Z. E.

Wenn die Wurzel = 4, so ist $4^3 + 3^3 = 91$ die gefundene Tetraedrale.

Wenn die Wurzel = 3, so ist $3^3 + 2^3 = 35$ die gefundene Tetraedrale.

Diese Zahlen sind mit den aus Centraltrigonalen entstandnen Pyrgoidalzahlen 1. 9. 35. 91. 189. 341. 559. 855, u. s. w. einerley, wie man aus folgender Vorstellung sehen wird:

Centraltrigonale	1.	4.	10.	19.	31.	46.	64.	85
Seiten	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8
Centraltrigon. Column.	1.	8.	30.	76.	155.	276.	448.	680
Centraltrigon. Pyram.	0.	1.	5.	15.	34.	65.	111.	175
Trigon. Centr. Pyrgoid.	1.	9.	35.	91.	189.	341.	559.	855.

β) Die central Hexaedral- und central Octaedralzahlen zu finden. §. 353.

Da das Hexaeder aus 6 Seiten und 8 Ecken; das Octaeder aber aus 8 Seiten und 6 Ecken besteht: so geschicht

ſchicht es daher, daß die central Hexaedral- und central Octaedralzahlen einander gleich ſind. Sie zu formiren

Subtrahiret von dem Biquadrat der Wurzel das Biquadrat der um 1 verminderten Wurzel. Z. E.

Wenn die Wurzel = 4, ſo iſt $4^4 - 3^4 = 175$ die gefundne Hexaedrale oder Octaedrale.

Wenn die Wurzel = 3, ſo iſt $3^4 - 2^4 = 65$ die gefundne Hexaedrale oder Octaedrale.

Dieſe Zahlen ſind mit den aus Centralhexagonalen entſtehenden Pyrgoidalzahlen 1. 15. 65. 175. 369. 671. 1105 ꝛc. einerley, wie man aus folgender Vorſtellung ſiehet:

Centralhexagonale	1.	7.	19.	37.	61.	91.	127.	169
Seiten	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8
Centralhexag. Column.	1.	14.	57.	148.	305.	546.	889.	1352.
Centralhexag. Pyramid.	0.	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343
Pyrgoidale	1.	15.	65.	175.	369.	671.	1105.	1695

γ) Die central Dodekaedral- und central Ikoſaedralzahlen zu finden. §. 354.

Da das Dodekaeder aus 12 Seiten und 20 Ecken, und das Ikoſaeder aus 20 Seiten und 12 Ecken beſteht: ſo geſchicht es daher, daß die Centraldodekaedralen und die Centralikoſaedralen einander gleich ſind. Sie zu formiren

1) Quintuplirt das Quadrat der Wurzel. 2) Multiplicirt das Quintuplum mit dem um 3 verminderten Duplo der Wurzel, und 3) addiret zum Product das um 1 verminderte Septuplum der Wurzel. Z. E.

Wenn die Wurzel = 4.

1) $4^2 = 16$
$\times 5$
80 Quintuplum.

Wenn die Wurzel = 5.

1) $5^2 = 25$
$\times 5$
125

2) $2\times4=8$
$\underline{3}$
5 und 80
$\underline{5}$
400

3) $7\times4=28$
$\underline{-1}$
$27+400=427$

Die gefundne Centraldodekaedrale, oder Centralikoſaedrale.

2) $2\times5=10$
$\underline{-3}$
7 und 125
$\underline{7}$
875

3) $7\times5=35$
$\underline{-1}$
$34+875=909$

Die gefundne Centraldodekaedrale oder Centralikoſaedrale.

Dieſe Zahlen ſind mit den aus Centralpentadekagonalen entſtehenden Pyrgoidalzahlen 1. 33. 155. 427. 909. 1661 ꝛc. einerley, wie man aus folgender Vorſtellung ſiehet:

Centralpentadekagonale	1.	16.	46.	91.	151.	226.	316
Seiten	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7
Centralpentadek. Column.	1.	32.	138.	364.	755.	1356.	2212
Centralpentadek. Pyramid.	0.	1.	17.	63.	154.	305.	631
Pyrgoidale	1.	33.	155.	427.	909.	1661.	2843

§. 355.

Unter denjenigen, die über den figürlichen Calcul geſchrieben haben, zeichnet ſich unſtreitig der berühmte italieniſche Mathematiker **Franciſcus Maurolycus**, welcher in dem XVIten Jahrhundert gelebet, vorzüglich aus, da er, nach dem Zeugniß des Freyherrn **von Wolf**, die Lehre von den Polygonalzahlen ſehr erweitert und die Columnar- und Pyrgoidalzahlen erfunden hat. Ich habe aber nicht ſo glücklich ſeyn können, ſein Werk davon irgendwo ausfindig zu machen. Vom Maurolycus auf den ſo genannten **arithmetiſchen und geometriſchen Wurzelmann des Mag. Chriſtian Peſcheck** iſt ein gewaltiger Sprung. Ich kann aber nicht umhin, dieſes Werk deßwegen anzuführen, weil es einen gewiſſen Hauptfehler hat, nemlich dieſen,

dieſen, daß dem Verfaſſer der Unterſcheid der Polygonalzahlen in ſimple und centrale unbekannt geweſen iſt. Daher iſt es denn gekommen 1) daß die Lehre von der Ausziehung der Trigonal- und Tetragonalwurzeln die ſimpeln Progreßionalen, und die Lehre von der Ausziehung der Pentagonal- und Hexagonalwurzeln die Centralprogreßionalen dieſer Art von Zahlen betrift; und 2) daß der Verfaſſer die Regeln von der Ausziehung der Pentagonalwurzel widerſprechend findet, und nicht mit ſich einig werden kann, ob er z. E. die Zahl 8, oder die Zahl $9\frac{1}{2}$, oder die Zahl 10 für die Pentagonalwurzel der Zahl 141 nehmen ſoll. Indeſſen ſind die beyden erſten Wurzeln 8 und $9\frac{1}{2}$ jede in ihrer Art recht. Wenn nemlich die Zahl 141 als eine **Centralpentagonale** betrachtet wird, ſo iſt ihre Wurzel = 8. Wird die Zahl 141 aber als eine **ſimple Pentagonale** betrachtet, (und dafür iſt ſie von **Hemelingen** betrachtet worden, indem, wenn man ſchlechtweg von einer Polygonale ſpricht, insgemein eine ſimple Polygonale verſtanden wird,) ſo kömmt die Zahl $9\frac{1}{2}$ zu ihrer Wurzel; und wenn **Tobias Beutel** die 10 dafür angegeben hat, ſo iſt ſolches deswegen geſchehen, weil $\frac{1}{2}$ bald ein Ganzes iſt. Es iſt nemlich mit den arithmetiſchen Progreßionalen bewandt, wie mit den geometriſchen, indem zwar jede Zahl die Seite oder Wurzel einer Potenz, aber nicht eine jede Zahl eine vollkommne Potenz abgeben kann, und alſo nicht eine Wurzel ohne Reſt enthält; und in dieſem lezten Falle iſt die Zahl 141, als eine ſimple Pentagonale betrachtet, da ſie hingegen als eine Centralpentagonale betrachtet, eine vollkommne Polygonale iſt. — Der vorhin angeführte **Johann Hemeling** hat in ſeinen arithmetiſchen Schriften, ingleichen **Heinrich Meißner** in ſeinem ſogenannten **Kern und Stern der Algebra** ſehr gründlich von den Polygonalzahlen gehandelt. In **Ozanams** und **Wolfs** mathema-

tischen Wörterbüchern findet man solche auch erkläret. Ich übergehe die Nahmen verschiedner ältern, und der noch itzo blühenden berühmten Mathematiker, wovon jene meistens im Ziffer- und diese im Litteralcalcul, verschiedene Aufgaben aus der figürlichen Arithmetik ausgearbeitet haben.

Drittes Buch

welches die

Anfangsgründe

des

combinatoriſchen Calculs

enthält.

Anfangs-

Anfangsgründe des combinatoriſchen Calculs.

§. 356.

Der combinatoriſche Calcul beſtehet in der Lehre von den Verbindungsarten oder Combinationen zweyer oder mehrer Größen, und wird auch ſonſten die Verbindungskunſt (*ars combinatoria*) genennet. Es können die Verbindungen der Größen aber auf zweyerley Art geſchehen, als entweder ohne Rückſicht auf die Ordnung derſelben, in welchem Falle z. E. a b und b a nichts mehr als eine einzige Verbindung ausmachen; oder in Rückſicht auf die Ordnung der Dinge, in welchem Falle a b und b a zwey verſchiedne Verbindungen ausmachen. Die erſtere Art von Verbindung, das iſt diejenige, in welcher auf die Ordnung der Dinge kein Bedacht genommen wird, heiſſet eine ausſchlieſſende Verbindung (*combinatio excluſiua*,) und die andere, in welcher die Ordnung der Dinge in Betracht kömmt, oder in welcher eben dieſelbe Größe zweymal mit einer andern zuſammen genommen wird, heiſſet eine abwechſelnde Verbindung (*combinatio alternatiua*).

natius). Es sey in was für einer Art von Verbindung es sey, so wird keine Größe für sich einzeln oder allein, sondern allezeit in Rücksicht auf eine andere Größe betrachtet, indem eine einzige Größe nicht mehr als eine Gestalt, Stelle Lage oder Ordnung hat. Z. E. in den vier gegebnen Größen a b c d giebet man weder auf a oder b für sich allein, sondern bloß darauf acht, in wie weit a mit b, c, d verbunden werden kann. Es gehören also wenigstens zwey Dinge zur Formirung einer Combination.

Anmerkung.

Die Verbindungskunst wird von einigen die Veränderungskunst (*ars variandi*) genennet. Weil aber jede Veränderung von Größen die Betrachtung ihrer Verbindung voraussetzet: so ist das Wort Verbindungskunst, als ein allgemeineres Wort, ohne Zweifel bequemer, und deßwegen auch gebräuchlicher. Ferner wird die ausschliessende Combination hin und wieder schlechtweg eine Combination, und die abwechselnde Verbindung eine Alternation oder Permutation, d. i. Abwechselung, Verwechselung, oder Versetzung genennet. Wenn aber keine Versetzung ohne eine Combination gedacht werden kann, und die Lehre von der Versetzungskunst also ein Theil der Verbindungskunst ist: so sind die obigen und allhier gebrauchten Benennungen natürlicher, und dem Zusammenhang der Gegenstände angemeßner.

§. 357.

Die Größen, welche unter sich verbunden werden, sind entweder alle oder nur zum Theil verschieden. Es entstehet daher der Unterscheid zwischen der Verbindung verschiedner oder unähnlicher, und der Verbindung wiederholter Größen, (*combinatio diuersorum & repetitorum*). So enthalten z. E. die vier Größen a b c d verschiedne und a a b c oder a a a b wiederholte Größen. Man sehe die folgende dritte Anmerkung. Ueberall werden die Verbindungen, die je zwey geschehen binarische oder gezweyte Verbindungen genennet; die je drey geschehen, ternarische oder gedritte; die je vier geschehen, quaternarische oder gevierte, u. s. w., als quinarische, senarische, septe-

ſeptenariſche, octonariſche, novenariſche, denariſche, undenariſche und dodenariſche ꝛc. Die binariſchen Verbindungen werden auch Binionen oder Dyaden genennet; die ternariſchen Ternionen oder Triaden; die quaternariſchen Quaternionen oder Tetraden; die quinariſchen Quinionen oder Pentaden u. ſ. w. Dieſer Unterſcheid der Verbindungen heiſſet mit einem Worte der quotenſche Unterſcheid derſelben. Um zu wiſſen, wie vielerley Arten quotenſcher Verbindungen in einer Zahl enthalten ſind, brauchet man von dieſer Zahl nur eine Einheit abzuziehen. So ſind Z. E. in der Zahl 3 nicht mehr als zweyerley Arten von Verbindungen enthalten, eine binariſche und ternariſche; und in der Zahl 4 nicht mehr als dreyerley Arten, eine binariſche, ternariſche und quaternariſche, indem vermöge des vorhergehenden §. die Betrachtung eines Einers oder einer Union nicht in die Lehre von der Combination gehöret.

Erſte Anmerkung.

Vermittelſt der auf die ausſchlieſſende Verbindung unähnlicher Größen errichteten Zahlen- oder genueſiſchen Lotterie ſind annoch andere Ausdrücke bey uns Mode geworden, als Ambe, Terne, Quaterne und Quine, anſtatt Binion, Ternion, Quaternion und Quinion. Wenn aber bey einer gewiſſen Lotterie dieſer Art in Deutſchland das Wort Quinterne anſtatt Quine gebrauchet wird: ſo iſt dieſes Wort falſch, einmal weil es nicht lateiniſch iſt, und hernach, weil es, auch als ſelbſt gemachtes Latein, nicht dasjenige bezeichnet, was es bezeichnen ſoll, ſondern eine quindeniſche Verbindung anzeiget.

Zweyte Anmerkung.

Da man die Wörter Conternation und Conquaternation, u. ſ. w. hin und wieder findet: ſo ſiehet man daraus, daß das Wort Combination anfänglich nichts anders als eine Verbindung zweyer Größen bedeutet, und ſich nicht auf die Verbindung mehrer Größen erſtrecket hat. In der Folge der Zeit aber iſt dem Worte Combination eine allgemeine Bedeutung gegeben, und jede Art der Verbindung von zwey, drey und mehrern Größen darunter begriffen worden.

Dritte

Dritte Anmerkung.

Der Ausdruck von wiederholten Größen findet statt, es mag nur eine Größe, oder es mögen ihrer mehrere wiederholet seyn, und es mag jede Größe 2, 3, 4 oder mehrmal wiederholet seyn. Anstatt wiederholte Größen saget man auch vermischte Größen.

Erster Abschnitt.

Von der ausschließenden Verbindung unähnlicher Größen.

§. 358.

Man erinnere sich allhier, 1) daß wir durch **ausschließende Verbindungen** diejenigen verstehen, in welchen nicht auf die Ordnung der Größen gesehen wird, und daß folglich alle diejenigen Verbindungen, die sich das zweyte, dritte oder viertemal u. s. w. bloß in veränderter Lage darstellen, nicht hieher gehören; und 2) daß durch die Verbindung **unähnlicher Größen** eine solche Verbindung verstanden wird, in welcher alle Größen verschieden sind, z. E. in a b c d.

§. 359.

Es sind viele **besondere Manieren** möglich, die hieher gehörigen Aufgaben aufzulösen. Diese besondere Manieren sind in so weit gut, als sie zur Uebung und Veränderung des Calculs dienen, und wenn die Verbindungen niedrig sind. Bey den höhern Verbindungen aber, besonders einer großen Zahl, und wenn eine Aufgabe ohne vielen Zeitverlust aufgelöset werden soll, ist es nöthig, eine allgemeine Regel in Bereitschaft zu haben. Hier sind einige besondere Regeln.

(I.) Zu wissen, wie viele Binionen in einer Zahl enthalten sind. §. 360.

Subtrahiret die gegebne Zahl von ihrem Quadrat, und theilet die Differenz mit 1×2; oder addiret die um eine Ein-

Einheit verminderte Zahl zu dem Quadrat derſelben, und theilet das Collect mit 1×2. Wenn nun die gegebne Zahl = 6, ſo iſt

Erſte Manier.

$6^2 = 36$, u. $36 - 6 = 30$

$\frac{30}{1\times2} = 15$ gefundne Anzahl der Binionen in 6.

Zweyte Manier.

$6 - 1 = 5$, u. $5^2 = 25$

$+ 5$

30

$\frac{30}{1\times2} = 15$ gefundne Zahl.

(II.) Zu wiſſen, wie viele Ternionen in einer Zahl enthalten ſind. §. 361.

1) Subtrahiret die gegebne Zahl von ihrem Quadrat; 2) multipliciret die Differenz mit der gegebnen Zahl — 2, und dividiret mit 1×2×3; oder 1) addiret das Duplum der gegebnen Zahl zu dem Cubus derſelben; 2) ſubtrahiret das Triplum ihres Quadrats von dem Collect, und dividiret mit 1×2×3. Z. E. wenn die gegebne Zahl = 6, ſo iſt

Erſte Manier.

1) $6^2 = 36$

$- 6$

30

2) $6 - 2 = 4$

$\times 30$

120

$\frac{120}{1\times2\times3} = 20$ gefundne Anzahl der Ternionen in 6.

Zweyte Manier.

1) $6\times2 = 12$

$6^3 = 216$

228

2) $6^2 = 36$, u. $36\times3 = 108$

120

$\frac{120}{1\times2\times3} = 20$

(III.) Zu wiſſen, wie viele Quaternionen in einer Zahl enthalten ſind. §. 362.

1) Addiret das Duplum der gegebnen Zahl zu dem Cubus derſelben; ſubtrahiret das Triplum ihres Quadrats von dem Collect; 3) multipliciret den Reſt mit der gegebnen

Zahl — 3, und dividiret in das Product mit 1×2×3×4. Z. E. wenn die gegebne Zahl = 6, so ist

1) 6×2 = 12
6^3 = 216
228

2) 6^2 = 36, und 36×3 = 108
120

3) 6 — 3 = 3
360

$\frac{360}{1\times2\times3\times4}$ = 15 die gefundne Anzahl der Quaternionen.

(IV.) Zu wissen, wie viele Quinionen in einer Zahl enthalten sind. §. 363.

1) Addiret das Duplum der gegebnen Zahl zu dem Cubus derselben; 2) subtrahiret das Triplum ihres Quadrats von dem Collect; 3) multipliciret den Rest mit der gegebnen Zahl — 3; das kommende Product mit der gegebnen Zahl — 4, und dividiret mit 1×2×3×4×5. Wenn zum Exempel die gegebne Zahl = 6, so ist

1) 6×2 = 12
6^3 = 216
228

2) 6^2 = 36 und 36×3 = 108
120

3) 120
6 — 3 = 3
360
6 — 4 = 2
720

$\frac{720}{1\times2\times3\times4\times5}$ = 6 gefundne Anzahl der Quinionen.

§. 364.

Der Augenschein giebt es, daß die vorhergehenden Berechnungen etwas mühsam sind, und selbige werden immer mühsamer, nach dem Maaß als die Quotität der gegebnen Dinge, und mit selbiger die Quotenität oder die verschiedne Art der Verbindungen zunimmt. Man verfähret also zum ordent-

ordentlichen Gebrauch besser, sich folgender allgemeinen Methode zu bedienen, nach welcher sich die verschiedenen Verbindungsarten, von der niedrigsten bis zur höchsten, von einer Operation zur andern nach und nach entwickeln. Diese Methode bestehet, überhaupt gesprochen, darinnen, daß man die Zahl der Aufgabe rückwärts multiplicirt, und in die Producte vorwärts dividirt.

(V.) Zu wissen, wie viele Verbindungen von jeder Art in der Zahl 10 enthalten sind. §. 365.

1) Multiplicirt die gegebne Zahl mit der zunächst vorhergehenden kleinern, und dividirt das Product mit 1 X 2. Der Quotient giebet die Anzahl der binarischen Verbindungen. 2) Multiplicirt unter sich die gegebne Zahl, und die beyden zunächst vorhergehenden kleinern, und dividirt das Product mit 1 X 2 X 3. Der Quotient giebet die Anzahl der ternarischen Verbindungen. 3) Multiplicirt unter sich die gegebne Zahl, und die drey zunächst vorhergehenden kleinern, und dividirt mit 1 X 2 X 3 X 4. Der Quotient giebet die Anzahl der quaternarischen Verbindungen, u. s. w., als

$\frac{10 \times 9}{1 \times 2} = \frac{90}{2} = 45$ Binnionen.

$\frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = \frac{720}{6} = 120$ Ternionen.

$\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{5040}{24} = 210$ Quaternionen.

$\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = \frac{30240}{120} = 252$ Quinionen.

$\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = \frac{151200}{720} = 210$ Senionen.

$\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7} = \frac{604800}{5040} = 120$ Septenionen.

$\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8} = \frac{1814400}{40320} = 45$ Octonionen.

$\frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9}=\frac{3628800}{362880}=$ 10 Novenionen.

$\frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10}=\frac{3628800}{3628800}=$ 1 Denion.

§. 366.

Vorhergehender Calcul kann abgekürzet werden, wenn die Producte jeder vorhergehenden Operation zum Grunde der folgenden geleget werden. Dieses zu thun, 1) multipliciret die gegebne Zahl mit der gegebnen Zahl — 1, und dividiret in das Product mit 2. 2) Multipliciret die durch den Quotienten gefundnen Binionen mit der gegebnen Zahl — 2, und dividiret in das Product mit 3. 3) Multipliciret die durch den Quotienten gefundnen Ternionen mit der gegebnen Zahl — 3, und dividiret in das Product mit 4. 4) Fahret auf ähnliche Art mit beständig abnehmenden Multiplicatoren und zunehmenden Divisoren fort, als:

10
9
2) 90 / 45 Binionen.
8
3) 360 / 120 Ternionen.
7
4) 840 / 210 Quaternionen.
6
5) 1260 / 252 Quinionen.
5
6) 1260 / 210 Senionen.

210 Senionen.
4
7) 840 / 120 Septenionen.
3
8) 360 / 45 Octonionen.
2
9) 90 / 10 Novenionen.
1
10) 10 / 1 Denion.

(VI.) Die

(VI.) Die Summe ſämtlicher Verbindungen von jeder Art, deren eine Zahl fähig iſt, zu berechnen. §. 367.

1) Seßet und multipliciret die Zahl 2 ſo vielmal in ſich ſelbſt, als die gegebne Zahl Einheiten enthält. 2) Ziehet von dem Product die gegebne Zahl + 1 ab. Z. E. wenn die gegebne Zahl = 10, ſo iſt

$2^{10} = 1024$

$11 = 10 + 1$

1013 gefundne Summe. Wenn man die im vorhergehenden §. berechneten Verbindungen der Zahl 10, als 1 Denion, 10 Novenionen, u. ſ. w. nemlich 1. 10. 45. 120. 210. 252. 210. 120 und 45 ſummiret, ſo kömmt gleiches Facit.

§. 368.

Wenn man nach der im §. 366. gelehrten Art, die in den Zahlen 2. 3. 4. 5. 6 und 7. enthaltenen binariſchen, ternariſchen, und quaternariſchen Verbindungen ꝛc. nach einander entwickelt, als:

2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6
2	6	12	20	30	42
2) 1 Binion.	2) 3 Binionen.	2) 6 Binionen.	2) 10 Binionen.	2) 15 Binionen.	2) 21 Binionen.
	1	2	3	4	5
	3) 1 Ternion.	3) 12 Ternionen.	3) 30 Ternionen.	3) 60 Ternionen.	3) 105 Ternionen.
		1	2	3	4
		4) 1 Quaternion.	4) 20 Quaternionen.	4) 60 Quaternionen.	4) 140 Quaternionen.
			1	2	3
			5) 1 Quinion.	5) 6 Quinionen.	5) 21 Quinionen.
				1	2
				6) 1 Sexion.	6) 7 Sexionen.
					1
					7) 1 Septenion.

So findet man, 1) daß zwey Dinge nicht mehr als einmal; drey nicht mehr als dreymal; vier nicht mehr als sechsmal u. s. w. binarisch unter sich verbunden werden können;

2) Daß drey Dinge nicht mehr als einmal; vier nicht mehr als viermal, fünf nicht mehr als zehnmal, u. s. w. ternarisch unter sich verbunden werden können;

3) daß vier Dinge nicht mehr als einmal; fünf nicht mehr als fünfmal; sechs nicht mehr als funfzehnmal u. s. w. quaternarisch unter sich verbunden werden können; u. s. w. Ferner

4) daß in den Zahlen 2. 3. 4. 5. 6 und 7 die **Binionen** 1. 3. 6. 10. 15 und 21 enthalten, und die natürlichen Zahlen 2. 3. 4. 5 und 6 die ersten Differenzen dieser Binionen sind, indem $3-1=2$, $6-3=3$, $10-4=4$, $15-10=5$ u. s. w.

5) Daß in den Zahlen 3. 4. 5. 6 und 7 die **Ternionen** 1. 4. 10. 20. und 35 enthalten, und die vorhergehenden Binionen 3. 6. 10. 15 ꝛc. die ersten Differenzen dieser Ternionen sind, indem $4-1=3$, $10-4=6$, $20-10=10$, $35-20=15$, u. s. w.

6) Daß in den Zahlen 4. 5. 6 und 7 die **Quaternionen** 1. 5. 15 und 35 enthalten, und die vorhergehenden Ternionen 4. 10. 20 ꝛc. die ersten Differenzen dieser Quaternionen sind, indem $5-1=4$, $15-5=10$, $35-15=20$, u. s. w.

§. 369.

Wenn nun, nach dem vorhergehenden, die ersten Differenzen der Quaternionen die Ternionen sind: so müssen nothwendig die Binionen die zweyten Differenzen und die natürlichen Zahlen die dritten Differenzen derselben seyn. Wenn ferner die ersten Differenzen der Ternionen die Binionen sind: so müssen nothwendig die natürlichen Zahlen ihre zweyte Differenzen seyn; und wenn endlich die natürlichen Zahlen 1. 2. 3. 4 ꝛc. die simpeln Einheiten zu ihren Differenzen haben: so siehet man aus allem diesen, daß sowohl

sowohl die binarischen, als ternarischen und quaternarischen ꝛc. Zahlen, oder schlechtweg die combinatorischen Zahlen eine zusammengesetzte arithmetische Progreßion in ihrer Folge hintereinander formiren; und diese Entdeckung giebet uns ein Mittel an die Hand, die combinatorischen Zahlen auf eine sehr bequeme Art zu finden, um solche in Tabellen zu stellen. Dieses Mittel ist die simple Addition. Z. E. um die fünf ersten Binionen 15. 10. 6. .. 1 zu erhalten, brauchen wir nur die fünf ersten natürlichen Zahlen von 5 bis 1, von 4 bis 1, von 3 bis 1, u. s. w. zu summiren. Ferner um die fünf ersten Ternionen zu erhalten, brauchen wir nur die fünf ersten Binionen, hernach die vier ersten, alsdenn die drey ersten u. s. w. zu summiren; und um die fünf ersten Quaternionen zu erhalten, brauchen wir nur die fünf ersten Ternionen, hernach die vier ersten, alsdenn die drey ersten, u. s. w. zu summiren, als:

α) Um die 5 ersten Binionen zu erhalten.

$$\begin{array}{rrrrrr} 5 & + 4 & + 3 & + 2 & + 1 & = 15 \\ & 4 & + 3 & + 2 & + 1 & = 10 \\ & & 3 & + 2 & + 1 & = 6 \\ & & & 2 & + 1 & = 3 \\ & & & & 1 & = 1 \end{array}$$

β) Um die 5 ersten Ternionen zu erhalten.

$$\begin{array}{rrrrrr} 15 & + 10 & + 6 & + 3 & + 1 & = 35 \\ & 10 & + 6 & + 3 & + 1 & = 20 \\ & & 6 & + 3 & + 1 & = 10 \\ & & & 3 & + 1 & = 4 \\ & & & & 1 & = 1 \end{array}$$

γ) Um die 5 ersten Quaternionen zu erhalten.

$$\begin{array}{rrrrrr} 35 & + 20 & + 10 & + 4 & + 1 & = 70 \\ & 20 & + 10 & + 4 & + 1 & = 35 \\ & & 10 & + 4 & + 1 & = 15 \\ & & & 4 & + 1 & = 5 \\ & & & & 1 & = 1 \end{array}$$

Oder auf eine bequemere Art, vermittelst welcher man von den niedrigsten Zahlen anfänget, und die folgenden größern nach und nach dazu addiret, als:

$$
\begin{array}{llll}
1 = 1 & & & \\
1 + 2 = 3 & & & \\
1 + 2 + 3 = 6 & & & \\
1 + 2 + 3 + 4 = 10 & & & \\
1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 & & & \\
1 = 1 & & & \\
1 + 4 = 5 & & & \\
1 + 4 + 10 = 15 & & & \\
1 + 4 + 10 + 20 = 35 & & & \\
1 + 4 + 10 + 20 + 35 = 70 & \text{u. s. w.} & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
1 = 1 & & & \\
1 + 3 = 4 & & & \\
1 + 3 + 6 = 10 & & & \\
1 + 3 + 6 + 10 = 20 & & & \\
1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35 & & &
\end{array}
$$

§. 370.

Nach vorhergehender Anleitung entwerfen wir folgende Progreßionstabelle FF.

Progreßionstabelle FF welche die Trigonalzahlen enthält.

Diuer-ſa.	Binio-nes.	Ternio-nes.	Quater-niones.	Quinio-nes.	Senio-nes.	Septe-niones.	Octonio-nes.	Nona-niones	De-niones	Unde-niones	Duode-niones.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3		
4	6	4	4	4	4	4	4	4			
5	10	10	5	5	5	5	5				
6	15	20	15	6	6	6					
7	21	35	35	21	7						
8	28	56	70	56	28	8					
9	36	84	126	126	84	36	9				
10	45	120	210	252	210	120	45	10			
11	55	165	330	462	462	330	165	55	11		
12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

In

In der vorhergehenden Tabelle FF enthält die allererſte von oben nach unten gehende Columne die Anzahl der zu combinirenden Dinge in den natürlichen Zahlen 1. 2. 3. 4. 5 u. ſ. w; die zweyte Parallelcolumne enthält die Binionen 1. 3. 6. 10. 15, u. ſ. w. und alſo die Anzahl der binariſchen Verbindungen, deren jede daneben ſtehende Zahl aus der vorigen erſten Columne fähig iſt; die dritte Parallelcolumne enthält die Ternionen 1. 4. 10. 20. 35, u. ſ. w. und alſo die Anzahl der ternariſchen Verbindungen, deren jede daneben ſtehende Zah aus der allererſten Columne fähig iſt, u. ſ. w. Wenn man alſo wiſſen will, 1) wie vielmal z. E. die Zahl 9 aus der allererſten Columne binariſch verbunden werden könne, ſo findet man, daß ſolches auf ſechs und dreiſsigerley Art möglich iſt; 2) wie vielmal ſolche ternariſch verbunden werden könne, ſo findet man, daß ſolches auf vier und achtzigerley Art möglich iſt, u. ſ. w. So wenig hernach eine Einheit binariſch verbunden werden kann, ſo wenig können zwey Dinge ternariſch, oder drey Dinge quaternariſch, oder vier Dinge quinariſch verändert werden, u. ſ. w.

§. 371.

Ich füge annoch eine nach obiger Anleitung entworfne Progreſsionstabelle GG hinzu.

Progreſsionstabelle GG.

Radices.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Binones	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Ternion.	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
Quatern.	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715
Quinion.	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002
Seniones.	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005
Septen.	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440
Octonion.	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310
Nouen.	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620
Deniones.	1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378

und ſo weiter.

In der vorhergehenden Tabelle GG, die nach Belieben weiter fortgeführet werden kann, gehen die Columnen von der Linken gegen die Rechte, und es enthält die erſte Columne die natürlichen Zahlen 1. 2. 3. 4. 5 u. ſ. w. die zweyte Columne enthält die Binionen 1. 3. 6. 10. u. ſ. w. Wozu uns dieſe Tabelle hauptſächlich dienet, wird man in der Folge ſehen. Wir wollen hier bloß bemerken, daß die combinatoriſchen Zahlen dieſer Art mit den ſimpeln Trigonal- und den davon abſtammenden ſimpeln dreyeckigten Pyramidalzahlen, oder kürzer mit den Trigonalpotenzen einerley ſind. Nemlich

1) Die binariſchen Zahlen 1. 3. 6. 10. 15 ſind mit den ſimpeln Trigonalzahlen, oder zweyten Trigonalpotenzen einerley.

2) Die ternariſchen Zahlen 1. 4. 10. 20 ꝛc. ſind mit den ſimpeln dreyeckigten Pyramidalen erſter Größe, oder kürzer mit den dritten Trigonalpotenzen einerley.

3) Die quaternariſchen Zahlen 1. 5. 15. 35 ꝛc. ſind mit den ſimpeln dreyeckigten Pyramidalen zweyter Größe, oder kürzer mit den vierten Trigonalpotenzen einerley.

4) Die quinariſchen Zahlen 1. 6. 21. 56 ꝛc. ſind mit den ſimpeln dreyeckigten Pyramidalen dritter Größe, oder kürzer mit den fünften Trigonalpotenzen einerley; und ſo weiter.

Wie nun in der Lehre vom figürlichen Calcul jede Anzahl der ſummirten Glieder einer arithmetiſchen Progreßionalzahl die Laterale oder Wurzel dieſer Progreßionale iſt: ſo geſchicht ſolches auch in dem combinatoriſchen Calcul, und dieſem zu Folge iſt z. E. die Zahl 4 die Laterale der binariſchen Zahl 10, indem ſolche durch die Summirung der vier Zahlen 1. 2. 3. 4 entſtanden. So iſt ferner die Zahl 4 die Laterale der ternariſchen Zahl 20, indem ſolche durch die Summirung der vier binariſchen Zahlen 1. 3. 6. 10 entſtanden. So iſt ferner die Zahl 4 die

Late-

Laterale der quaternarischen Zahl 35, indem solche durch die Summirung der vier ternarischen 1. 4. 10. 20 entstanden u. s. w. Alles dieses lässet sich nun auf einen Blick aus der vorhergehenden Tabelle GG ersehen.

§. 372.

Wenn man die Verbindungen einer Zahl, entweder binarisch, oder ternarisch, oder quaternarisch, u. s. w. ihrer Ordnung nach auseinander setzet, so nennet man dieses eine Zahl decomponiren oder zergliedern. Um bey diesem Geschäft von der Richtigkeit der Operationen versichert zu seyn, kömmt es darauf an,

1) daß man niemals eine Zahl decomponire, ohne vorher nach einer der obigen Regeln untersuchet zu haben, wie viele Verbindungen von der verlangten Art in ihr enthalten sind. Z. E. wenn die Zahl 10 quaternarisch decomponiret werden soll, so heißet es

$$\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{5040}{24} = 210.$$

2) daß man vor jeder höhern Verbindungsart alle vorhergehende niedrigere voranschicke, und also z. E. die vorige Zahl 10 nicht eher in ihre 210 Quaternionen zerfälle, ehe man die 120 Ternionen derselben decomponiret habe; und daß man sie nicht eher in diese 120 Ternionen zerfälle, ehe man die darinnen enthaltnen 45 Binionen zu Papier gebracht; und also wird der Anfang einer Decomposition überall mit den Binionen gemacht; von diesen gehet man zu den Ternionen, von diesen zu den Quaternionen fort, u. s. w. und die Anzahl aller dieser Binionen, Ternionen, und so weiter, muß allezeit, nach dem was bey 1) gesaget ist, zuvor entwickelt werden.

3) daß man zu der Anzahl der gefundnen Binionen, Ternionen, Quaternionen u. s. w. die Lateralen und Zwischenlateralen suche. Dieses kann nun entweder nach Anleitung der vorhin dargelegten Tabelle GG, oder

oder nach Regeln geschehen, im Falle die Tabelle nicht ausgedehnet genug ist. Z. E. es soll die Zahl 10 binarisch zergliedert werden. α) Berechnet die in der Zahl 10 enthaltnen Binionen; sind 45. β) Suchet in der Tabelle GG, in der Columne der Binionen, die Zahl 45, und merket die perpendikulär über selbiger, in der Columne der Wurzeln, befindliche Zahl 9. Diese Zahl 9 ist die Laterale der binarischen Zahl 45, und folglich der gegebnen Zahl 10, in sofern diese Zahl binarisch zergliedert werden soll. γ) Bemerket alle vor der gefundnen Laterale 9 vorhergehende kleinere Lateralen, von 9 bis 1 zurück, und also die Zahlen 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1, aus deren Summirung die binarische Zahl 45 entstanden.

Anmerkung.

Zwischen den binarischen Zahlen und ihren Lateralen finden sich keine Zwischenlateralen.

Ferner. Es soll die Zahl 10 ternarisch zergliedert werden. α) Berechnet die in der Zahl 10 enthaltenen Ternionen, sind 120. β) Suchet in der Tabelle GG, in der Columne der Ternionen die Zahl 120, und merket die perpendikulär über selbiger, in der Columne der Wurzeln, befindliche Zahl 8. Diese Zahl 8 ist die Laterale der ternarischen Zahl 120, und folglich der gegebnen Zahl 10, in sofern solche ternarisch zergliedert werden soll. γ) Bemerket die zwischen der Laterale 8 und der ternarischen Zahl 120, in der Columne der Binionen, befindliche Zahl 36. Diese 36 ist die Zwischenlaterale der ternarischen Zahl 120, und folglich der gegebnen Zahl 10, in sofern solche ternarisch zergliedert werden soll. δ) Zeichnet alle vor der Zahl 8 und vor der Zahl 36 vorhergehende kleinere Laterale und Zwischenlaterale auf, als 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1, aus deren Summirung die Zwischenlaterale 36 entstanden, und ferner 36. 28. 21. 15. 10. 6. 3. 1, aus deren Summirung die ternarische Zahl 120 entstanden.

Fer-

Ferner. Es ſoll die Zahl 10 quaternariſch zergliedert werden. α) Berechnet die in der Zahl 10 enthaltnen Quaternionen; kommen 210. β) Suchet in der Tabelle GG, in der Columne der Quaternionen die Zahl 210, und merket die perpendikulär über ſelbiger, in der Columne der Wurzeln, befindliche Zahl 7. Dieſe Zahl 7 iſt die Laterale der quaternariſchen Zahl 210, und folglich der gegebnen Zahl 10, in ſofern ſolche quaternariſch zergliedert werden ſoll. γ) Bemerket die zwiſchen der Laterale 7 und der quaternariſchen Zahl 210, in der Columne der Binionen befindliche Zahl 28, und die in der Columne der Ternionen befindliche Zahl 84. Dieſe Zahlen 28 und 84 ſind die Zwiſchenlateralen der quaternariſchen Zahl 210, und folglich der gegebnen Zahl 10, in ſofern ſolche quaternariſch zergliedert werden ſoll. δ) Zeichnet alle vor der Laterale 7, und vor den Zwiſchenlateralen 28 und 84 vorhergehenden kleinern Laterale und Zwiſchenlaterale auf, als 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1, aus deren Summirung die Zwiſchenlaterale 28 entſtanden; und 28. 21. 15. 10. 6. 3. 1, aus deren Summirung die Zwiſchenlaterale 84 entſtanden; und 84. 56. 35. 20. 10. 4. 1, aus deren Summirung die quaternariſche Zahl 210 entſtanden, u. ſ. w.

§. 373.

Es iſt vorhin geſaget worden, daß, wenn man die Laterale einer gegebnen Zahl nicht in den Tabellen findet, man ſie durch Regeln ausmitteln müſſe. Dieſes geſchicht allhier auf folgende Art. — Es iſt aus dem vorhergehenden bekannt, daß die Laterale der binariſch zu zergliedernden Zahl 10 die Zahl 9 iſt; daß die Laterale der ternariſch zu zergliedernden Zahl 10 die Zahl 8 iſt, und daß ſolche allezeit um eine Einheit kleiner wird, nach dem Maaße als die Art der Verbindung oder die Quotenität größer wird; denn wenn die Zahl 10 quaternariſch zergliedert werden ſoll, ſo iſt ihre Laterale = 7, und wenn die Zahl 10 quinariſch zergliedert werden ſoll, ſo iſt ihre Laterale = 6, und ſo weiter. Die Laterale iſt alſo allezeit relativiſch,

und anders, wenn eine gegebne Zahl binarisch, als wenn sie ternarisch u. s. w. zergliedert werden soll. Wir können sie also, nach allen diesen, überhaupt und besonders von ihr entdeckten, Eigenschaften als eine Zahl beschreiben, welche der nach einer verlangten Verbindungsart zu zergliedernden Zahl gleich ist, weniger die Zahl der vorhergehenden niedrigern Verbindungsart, und welche also gefunden wird, wenn man von jener auf verlangte Art zu zergliedernden Zahl die Zahl der vorhergehenden Verbindungsart abziehet. Z. E. es soll die Zahl 9 quinarisch zergliedert werden. Wenn nun die quaternarische Verbindung vor der quinarischen vorhergehet: so ziehen wir die Zahl 4, als die Zahl der quaternarischen Verbindung von der gegebnen Zahl 9 ab; bleibt die Zahl 5 für die Laterale der quinarisch zu zergliedernden Zahl 9 übrig. (Wenn man die in der Zahl 9 enthaltnen 126 Quinionen in der Tabelle GG suchet, so wird man, gerade über der quinarischen Zahl 126, die Zahl 5 in der Columne der Wurzeln, finden.) Es soll ferner die Zahl 9 quaternarisch zergliedert werden. Da die ternarische Verbindung vor der quaternarischen vorhergehet: so ziehen wir die Zahl 3, als die Zahl der ternarischen Verbindung, von der gegebnen Zahl 9 ab, bleibt die Zahl 6 für die Laterale der quaternarisch zu zergliedernden Zahl 9 übrig. (Wenn wir die in der Zahl 9 enthaltnen 126 Quaternionen in der Tabelle GG suchen, so wird man, gerade über der quaternarischen Zahl 126, die Zahl 6 in der Columne der Wurzeln finden.) u. s. w.

Auf solche Art ist denn nun 1) die Laterale einer binarisch zu verbindenden Zahl um 1 geringer, als die Zahl der Aufgabe. Z. E. wenn die Zahl der Aufgabe = 90, so ist die Laterale = 89. 2) Die Laterale einer ternarisch zu verbindenden Zahl ist um 2 geringer, als die Zahl der Aufgabe; z. E. wenn die Zahl der Aufgabe = 90, so ist die Laterale = 88. 3) Die Laterale einer quaternarisch zu verbindenden Zahl ist um 3 geringer, als die Zahl der Aufgabe; z. E. wenn die Zahl der Aufgabe = 90, so ist

die

die Laterale = 87. 4) Die Laterale einer quinarisch zu verbindenden Zahl ist um 4 geringer, als die Zahl der Aufgabe; z. E. wenn die Zahl der Aufgabe = 90: so ist die Laterale = 86. 5) Die Laterale einer senarisch zu verbindenden Zahl ist um 5 geringer, als die Zahl der Aufgabe. Z. E. wenn die Zahl der Aufgabe = 90, so ist die Laterale = 85, und so weiter.

Anmerkung.

α) Jede Laterale einer binarisch zu zerfällenden Zahl ist = der Wurzel einer zweyten Trigonalpotenz, deren Größe = der Anzahl der in der zu zerfällenden Zahl enthaltnen Binionen. Z. E. es sey die Zahl 7 in Binionen zu zerfällen. Die Laterale der 7 ist = 6, nach demjenigen was sogleich gelehret worden, und in der Zahl 7 sind 21 Binionen enthalten. Wenn nun die binarische Zahl 21, nach dem figürlichen Calcul betrachtet, eine zweyte Trigonalpotenz ist, deren Wurzel = 6, indem sie aus den sechs einzelnen Zahlen 6+5+4+3+2+1 entstanden: so ist die Laterale 6 der in 21 Binionen zu zerfällenden Zahl 7 = der Wurzel 6 der zweyten Trigonalpotenz 21.

β) Jede Laterale einer ternarisch zu zerfällenden Zahl ist = der Wurzel einer dritten Trigonalpotenz, deren Größe = der Anzahl der in der zu zerfällenden Zahl enthaltenen Ternionen. Z. E. es sey die Zahl 7 in Ternionen zu zerfällen. Die Laterale der 7 ist allhier = 6, und in der Zahl 7 sind 35 Ternionen enthalten. Wenn nun die ternarische Zahl 35, nach dem figürlichen Calcul betrachtet, eine dritte Trigonalpotenz ist, deren Wurzel = 5, indem sie aus den fünf zweyten Trigonalpotenzen 15+10+6+3+1, (deren Elemente wiederum die natürlichen Zahlen 5+4+3+2+1 sind,) entstanden: so ist die Laterale 5 der in 35 Ternionen zu zertheilenden Zahl 7 = der Wurzel 5 der dritten Trigonalpotenz 35, und so weiter.

§. 374.

Wir wissen nunmehr die Laterale einer gegebnen Zahl zu berechnen, wenn wir sie nicht in unserer Tabelle finden: Wie werden die Zwischenlateralen gefunden? Auf eben die Art, als man, durch eine beständige Addition von 1 an, die Binionen findet; als man, durch eine beständige

Addition

Addition der Binionen von 1 an, die Ternionen findet; als man, durch eine beſtändige Addition der Ternionen von 1 an, die Quaternionen findet, u ſ. w. Dieſer Proceß iſt nicht allein in der Lehre vom figürlichen Calcul, in welchem die combinatoriſchen Zahlen als Trigonal- und trigonal-Pyramidalzahlen, oder kürzer als Trigonalpotenzen vorkommen, gezeiget, ſondern annoch im 369 §. wiederholet worden. Ich will indeſſen, da die Trigonalpotenzen allhier unter dem Nahmen von Zwiſchenlateralen erſcheinen, die Sache durch ein neues zweckmäßiges Exempel erläutern.

Es ſoll die Zahl 12 binariſch, ternariſch, quaternariſch und quinariſch zerfället werden. Ihre Lateralen und Zwiſchenlateralen zu finden. §. 375.

1) Für die binariſche Zerfällung.

Da die Laterale einer binariſch zu verbindenden Zahl um 1 geringer iſt, als die Zahl der Aufgabe, und dieſe leztere allhier 12 iſt: ſo iſt die Laterale = 11; und da alle vor der gefundnen Laterale vorhergehenden kleinern Zahlen, bis auf 1 zurück angemerket werden müſſen: ſo haben wir zur binariſchen Zerfällung der Zahl 12 folgende eilf Zahlen nöthig.

11. 10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1.

Wir begreiffen alle dieſe Zahlen unter der Benennung von Lateralen der binariſch zu verbindenden Zahl 12. Daß bey der binariſchen Decompoſition keine Zwiſchenlateralen ſtatt finden, iſt bereits oben geſaget worden. Uebrigens iſt die Summe dieſer Lateralen = 66, welches die Anzahl der in 12 enthaltnen Binionen iſt.

2) Für die ternariſche Zerfällung.

Da die Laterale einer ternariſch zu verbindenden Zahl um 2 geringer iſt, als die Zahl der Aufgabe, und dieſe leztere allhier 12 iſt: ſo iſt die Laterale = 10; und ſämtliche Lateralen ſind alſo 10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1. So

So viele Lateralen gefunden worden, ſo viele Zwiſchenlateralen werden auch erfordert, und alſo 10. Dieſe zu finden, ſummiret erſtlich alle zehn Laterale von 10 bis 1; ſummiret hernach die neun Lateralen von 9 bis 1; hernach die acht Lateralen von 8 bis 1, und ſo weiter zurück; kommen die zehn Zwiſchenlateralen

55. 45. 36. 28. 21. 15. 10. 6. 3. 1.

Da die gefundnen Zwiſchenlateralen nichts anders als binariſche Zahlen ſind, und zwiſchen der binariſchen und ternariſchen Verbindung keine andere Verbindung möglich iſt, ſo haben wir keine andere Arten von Zwiſchenlateralen als die gefundnen, zur ternariſchen Decompoſition der Zahl 12 vonnöthen. Uebrigens iſt die Summe dieſer Zwiſchenlateralen = 220, welches die Anzahl der in 12 enthaltnen Ternionen iſt.

3) Für die quaternariſche Zerfällung.

Die Laterale einer quaternariſch zu verbindenden Zahl iſt um 3 geringer, als die Zahl der Aufgabe, und iſt alſo = 9 für die gegebne Zahl 12. Sämtliche Lateralen ſind alſo

9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1.

So viele Lateralen gefunden worden, ſo viele Zwiſchenlateralen müſſen auch gefunden werden, und da zwiſchen den Lateralen und den quaternariſchen Zahlen zweyerley Arten von Zahlen ſtatt finden, binariſche und ternariſche: ſo haben wir zweyerley Arten von Zwiſchenlateralen nöthig. Die erſten finden wir, wenn erſtlich alle neun Laterale von 9 bis 1; hernach die acht Lateralen von 8 bis 1, alsdenn die ſieben Lateralen von 7 bis 1 zurück, u. ſ. w. ſummiret werden; und ſolche ſind:

45. 36. 28. 21. 15. 10. 6. 3. 1.

Die andern Zwiſchenlateralen werden aus einer ähnlichen Addition der vorhergehenden erſten gefunden, und ſind

165. 120. 84. 56. 35. 20. 10. 4. 1.

(Die Summe dieſer lezten Zwiſchenlateralen iſt = 495, welches die Anzahl der in 12 enthaltnen Quaternionen iſt.)

4) Für die quinariſche Zerfällung.

Die Laterale einer quinariſch zu verbindenden Zahl iſt um 4 geringer, als die Zahl der Aufgabe, und iſt alſo = 8 für die gegebne Zahl 12. Sämtliche Lateralen ſind alſo

8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1.

So viele Lateralen gefunden worden, ſo viele Zwiſchenlateralen müſſen auch gefunden werden; und da zwiſchen den Lateralen und den quinariſchen Zahlen dreyerley Arten von Zahlen vorhanden ſind, binariſche, ternariſche und quaternariſche: ſo haben wir **dreyerley Arten von Zwiſchenlateralen** nöthig. Die erſten finden wir durch die bekannte Summirung der gefundnen Lateralen, und ſolche ſind

36. 28. 21. 15. 10. 6. 3. 1.

Die **zweyten** Zwiſchenlateralen werden aus den eben gefundnen erſten durch eine ähnliche Addition hervorgebracht, und ſind 120. 84. 56. 35. 20. 10. 4. 1.

und die **dritten** Zwiſchenlateralen werden aus den vorhergehenden zweyten auf ähnliche Art entwickelt, und ſind

330. 210. 126. 70. 35. 15. 5. 1.

(Die Summe dieſer lezten Zwiſchenlateralen iſt = 792, und giebet die Anzahl der in 12 enthaltenen Quinionen.)

Anmerkung.

Die Zwiſchenlateralen können auch wie die Trigonalpotenzen gefunden werden. Z. E. wenn die Lateralen = 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1, ſo iſt:

8	7	6	5	4	3	2	1
9	8	7	6	5	4	3	2
2) 72/36	2) 56/28	2) 42/21	2) 30/15	2) 20/10	2) 12/6	2) 6/3	2) 2/1
10	9	8	7	6	5	4	3
3) 360/120	3) 252/84	3) 168/56	3) 105/35	3) 60/20	3) 30/10	3) 12/4	3) 3/1
11	10	9	8	7	6	5	4
120	840/210	504/126	280/70	140/35	60/15	20/5	4/1
120	4)	4)	4)	4)	4)	4)	
4) 1320/330							

§. 376.

§. 376.

Vorhergehende Anleitung kann mit leichter Mühe auf gröſsere Zahlen und höhere Verbindungen angewendet werden. Wir wollen nunmehr zur wirklichen Zergliederung schreiten, und, um solche durch alle Quotenitäten vornehmen zu können, ohne dadurch weitläuftig zu werden, und weil die Ordnung des Processes in grossen und kleinen Zahlen einerley ist, ausser daß die erstern mehr Arbeit und Papier erfordern, nur eine kleine Zahl erwählen.

(I.) Die Zahl 8 in den acht Gröſsen a b c d e f g h binarisch zu zergliedern. §. 377.

1) Machet, nach dem bisher gegebnen Unterricht, die nöthigen Vorbereitungen zur binarischen Zergliederung. 2) Setzet darauf die erste Gröſse a mit jeder der sieben folgenden nach und nach zusammen; die zweyte Gröſse b mit jeder der sechs folgenden; die dritte Gröſse c mit jeder der fünf folgenden, u. s. w. 3) Summiret die specialen binarischen Verbindungen jeder zum Grunde liegenden Gröſse, und sammelt solche zuletzt in eine Generalsumme, als:

$\frac{8 \times 7}{1 \times 2} = \frac{56}{2} = 28$ Binionen in der Zahl 8.

8 — 1 = 7 Laterale der binarisch zu zergliedernden Zahl 8. Also 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1.

Zum Grunde liegende Gröſsen.	Verbunden nach und nach mit		
a	bcdefgh,	das ist ab ac ad ae af ag ah	7
b	cdefgh	bc bd be bf bg bh	6
c	defgh	cd ce cf cg ch	5
d	efgh	de df dg dh	4
e	fgh	ef eg eh	3
f	gh	fg fh	2
g	h	gh	1
			28

Binionen in 8.

Aus vorhergehender binarischen Zergliederung der Zahl 8 siehet man,

Daß eine jede zum Grunde liegende einzelne Größe so viele Binionen gegeben hat, als mit selbiger nach und nach einzelne Größen verbunden worden. Also sind z. E. mit der Größe a die sieben Größen bcdefgh nach und nach verbunden worden, und so viele Binionen hat die Größe a gegeben. — Mit der Größe b sind die sechs Größen cdefgh nach und nach verbunden worden, und so viele Binionen hat die Größe b gegeben, u. s. w.

Es liegen aber bey jeder binarischen Zergliederung einer Zahl so viele einzelne Größen zum Grunde, als in der höchsten Laterale, allhier 7, Einheiten enthalten sind. Da wir nun die Zergliederung der Zahl 8 in den gegebnen Größen abcdefgh, von der allererſten Größe a, und nicht von h, anfangen: so können diese sieben einzelne Größen keine andern als die folgenden abcdefg allhier seyn. Von diesen 7 Größen giebet nun, nach vorhergehender Berechnung, die erste a sieben Binionen; b sechs; c fünf; d vier u. s. w. so wie solches durch die Lateralen 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 angezeiget worden. Die Summe dieser Lateralen ist 28, und solche ist gleich der Anzahl der in der Zahl 8 enthaltnen Binionen. Die Zergliederung der Zahl 8 ist also nicht allein der Quantität, sondern auch der Qualität nach richtig, indem 1) nicht mehr oder weniger als 28 Binionen hervorgekommen, und 2) keine einzige doppelt gesetzet, und eine andere dagegen ausgelassen worden.

(II.) Die Zahl 8 in den acht Größen abcdefgh ternarisch zu zergliedern. §. 378.

1) Machet nach dem oben gegebnen Unterricht die nöthigen Vorbereitungen zur ternarischen Zergliederung. 2) So wie bey der kurz vorhergehenden binarischen Zergliederung der Zahl 8, wo die höchste Laterale = 7 war, die sieben ersten einzelnen Größen zum Grunde der Verbindung geleget worden, so leget allhier, wo die Laterale = 6 seyn wird, fürs erste die aus a entstandnen sechs ersten Binionen

nen, hernach die aus b entstandenen fünf ersten Binionen, alsdenn die aus c entstandnen vier ersten Binionen, u. s. w. zum Grunde der zu findenden Ternionen. 3) Summiret die aus jeder Binion entstandnen Ternionen, und ziehet bey jeder sich mit der Summe 1 endigenden Abtheilung eine Generalsumme solcher Abtheilung, als:

$\frac{8\times7\times6}{1\times2\times3} = \frac{336}{6} = 56$ Ternionen in 8.

8 — 2 = 6 Laterale der ternarisch zu zergliedernden Zahl 8. Also 6. 5. 4. 3. 2. 1.

Folglich sind die Zwischenlateralen die Binionen 21. 15. 10. 6. 3. 1.

1) Abtheilung a.

Zum Grunde liegende Binionen.	Verbunden nach und nach mit			
ab	*cdefgh*	das ist	abc abd abe abf abg abh	6
ac	*defgh*		acd ace acf acg ach	5
ad	*efgh*		ade adf adg adh	4
ae	*fgh*		aef aeg aeh	3
af	*gh*		afg afh	2
ag	*h*		agh	1
				21

Ternionen aus a.

2) Abtheilung b.

bc	*defgh*	das ist	bcd bce bcf bcg bch	5
bd	*efgh*		bde bdf bdg bdh	4
be	*fgh*		bef beg beh	3
bf	*gh*		bfg bfh	2
bg	*h*		bgh	1
				15 Ternionen

aus b.

3) Abtheilung c.

Zum Grunde liegende Binionen.	Verbunden nach und nach mit		
cd	efgh	das iſt cde cdf cdg cdh	4
ce	fgh	cef ceg ceh	3
cf	gh	cfg cfh	2
cg	h	cgh	1

10 Ternionen aus c.

4) Abtheilung d.

de	fgh	das iſt def deg deh	3
df	gh	dfg dfh	2
dg	h	dgh	1

6 Ternionen aus d.

5) Abtheilung e.

ef	gh	das iſt — efg efh	2
eg	h	egh	1

3 Ternionen aus e.

6) Abtheilung f.

fg	h	das iſt — fgh	1 Ternion aus f.

Widerholung.

21	Ternionen	aus a	6+5+4+3+2+1=21
15	"	aus b	5+4+3+2+1=15
10	"	aus c	4+3+2+1=10
6	"	aus d	3+2+1= 6
3	"	aus e	2+1= 3
1	"	aus f	1= 1
56	Ternionen, welche in den ache Größen abcdefgh enthalten ſind.		Summe 56

Aus

§. 379.

Aus vorhergehender ternariſchen Zergliederung der Zahl 8 ſiehet man,

1) **daß eine jede zum Grunde liegende Binion ſo viele Ternionen gegeben hat, als mit ſelbiger nach und nach einzelne Gröſsen verbunden worden.** Z. E. mit der Binion a b ſind die ſechs einzelnen Gröſsen c d e f g h nach und nach verbunden worden, und ſo viele Ternionen hat die Binion a b gegeben. — Mit der Binion a c ſind die fünf einzelnen Gröſsen d e f g h verbunden worden, und ſo viele Ternionen hat die Binion a c gegeben, u. ſ. w.

Es liegen aber bey jeder ternariſchen Zergliederung einer Zahl ſo viele Binionen zum Grunde, als in der höchſten Zahl der Zwiſchenlateralen, allhier 21. 15. 10. 6. 3. 1, und folglich in 21, Einheiten enthalten ſind. Da zur Hervorbringung von 21 Binionen ſieben Gröſsen erfordert werden, und wir die Zergliederung der acht Gröſsen a b c d e f g h von der allererſten Gröſse a anfangen: ſo müſſen die zum Grunde liegenden 21 Binionen aus den ſieben erſten Gröſsen a b c d e f g formiret werden, wie allhier geſchehen. Von dieſen 21 Binionen giebet, nach vorhergehender Vorſtellung, die allererſte Binion a b 6 Ternionen; die zweyte a c 5; die dritte a d 4; die vierte a e 3, u. ſ. w. ſo wie ſolches durch die Lateralen 6. 5. 4. 3. 2. 1, und deren verſchiedne Wiederholungen, in der Zergliederung angezeiget worden iſt. Die Summe ſämmtlicher Producte aus den 21 Binionen, iſt = 56, welches die Anzahl der in der Zahl 8 enthaltnen Ternionen iſt.

2) **Daß eine jede zum Grunde liegende einzelne Gröſse ſo viele Ternionen gegeben hat, als in den damit zu verbindenden Gröſsen Binionen enthalten ſind.** Z. E. mit der Gröſse a ſind die ſieben Gröſsen b c d e f g h zu verbinden. In der Zahl 7 ſind 21 Binionen enthalten, und ſo viele Ternionen hat die Gröſse a gegeben. — Mit der Gröſse b ſind

die sechs Größen c d e f g h zu verbinden. In der Zahl 6 sind 15 Binionen enthalten, und so viele Ternionen hat die Größe b gegeben, u. s. w.

Es liegen aber bey jeder ternarischen Zergliederung einer Zahl so viele einzelne Größen zum Grunde, als Einheiten in der höchsten Zahl der Laterale, allhier 6. 5. 4. 3. 2. 1, und folglich in 6 enthalten sind. Diese 6 einzelne Größen sind allhier a. b. c. d. e. und f, und von selbigen giebet, nach voriger Berechnung, die erste Größe a 21 Ternionen; die zweyte b 15; die dritte c 10, u. s. w. Die Zahlen 21. 15. 10. 6. 3. 1 sind die Zwischenlaterale der gegebnen Zahl 8, und die Summe derselben 56 ist gleich der Anzahl der in der Zahl 8 enthaltnen Ternionen.

Anmerkung.

Ich schalte allhier eine Aufgabe ein, deren Auflösung in Ansehung der Terminologie etwas von der Erklärung der ternarischen Zergliederung der Zahl 8 unterschieden ist, indem die unter der Benennung von Zwischenlaterale bey der vorigen Zahl 8 vorkommenden Zahlen, bey der folgenden Zahl 90 unter der Benennung von Trigonalpotenzen erscheinen. Da aber beyderley Arten der Terminologie gebräuchlich sind, so wird es nicht undienlich seyn, sich sowohl mit der einen als der andern bekannt zu machen, und dieses ist die Ursache, warum ich allhier einen andern Ausdruck angenommen habe.

Die Zahl 90 ternarisch zu zergliedern. §. 380.

α) Suchet die Laterale; ist 88, weil $90-2=88$.
β) Suchet die zweyte Trigonalpotenz erstlich der Laterale 88, und hernach der um 1. 2. 3. 4, u. s. w. bis 87, verminderten Laterale 88, und folglich der Zahlen 88. 87. 86. 85. 84, u. s. w. bis 1 zurück.

Es ist aber die zweyte Trigonalpotenz der Laterale 88 die Zahl 3916, indem $88\times 89=7832$, und $\frac{7832}{2}=3916$, oder, welches einerley ist, die Zahlen

88 + 87 + 86 + 85 u. ſ. w. bis + 1 zurück, ſind = 3916. Wenn nun die erſte Gröſſe der ternariſch zu componirenden Zahl 90 die Gröſſe 1 iſt, und die Laterale = 88, deren zweyte Trigonalpotenz = 3916: ſo müſſen aus der Gröſſe 1 hervorgebracht werden 3916 Ternionen; und da die Potenz 3916 aus 88 + 87 + 86 u. ſ. w. bis 1 zurück, entſtanden iſt, ſo werden aus der durch 1 characteriſirten erſten Binion 1. 2, die 88 Ternionen.

1. 2. 3, 1. 2. 4, 1. 2. 5, 1. 2. 6, u. ſ. w. bis 1. 2. 90 entſtehen.

Aus der zweyten Binion 1. 3 werden die 87 Ternionen

1. 3. 4, 1. 3. 5, 1. 3. 6, 1. 3. 7, u. ſ. w. bis 1. 3. 90 entſtehen.

Aus der dritten Binion 1. 4 werden die 86 Ternionen

1. 4. 5, 1. 4. 6, 1. 4. 7, 1. 4. 8, u. ſ. w. bis 1. 4. 90 entſtehen u. ſ. w. bis zur 88ten Binion 1. 89.

Es iſt ferner die zweyte Trigonalpotenz der um 1 verminderten Laterale, und folglich der Zahl 87, die Zahl 3828, indem $87 \times 88 = 7656$, und $\frac{7656}{2} = 3828$, oder welches einerley iſt, die Zahlen 87 + 86 + 85 + 84 und ſo weiter bis + 1 zurück, ſind = 3828. Wenn nun die zweyte Gröſſe der ternariſch zu decomponirenden Zahl 90 die Gröſſe 2 iſt, und die Laterale = 87, deren zweyte Trigonalpotenz = 3828: ſo müſſen aus der Gröſſe 2 hervorgebracht werden 3828 Ternionen; und da die Potenz 3828 aus 87 + 86 + 85 + 84 u. ſ. w. bis 1 zurück, entſtanden iſt, ſo werden aus der durch 2 characteriſirten erſten Binion 2. 3 die 87 Ternionen

2. 3. 4, 2. 3. 5, 2. 3. 6, 2. 3. 7 u. ſ. w. bis 2. 3. 90 entſtehen.

Aus der zweyten Binion 2. 4 werden die 86 Ternionen

2. 4. 5, 2. 4. 6, 2. 4. 7, 2. 4. 8, u. ſ. w. bis 2. 4. 90 entſtehen.

Aus der dritten Binion 2. 5 werden die 85 Ternionen 2.5.6, 2.5.7, 2.5.8, 2.5.9 u. ſ. w. bis 2.5.90 entſtehen, und ſo weiter bis zur 87ten Binion 2. 89.

Wenn man auf ähnliche Art die zweyte Trigonalpotenz der um 2 verminderten Laterale, und folglich der Zahl 86 ſuchet: ſo bekömmt man durch 86 + 85 + 84 u. ſ. w. bis + 1 zurück, die Anzahl der Ternionen aus den durch 3 characteriſirten Binionen, und ſolche wird ſeyn = 3741; und wenn man die zweyte Trigonalpotenz der um 3 verminderten Laterale 88, und folglich der Zahl 85 ſuchet: ſo bekömmt man durch 85 + 84 + 83 u. ſ. w. bis + 1 zurück, die Anzahl der Ternionen aus den durch 4 characteriſirten Binionen, und ſolche wird ſeyn = 3655, und ſo weiter; und die Summe von 3916 + 3828 + 3741 + 3655, u. ſ. w. bis + 10 + 6 + 3 + 1 zurück, wird ſeyn = dem Quotienten aus $\frac{90 \times 89 \times 88}{1 \times 2 \times 3}$.

(III.) Die Zahl 8 in den acht Größen abcdefgh quaternariſch zu zergliedern. §. 381.

1) Berechnet die Lateralen und Zwiſchenlateralen der gegebnen Zahl. 2) Bedienet euch, zur Leitung der Operationen, der vorhergehenden ternariſchen Zergliederung der der Zahl 8, und ſetzet jede Ternion, deren letzte Größe nicht der Buchſtabe h, als die letzte der gegebnen Größen iſt, mit einer der folgenden Größen nach und nach zuſammen, um Quaternionen zu bilden. 3) Summiret die aus jeder Ternion entſtandnen Quaternionen, und ziehet bey jeder ſich mit der Summe 1 endigenden Abtheilung eine Generalſumme ſolcher Abtheilung, als:

$\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{1680}{24} = 70$ Quaternionen in der Zahl 8.

8 − 3 = 5 Laterale der quaternariſch zu zergliedernden Zahl 8. Alſo 5.4.3.2.1.

Folglich

Folglich ſind die erſten Zwiſchenlateralen die Binionen 15. 10. 6. 3. 1, und die zweyten die Ternionen 35. 20. 10. 4. 1.

(A) Gröſse 2.

1) Abtheilung ab.

Zum Grunde liegende Ternionen.	Verbunden nach und nach mit		
abc	*defgh*	das iſt abcd abce abcf abcg abch	5
abd	*efgh*	abde abdf abdg abdh	4
abe	*fgh*	abef abeg abeh	3
abf	*gh*	abfg abfh	2
abg	*h*	abgh	1

15 Quaternionen aus ab.

2) Abtheilung ac.

acd	*efgh*	das iſt acde acdf acdg acdh	4
ace	*fgh*	acef aceg aceh	3
acf	*gh*	acfg acfh	2
acg	*h*	acgh	1

10 Quaternionen aus ac.

3) Abtheilung ad.

ade	*fgh*	das iſt adef adeg adeh	3
adf	*gh*	adfg adfh	2
adg	*h*	adgh	1

6 Quaternionen aus ad.

4) Abtheilung ae.

aef	*gh*	das iſt — aefg aefh	2
aeg	*h*	aegh	1

3 Quaternionen aus ae.

5) Ab

5) Abtheilung af.

afg	*h*	das iſt —	afgh	1 Quaternion aus af.

Wiederholung.

5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15
4 + 3 + 2 + 1 = 10
3 + 2 + 1 = 6
2 + 1 = 3
1 = 1
Summe 35

(B) Größe b.

1) Abtheilung be.

bed	*efgh*	das iſt	bede bedf bedg bedh	4
bee	*fgh*		beef beeg beeh	3
bef	*gh*		befg befh	2
beg	*h*		begh	1

10 Quaternionen aus be.

2) Abtheilung bd.

bde	*fgh*	das iſt	bdef bdeg bdeh	3
bdf	*gh*		bdfg bdfh	2
bdg	*h*		bdgh	1

6 Quaternionen aus bd.

3) Abtheilung be.

bef	*gh*	das iſt —	befg befh	2
beg	*h*		begh	1

3 Quaternionen aus be.

4) Abtheilung bf.

bfg	*h*	das iſt =	bfgh	1 Quaternion aus bf.

Wieder-

Wiederholung.

$$\begin{array}{rrrrr} 4 & + & 3 & + & 2 + 1 = 10 \\ & & 3 & + & 2 + 1 = 6 \\ & & & & 2 + 1 = 3 \\ & & & & 1 = 1 \end{array}$$

Summe 20.

(C) Größe c.

1) Abtheilung cd.

cde	*fgh*	das ist	cdef cdeg cdeh	3
cdf	*gh*		cdfg cdfh	2
cdg	*h*		cdgh	1

6 Quaternionen aus cd.

2) Abtheilung ce.

cef	*gh*	das ist —	cefg cefh	2
ceg	*h*		cegh	1

3 Quaternionen aus ce.

3) Abtheilung cf.

cfg	*h*	das ist —	cfgh	1 Quaternion aus cf.

Widerholung.

$$\left.\begin{array}{rrrrr} 3 & + & 2 & + & 1 = 6 \\ & & 2 & + & 1 = 3 \\ & & & & 1 = 1 \end{array}\right\} \text{Summe } 10.$$

(D) Größe d.

1) Abtheilung de.

def	*gh*	das ist	defg defh	2
deg	*h*		degh	1

3 Quaternionen aus de.

2) Abthei-

2) Abtheilung df.

dfg | h das iſt — dfgh | 3 Quaternionen aus df.

Wiederholung.

2 + 1 = 3
1 = 1
Summe 4

(E) Größe e.

Abtheilung ef.

efg | h das iſt efgh | 1 Quaternion aus ef.

§. 382.

Aus vorhergehender quaternariſchen Zergliederung der Zahl 8 ſiehet man

1) daß eine jede zum Grunde gelegte Ternion ſo viele Quaternionen gegeben hat, als einzelne Größen damit verbunden worden. Z. E. mit der Ternion abc ſind die fünf einzelnen Größen defgh verbunden worden, und ſo viele Quaternionen hat ſelbige hervorgebracht. — Mit der Ternion abd ſind die vier einzelnen Größen efgh verbunden worden, und ſo viele Quaternionen hat ſelbige hervorgebracht, und ſo weiter.

Es liegen aber bey jeder quaternariſchen Zergliederung einer Zahl ſo viele Ternionen zum Grunde, als in der höchſten Zahl der zweyten Zwiſchenlateralen, allhier 35. 20. 10. 4. 1, und folglich in 35 Einheiten enthalten ſind. Da zur Hervorbringung von 35 Ternionen ſieben Größen erfordert werden, und wir die Zergliederung von der erſten Größe a anfangen: ſo müſſen die zum Grunde zu legenden Ternionen aus den ſieben erſten Größen abcdefg formiret werden, wie allhier geſchehen. Von dieſen 35 Ternionen giebet, nach vorhergehender Berechnung, die allererſte abc 5 Quaternionen; abd 4; abe 3; abf 2, u. ſ. w. ſo wie ſolches durch die Laterales 5. 4. 3. 2. 1, und deren verſchiedne

ſchiedne Wiederholungen, in der Zergliederung angezeiget worden iſt. Die Summe ſämmtlicher Producte aus den 35 Ternionen wird ſeyn = 70, welches die Anzahl der in der Zahl 8 enthaltnen Quaternionen iſt.

2) **Daß eine jede zum Grunde gelegte Binion ſo viele Quaternionen gegeben hat, als in den damit zu verbindenden Größen Binionen enthalten ſind.** Z. E. mit der Binion a b ſind die ſechs Größen c d e f g h zu verbinden. In der Zahl 6 ſind 15 Binionen enthalten, und ſo viele Quaternionen hat die Binion a b gegeben. — Mit der Binion a c ſind die fünf Größen d e f g h zu verbinden. In der Zahl 5 ſind 10 Binionen enthalten, und ſoviele Quaternionen hat die Binion a c gegeben, u. ſ. w.

Es liegen aber bey jeder quaternariſchen Zergliederung einer Zahl ſo viel Binionen zum Grunde, als in der höchſten Zahl der erſten Zwiſchenlateralen, allhier 15. 10. 6. 3. 1, und folglich in 15, Einheiten enthalten ſind. Da zur Hervorbringung von 15 Binionen ſechs Größen erfordert werden, und wir die Zergliederung von der erſten Größe a anfangen, ſo müſſen die zum Grunde liegenden Binionen aus den ſechs erſten Größen a b c d e f formiret werden. Von dieſen 15 Binionen giebet, nach voriger Bemerkung, die erſte a b 15 Quaternionen; die zweyte a c 10; die dritte a d 6; die vierte a e 3, u. ſ. w., wie man ſolches in der Zergliederung durch die Summen der Lateralen, verzeichnet findet. Es ſind aber die Zahlen 15. 10. 6. 3. 1 die erſten Zwiſchenlateralen der quaternariſch zu zergliedernden Zahl 8, und die Summe dieſer Zwiſchenlateralen und deren verſchiednen Wiederholungen iſt = 70, welches die Anzahl aller Producte aus den 15 Binionen, und die Anzahl der in 8 enthaltnen Quaternionen iſt,

als 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 35
10 + 6 + 3 + 1 = 20
6 + 3 + 1 = 10
3 + 1 = 4
1 = 1
Summa 70.

3) Daß eine jede zum Grunde gelegte einzelne Größe so viele Quaternionen gegeben hat, als in den damit zu verbindenden andern Größen Ternionen enthalten sind. Z. E. mit der Größe a sind die sieben Größen b c d e f g h zu verbinden. In der Zahl 7 sind 35 Ternionen enthalten, und so viele Quaternionen hat die einzelne Größe a gegeben. — Mit der Größe b sind die sechs Größen c d e f g h zu verbinden. In der Zahl 6 sind 20 Ternionen enthalten, und soviele Quaternionen hat die einzelne Größe b gegeben, u. s. w.

Es liegen aber bey jeder quaternarischen Zergliederung einer Zahl so viele einzelne Größen zum Grunde, als in der höchsten Zahl der Lateralen, allhier 5. 4. 3. 2. 1, und folglich in 5, Einheiten enthalten sind. Da wir die Zergliederung von der ersten Größe a anfangen, so sind die zum Grunde zu legenden fünf Größen die von a b c d e, von welchen nach vorhergehender Berechnung, die Größe

a 35 Ternionen gegeben,
b 20
c 10
d 4
e 1
Summe 70

Die Zahlen 35. 20. 10. 4. 1 sind die zweyten Zwischenlateralen der gegebnen Zahl 8, und die Summe derselben 70 ist gleich der Anzahl aller in der Zahl 8 enthaltenen Quaternionen.

(IV.) Die

(IV.) Die Zahl 8 in den acht Größen abcdefgh quinarisch zu zergliedern. §. 383.

1) Berechnet die Lateralen und Zwischenlateralen der gegebnen Zahl. 2) Bedienet euch, zur Leitung der Operationen, der vorhergehenden quaternarischen Zergliederung der Zahl 8, und setzet jede Quaternion, deren lezte Größe nicht der Buchstabe h, als die lezte der gegebnen Größen ist, mit einer der folgenden Größen nach und nach zusammen, um Quinionen zu bilden. 3) Summiret die aus jeder Quaternion entstandnen Quinionen, und ziehet bey jeder, mit der Summe 1 sich endigenden Abtheilung eine Generalsumme solcher Abtheilung, als

$\frac{8\times7\times6\times5\times4}{1\times2\times3\times4\times5} = \frac{6720}{120} = 56$ Quinionen in der Zahl 8.

$8-4=4$ Laterale der quinarisch zu zergliedernden Zahl 8. Also 4. 3. 2. 1.

Folglich sind die ersten Zwischenlateralen die Binionen 10. 6. 3. 1;

die zweyten die Ternionen 20. 10. 4. 1, und

die dritten die Quaternionen 35. 15. 5. 1.

(A) Größe a.

Erste Abtheilung ab.

Zum Grunde liegende Quaternionen.	Verbunden nach und nach mit				
(1) abc	abcd	efgh	das ist abcde abcdf abcdg abcdh		4
	abce	fgh	abcef abceg abceh		3
	abcf	gh	abcfg abcfh		2
	abcg	h	abcgh		1
					10 Quinionen aus abc.

Zum Grunde liegende Quas trionionen.	Verbunden nach und nach mit			
(2) abd	abde	fgh	das iſt abdef abdeg abdeh	3
	abdf	gh	abdfg abdfh	2
	abdg	h	abdgh	1

6 Quinionen aus abd.

(3) abe	abef	gh	das iſt abefg abefh	2
	abeg	h	abegh	1

3 Quinionen aus abe.

(4) abf (abfg | h das iſt — abfgh | 1 Quinion aus abf.

Zweyte Abtheilung ac.

(1) acd	acde	fgh	das iſt acdef acdeg acdeh	3
	acdf	gh	acdfg acdfh	2
	acdg	h	acdgh	1

6 Quinionen aus acd.

(2) ace	acef	gh	das iſt acefg acefh	2
	aceg	h	acegh	1

3 Quinionen aus ace.

(3) acf (acfg | h das iſt — acfgh | 1 Quinion aus acf.

Dritte Abtheilung ad.

(1) ade	adef	gh	das iſt adefg adefh	2
	adeg	h	adegh	1

3 Quinionen aus ade.

(2) adf (adfg | h das iſt — adfgh | 1 Quinion aus adf.

Vierte

Zum Grunde liegende Quaſternionen.	Verbunden nach und nach mit			

Vierte Abtheilung ae.

aef	(*aefg*	*h*	das iſt —	*aefgh*	1 Quinion aus *aef*.

(B) Gröſſe b.

Erſte Abtheilung bc.

(1) *bcd*	*bcde*	*fgh*	das iſt	*bcdef* *bcdeg*	*bcdeh*	3
	bcdf	*gh*		*bcdfg*	*bcdfh*	2
	bcdg	*h*			*bcdgh*	1

6 Quinionen aus *bcd*.

(2) *bce*	*bcef*	*gh*	das iſt	*bcefg*	*bcefh*	2
	bceg	*h*			*bcegh*	1

3 Quinionen aus *bce*.

(3) *bcf*	(*bcfg*	*h*	das iſt —		*bcfgh*	1 Quinion aus *bcf*.

Zweyte Abtheilung bd.

(1) *bde*	*bdef*	*gh*	das iſt	*bdefg*	*bdefh*	2
	bdeg	*h*			*bdegh*	1

3 Quinionen aus *bde*.

(2) *bdf*	(*bdfg*	*h*	das iſt —		*bdfgh*	1 Quinion aus *bdf*.

Dritte Abtheilung be.

bef	(*befg*	*h*	das iſt —		*befgh*	1 Quinion aus *bef*.

(C) Größe c.

Erste Abtheilung cd.

(1) $cde\begin{cases} cdef \mid gh \\ cdeg \mid h \end{cases}$ das ist — cdefg cdefh | 2
cdegh | 1

3 Quinionen aus cde.

(2) $cdf(cdfg \mid h$ das ist — cdfgh | 1 Quinion aus cdf.

Zweyte Abtheilung ce.

$cef(cefg \mid h$ das ist — cefgh | 1 Quinion aus cef.

(D) Größe d.

Abtheilung de.

$def(defg \mid h$ das ist — defgh | 1 Quinion aus def.

§. 384.

Aus vorhergehender quinarischen Zergliederung der Zahl 8 siehet man,

1) daß eine jede zum Grunde gelegte Quaternion so viele Quinionen gegeben hat, als einzelne Größen damit verbunden worden. Z. E. mit der Quaternion abcd sind die vier einzelnen Größen efgh verbunden worden, und so viele Quinionen hat selbige hervorgebracht. — Mit der Quaternion abce sind die drey einzelnen Größen fgh verbunden worden, und so viele Quinionen hat selbige hervorgebracht, u. s. w.

Es liegen aber bey jeder quinarischen Zergliederung einer Zahl so viele Quaternionen zum Grunde, als in der höchsten Zahl der dritten Zwischenlateralen, allhier 35. 15. 5. 1, und folglich in 35, Einheiten enthalten sind. Da zur Hervorbrin-

vorbringung von 35 Quaternionen ſieben Gröſsen erfordert werden, und wir die Zergliederung der Zahl 8 von der erſten Gröſse a anfangen: ſo müſſen die zum Grunde zu legenden 35 Quaternionen aus den ſieben erſten Gröſsen abcdefg formiret werden, wie allhier geſchehen iſt. Von dieſen 35 Quaternionen giebet, nach voriger Bemerkung die erſte abcd 4 Quinionen; die zweyte abce 3; die dritte abcd 2, u. ſ. w. ſo wie ſolches durch die Lateralen 4. 3. 2. 1, und deren verſchiedne Wiederholungen angezeiget worden. Die Summe ſämmtlicher Producte aus den 35 Quaternionen iſt = 56, welches die Anzahl der in 8 enthaltnen Quinionen iſt.

2) Daſs eine jede zum Grunde gelegte Ternion ſo viele Quinionen gegeben hat, als in den damit zu verbindenden Gröſsen Binionen enthalten ſind. Z. E. mit der Ternion abc ſind die fünf Gröſſen defgh zu verbinden. In der Zahl 5 ſind 10 Binionen enthalten, und ſo viele Quinionen hat die Ternion abc gegeben. — Mit der Ternion abd ſind die vier Gröſsen efgh zu verbinden. In der Zahl 4 ſind 6 Binionen enthalten, und ſo viele Quinionen hat die Ternion abd gegeben, u. ſ. w.

Es liegen aber bey jeder quinariſchen Zergliederung einer Zahl ſo viele Ternionen zum Grunde als in der höchſten Zahl der zweyten Zwiſchenlateralen, allhier 20. 10. 4. 1, und folglich in 20, Einheiten enthalten ſind. Da zur Hervorbringung von 20 Ternionen 6 Gröſsen erfordert werden, und wir die Zergliederung von der erſten Gröſse a anfangen, ſo müſſen die zum Grunde liegenden Ternionen aus den ſechs erſten Gröſsen abcdef formiret werden. Von dieſen 20 Ternionen giebet, nach voriger Bemerkung, die erſte abc 10 Quinionen: die zweyte abd 6; die dritte abe 3, u. ſ. w., wie man ſolches in der Zergliederung, durch die Summen der Lateralen 4. 3. 2. 1, und alſo durch

$$\begin{array}{rrrrr} 10+6+3+1=20 & 6+3+1=10 & 3+1=4 & 1=1 \\ 6+3+1=10 & 3+1=4 & 1=1 & \overline{1} \\ 3+1=4 & 1=1 & \overline{5} & \\ 1=1 & \overline{15} & & \\ \overline{35} & & & \end{array}$$

verzeichnet findet. Wenn nun wiederum $35+15+5+1=56$, so erhält man dadurch die Anzahl sämtlicher in 8 enthaltnen Quinionen.

3) **Daß eine jede zum Grunde gelegte Binion so viele Quinionen gegeben hat, als in den damit zu verbindenden Größen Ternionen enthalten sind.** Z. E. mit der Binion a b sind die sechs Größen c d e f g zu verbinden. In der Zahl 6 sind 20 Ternionen enthalten, und so viele Quinionen hat die Binion a b gegeben. — Mit der Binion a c sind die fünf Größen d e f g h zu verbinden. In der Zahl 5 sind 10 Ternionen enthalten, und so viele Quinionen hat die Binion a c gegeben, u. s. w.

Es liegen aber bey jeder quinarischen Zergliederung einer Zahl so viele Binionen zum Grunde, als in der höchsten Zahl der ersten Zwischenlateralen, allhier 10. 6. 3. 1, und folglich in 10, Einheiten enthalten sind. Da zur Hervorbringung von 10 Binionen 5 Größen erfordert werden, und wir die Zergliederung der Zahl 8 von der ersten Größe a anfangen: so müssen die zum Grunde liegenden Binionen aus den fünf ersten Größen a b c d e formiret werden. Von diesen zehn Binionen giebet, nach voriger Bemerkung, die erste a b 20 Quinionen; die zweyte a c 10; die dritte a d 4, und so weiter. Die Summe sämtlicher Producte aus den 10 Binionen ist $= 56$, welches die Anzahl der in 8 enthaltnen Quinionen ist.

4) **Daß eine jede zum Grunde gelegte einzelne Größe so viele Quinionen gegeben hat, als in den damit zu verbindenden Größen Quaternionen enthalten sind.** Z. E. mit der Größe a sind die sieben Größen b c d e f g h zu verbinden. In der Zahl 7 sind

sind 35 Quaternionen enthalten, und so viele Quinionen hat die Größe a gegeben. — Mit der Größe b sind die sechs Größen c d e f g h zu verbinden. In der Zahl 6 sind 15 Quaternionen enthalten, und so viele Quinionen hat die Größe b gegeben, u. s. w.

Es liegen aber bey jeder quinarischen Zergliederung einer Zahl so viele einzelne Größen zum Grunde, als Einheiten in der größten Laterale der gegebnen Zahl enthalten sind. Die Lateralen sind 4. 3. 2. 1, und da die höchste = 4, so sind die zum Grunde zu legenden vier Größen, die von a b c d, von welchen, nach voriger Bemerkung, die Größe a 35 Quinionen gegeben;

b 15
c 5
und d 1
Summe 56

Die Zahlen 35. 15. 5. 1 sind die dritten Zwischenlateralen der gegebnen Zahl 8, und die Summe derselben 56 ist gleich der Anzahl der in 8 enthaltnen Quinionen.

(V.) Die Zahl 8 in den acht Grössen a b c d e f g h senarisch zu zergliedern. §. 385.

1) Berechnet die Lateralen und Zwischenlateralen der gegebnen Zahl 8. 2) Bedienet euch, zur Leitung der Operation, der vorhergehenden quinarischen Zergliederung der Zahl 8, und setzet jede Quinion, deren lezte Größe nicht der Buchstabe h, als die lezte der gegebnen Größen ist, mit einer der folgenden Größen nach und nach zusammen, um Senionen hervorzubringen. 3) Summiret die aus jeder Quinion entstandnen Senionen, und ziehet bey jeder mit der Summe 1 sich endigenden Abtheilung, eine Generalsumme derselben, als:

$$\frac{8\times7\times6\times5\times4\times3}{1\times2\times3\times4\times5\times6} = \frac{20160}{720} = 28 \text{ Senionen in der Zahl 8.}$$

8 — 5 = 3 Laterale der ſenariſch zu zergliedernden Zahl 8.
Alſo 3. 2. 1.

Folglich ſind die erſten Zwiſchenlateralen die Binionen
6. 3. 1;
die zweyten die Ternionen 10. 4. 1;
die dritten die Quaternionen 15. 5. 1, und
die vierten die Quinionen 21. 6. 1.

Aus dem vor der eigentlichen Zergliederung vorhergehenden Grundriß derſelben wird man ſehen, wie viel einzelne Größen, Binionen, Ternionen, Quaternionen und Quinionen zur Hervorbringung der Senionen zum Grunde liegen.

(A) Größe a.

Die Binion a b.

Zum Grunde liegende Quinionen.			Verbunden nach und nach mit			
(1) abc	(1) abcd	abcde	fgh,	das iſt	abcdef abcdeg abcdeh	3
		abcdf	gh		abcdfg abcdfh	2
		abcdg	h		abcdgh	1
	(2) abce	abcef	gh	das iſt	abcefg abcefh	2
		abceg	h		abcegh	1
	(3) abcf	(abcfg	h	das iſt —	abcfgh	1
(2) abd	(1) abde	abdef	gh	das iſt	abdefg abdefh	2
		abdeg	h		abdegh	1
	(2) abdf	(abdfg	h	das iſt —	abdfgh	1
(3) abe	(1) abef	(abefg	h	das iſt —	abefgh	1

Die Binion a c.

(1) acd	(1) acde	acdef	gh	das iſt —	acdefg acdefh	2
		acdeg	h		acdegh	1
	(2) acdf	(acdfg	h	das iſt —	acdfgh	1

(2) ace

Zum Grunde liegende Quinionen	Verbunden nach und nach mit			
(2) (1)				
ace(*acef*(*acefg*	*h*	das iſt	—	acefgh | 1

Die Binion ad.

ade(*adef*(*adefg*	*h*	das iſt	—	adefgh | 1

(B) Gröſſe b.

Die Binion bc.

(1) *bcd* (1) *bcde* *bcdef*	*gh*	das iſt	bcdefg	bcdefh	2
(1) *bcde* *bcdeg*	*h*			bcdegh	1
(2) *bcdf*(*bcdfg*	*h*	das iſt	—	bcdfgh	1
(2) *bce* (*bcef*(*bcefg*	*h*	das iſt	—	bcefgh	1

Die Binion bd.

bde (*bdef*(*bdefg*	*h*	das iſt	—	bdefgh | 1

(C) Gröſſe c.

Die Binion cd.

cde(*cdef*(*cdefg*	*h*	das iſt	—	cdefgh | 1

§. 386.

Aus vorhergehender ſenariſchen Zergliederung der Zahl 8 ſiehet man,

1) daß eine jede zum Grunde gelegte Quinion ſo viele Senionen gegeben hat, als einzelne Gröſſen damit verbunden worden. Z. E. mit der Quinion abcde ſind die drey einzelnen Gröſſen fgh verbunden worden, und ſo viele Senionen hat die Quinion abcde hervorgebracht. — Mit der Quinion abcdf ſind die zwey einzelnen Gröſſen gh verbunden worden, und ſo viele Senionen hat die Quinion abcdf hervorgebracht, u. ſ. w.

Es liegen aber bey jeder senarischen Zergliederung einer Zahl so viele Quinionen zum Grunde, als in der höchsten Zahl der vierten Zwischenlateralen, allhier 21. 6. 1, und folglich in 21, Einheiten enthalten sind. Da zur Hervorbringung von ein und zwanzig Quinionen sieben Größen erfordert werden, und wir die Zergliederung der acht Größen a b c d e f g h von der allererſten Größe a anfangen: so müssen die zum Grunde zu legenden 21 Quinionen ohne Zweifel aus den 7 ersten Größen a b c d e f g formiret werden, so wie allhier geschehen. Von diesen 21 Quinionen giebet, nach vorhergehender Vorstellung die allererste Quinion a b c d e 3 Senionen; die zweyte a b c d f 2; die dritte a b c d g 1; die vierte a b c e f 2; die fünfte a b c e g 1; die sechste a b c f g 1, u. s. w., so wie solches durch die Lateralzahlen 3. 2. 1, und deren verschiedene Wiederholungen in der Zergliederung angezeiget worden ist. Die Summe sämmtlicher Producte wird seyn = 28, welches die Anzahl der in der Zahl 8 enthaltnen Senionen ist.

2) Daß eine jede zum Grunde gelegte Quaternion so viele Senionen gegeben hat, als in den damit zu verbindenden Größen Binionen enthalten sind. Z. E. mit der Quaternion a b c d sind die vier Größen e f g h zu verbinden. In der Zahl 4 sind 6 Binionen enthalten, und so viele Senionen hat die Quaternion a b c d gegeben. — Mit der Quaternion a b c e sind die drey Größen f g h zu verbinden. In der Zahl 3 sind 3 Binionen enthalten, und so viele Senionen hat die Quaternion a b c e gegeben, u. s. w.

Es liegen aber bey jeder senarischen Zergliederung einer Zahl so viele Quaternionen zum Grunde, als in der höchsten Zahl der dritten Zwischenlateralen, allhier 15. 5. 1, und folglich in 15, Einheiten enthalten sind. Da zur Hervorbringung von funfzehn Quaternionen sechs Größen erfordert werden, und wir die Zergliederung der acht Größen a b c d e f g h von der allererſten Größe a anfangen: so müssen die zum Grunde zu legenden 15 Quaternionen ohne

Zwei-

Zweifel aus den 6 erſten Gröſſen abcdef formiret werden, wie allhier geſchehen iſt. Von dieſen 15 Quaternionen giebet, nach vorhergehender Vorſtellung, die allererſte Quaternion abcd 6 Senionen; die zweyte abce 3; die dritte abcf 1; die vierte abde 3; die fünfte abdf 1, u. ſ. w; ſo wie ſolches in der Zergliederung nachgeſehen werden kann. Es ſind aber die Zahlen 6. 3. 1 die erſten Zwiſchenlateralen der ſenariſch zu zergliedernden Zahl 8, und die Summe dieſer Zwiſchenlateralen und deren verſchiednen Wiederholungen wird ſeyn = 28, welches die Anzahl der in 8 enthaltnen Senionen iſt.

3) Daß eine jede zum Grunde liegende Ternion ſo viele Senionen gegeben hat, als in den damit zu verbindenden Gröſſen Ternionen enthalten ſind. Z. E. mit der Ternion abc ſind die fünf Gröſſen defgh zu verbinden. In der Zahl 5 ſind 10 Ternionen enthalten, und ſo viele Senionen hat die Ternion abc gegeben. — Mit der Ternion abd ſind die vier Gröſſen efgh zu verbinden. In der Zahl 4 ſind 4 Ternionen enthalten, und ſo viele Senionen hat die Ternion abd gegeben, u. ſ. w.

Es liegen aber bey jeder ſenariſchen Zergliederung einer Zahl ſo viele Ternionen zum Grunde, als in der höchſten Zahl der zweyten Zwiſchenlateralen, allhier 10. 4. 1, und folglich in 10, Einheiten enthalten ſind. Da zur Hervorbringung von zehn Ternionen fünf Gröſſen erfordert werden, und wir die Zergliederung der acht Gröſſen abcdefgh von der allererſten Gröſſe a anfangen: ſo müſſen die zum Grunde zu legenden 10 Ternionen aus den fünf erſten Gröſſen abcde formiret werden, wie allhier geſchehen iſt. Von dieſen 10 Ternionen giebet die erſte abc 10 Senionen; die zweyte abd 4; die dritte abe 1; die vierte acd 4; die fünfte ace 1 u. ſ. w. ſo wie ſolches in der Decompoſition nachgeſehen werden kann. Die Summe dieſer Zahlen 10. 4. 1 und deren verſchiednen Wiederholungen iſt = 28, welches die Anzahl der in 8 enthaltnen Senionen iſt.

4) Daß

4) **Daß eine jede zum Grunde gelegte Binion so viele Senionen gegeben hat, als in den damit zu verbindenden Größen Quaternionen enthalten sind.** Z. E. Mit der Binion a b sind die sechs Größen c d e f g h zu verbinden. In der Zahl 6 sind 15 Quaternionen enthalten, und soviel Senionen hat die Binion a b gegeben. — Mit der Binion a c sind die fünf Größen d e f g h zu verbinden. In der Zahl 5 sind 10 Quaternionen enthalten, und so viele Senionen hat die Binion a c gegeben, u. s. w.

Es liegen aber bey jeder senarischen Zergliederung einer Zahl so viele Binionen zum Grunde, als in der höchsten Zahl der ersten Zwischenlateralen allhier 6. 3. 1, und folglich in 6, Einheiten enthalten sind. Da zur Hervorbringung von sechs Binionen vier Größen erfordert werden, und wir die Zergliederung der acht Größen a b c d e f g h von der allererſten Größe a anfangen: so müssen die zum Grunde zu legenden 6 Binionen aus den 4 ersten Größen a b c d formiret werden, wie allhier geschehen ist. Von diesen 6 Binionen giebt die erste a b 15 Senionen; die zweyte a c 5; die dritte a d 1; die von b e 5; die von b d 1, und die von c d 1. Diese Zahlen 15. 5. 1 sind die dritten Zwischenlateralen der gegebnen Zahl 8, und wenn man solche mit ihren Wiederholungen summiret, als

$$\begin{array}{rrrr} 15 & + & 5 & + & 1 & = & 21 \\ & & 5 & + & 1 & = & 6 \\ & & & & 1 & = & 1 \\ \hline & & & & & & 28 \end{array}$$

so wird die Summe 28 der Anzahl der in 8 enthaltnen Senionen gleich seyn.

5) **Daß eine jede zum Grunde gelegte einzelne Größe so viele Senionen gegeben hat, als in den damit zu verbindenden Größen Quinionen enthalten sind.** Z. E. mit der Größe a sind die sieben Größen b c d e f g h zu verbinden. In der

Zahl

Zahl 7 sind 21 Quinionen enthalten, und so viele Senionen hat die Größe a gegeben. — Mit der Größe b sind die sechs Größen cdefgh zu verbinden. In der Zahl 6 sind 6 Quinionen enthalten, und so viele Senionen hat die Größe b gegeben. Mit der Größe c sind die fünf Größen defgh zu verbinden. In der Zahl 5 ist nicht mehr als 1 Quinion enthalten, und also hat die Größe c auch nicht mehr als 1 Senion gegeben.

Es liegen aber bey jeder senarischen Zergliederung einer Zahl so viele einzelne Größen zum Grunde, als Einheiten in der höchsten Laterale der gegebnen Zahl enthalten sind. Die Lateralen sind 3. 2. 1, und da die höchste = 3, so sind die zum Grunde zu legenden drey Größen die von abc, von welchen nach vorhergehender Berechnung die Größe a 21 Senionen gegeben;

b 6

und c 1

Summe 28

Die Zahlen 21. 6. 1 sind die vierten Zwischenlateralen der gegebnen Zahl 8, und die Summe derselben 28 ist gleich der Anzahl der in 8 enthaltnen Senionen.

(VI.) Die Zahl 8 in acht Größen abcdefgh septenarisch zu zergliedern. §. 387.

1) Berechnet die Lateralen und Zwischenlateralen der Zahl 8. 2) Bedienet euch, zur Leitung der Operation, der vorhergehenden senarischen Zergliederung der Zahl 8, und setzet jede Senion, deren lezte Größe nicht der Buchstabe h, als die lezte der gegebnen Größen ist, mit den folgenden Größen nach und nach zusammen, um Septenionen hervorzubringen. 3) Summiret die aus jeder Senion entstandenen Septenionen, als:

$$\frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7} = \frac{40320}{5040} = 8$$

8 — 6 = 2 Laterale der septenarisch zu zergliedernden Zahl 8. Folglich 2. 1.

Die

Die ersten Zwischenlateralen sind also die Binionen 3. 1
Die zweyten — — die Ternionen 4. 1
Die dritten — — die Quaternionen 5. 1
Die vierten — — die Quinionen 6. 1
und die fünften — — die Senionen 7. 1

Ich setze sogleich die Decomposition ohne den gewöhnlichen Grundriß her, und werde auch den weitläuftigen Discurs über die Decomposition weglassen, da man nach Anleitung der bey den vorhergehenden Decompositionen befindlichen Grundrisse und Discurse, nunmehro selbst beydes zu formiren im Stande seyn wird.

abcdefg	abcdefh	2
	abcdegh	1
—	abcdfgh	1
—	abcefgh	1
—	abdefgh	1
—	acdefgh	1
—	bcdefgh	1
	Summe	8

Man wird bemerken, daß

abgiebet 6	abc 5	abcd 4	abcde 3	abcdef 2
ac — 1	abd 1	abce 1	abcdf 1	abcdeg 1
bc — 1	acd 1	abde 1	abcef 1	abcdfg 1
8	bcd 1	acde 1	abdef 1	abcefg 1
	8	bcde 1	acdef 1	abdefg 1
6+1=7		8	bcdef 1	acdefg 1
1=1	5+1=6		8	bcdefg 1
8	1=1	4+1=5		8
	7	1=1	3+1=4	
	1=1	6	1=1	2+1=3
	8	1=1	5	1=1
		1=1	1=1	4
		8	1=1	1=1
			1=1	1=1
			8	1=1
				8

Anmer-

Anmerkung.

Da in acht Größen nicht mehr als eine Octonion enthalten iſt: ſo iſt die Decompoſition der Zahl 8 mit der ſeptenariſchen vollendet worden. Wer alſo eine octonariſche, oder novenariſche, oder denariſche ꝛc. Decompoſition verſuchen will, muß dazu eine größere Zahl wählen.

Zweyter Abſchnitt.

Von der abwechſelnden Verbindung unähnlicher oder verſchiedner Größen.

§. 388.

Man erinnere ſich, daß wir durch abwechſelnde Verbindungen diejenigen verſtehen, in welchen eben dieſelbe Größe zweymal mit einer andern zuſammengenommen wird, vermöge welches Umſtandes jede Veränderung der Lage einer mit einer andern verbundnen Größe eine neue Verbindung hervorbringet. Die Auflöſung der hieher gehörigen Aufgaben nach beſondern Manieren kann auf eben die Art geſchehen, als in dem vorhergehenden erſten Abſchnitt die ausſchlieſſenden Verbindungen unähnlicher Größen berechnet worden ſind, wenn man nur am Ende jeder Berechnung den Diviſionsproceß mit 1×2, $1 \times 2 \times 3$, $1 \times 2 \times 3 \times 4$ u. ſ. w. wegläſſet. Z. E.

Zu wiſſen, wie viele abwechſelnde Binionen in einer Zahl enthalten ſind.

Subtrahiret die gegebne Zahl von ihrem Quadrat. Wenn nun die gegebne Zahl $= 6$, ſo iſt

$6^2 = 36$, und $36 - 6 = 30$ die gefundne Zahl der Binionen.

Zu wiſſen, wie viele abwechſelnde Ternionen in einer Zahl enthalten ſind.

1) Subtrahiret die gegebne Zahl von ihrem Quadrat. 2) Multipliciret die Differenz mit der gegebnen Zahl $- 2$.

Wenn

Wenn nun die gegebne Zahl = 6, so ist

1) $6^2 = 36$
$- 6$
30

2) $6 - 2 = 4$
$\times 30$
120 die gefundne Anzahl der Ternionen.

§. 389.

Die allgemeine Regel, nach welcher sich die quotenischen Verbindungen einer Zahl, von der niedrigsten bis zur höchsten, nach und nach entwickeln, ist, daß man die gegebne Zahl mit allen vorhergehenden Zahlen bis auf 1 zurück, und also rückwärts, nach und nach multipliciret. Z. E.

Zu wissen, wie viele abwechselnde Verbindungen, von der niedrigsten bis zur höchsten, in der Zahl 6 enthalten sind.

Multipliciret die Zahl 6 mit $6 - 1 = 5$; das Product mit $6 - 2 = 4$; das kommende Product mit $6 - 3 = 3$, und so weiter bis 1 zurück, als:

6
5
30 Binionen
4
120 Ternionen
3
360 Quaternionen
2
720 Quinionen
1
720 Senionen.

Also werden in der Zahl 4 zwölf alternativische Binionen seyn; vier und zwanzig Ternionen, und eben so viele Quaternionen, indem

indem $4 \times 3 = 12$
$4 \times 3 \times 2 = 24$
$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Hier iſt der praktiſche Beweis des leztern Exempels durch die Zergliederung.

Binariſche Verbindungen.

1. ab	4. ba	7. ca	10. da
2. ac	5. bc	8. cb	11. db
3. ad	6. bd	9. cd	12. dc

Ternariſche Verbindungen.

1. abc	7. bac	13. cab	19. dab
2. abd	8. bad	14. cad	20. dac
3. acb	9. bca	15. cba	21. dba
4. acd	10. bcd	16. cbd	22. dbc
5. adb	11. bda	17. cda	23. dca
6. adc	12. bdc	18. cdb	24. dcb

Quaternariſche Verbindungen.

1. abcd	7. bacd	13. cabd	19. dabc
2. abdc	8. badc	14. cadb	20. dacb
3. acbd	9. bcad	15. cbad	21. dbac
4. acdb	10. bcda	16. cbda	22. dbca
5. adbc	11. bdac	17. cdab	23. dcab
6. adcb	12. bdca	18. cdba	24. dcba

§. 390.

Nach Anleitung des vorhergehenden Calculs entwerfen wir folgende Progreßionstabelle HH, welche auf einem größern Raum als hier, nach Gefallen weiter ausgedehnet werden kann.

Progreßionstabelle HH.

Combinande.								
1	Bin.							
2	2	Tern.						
3	6	6	Quat.					
4	12	24	24	Quin.				
5	20	60	120	120	Sen.			
6	30	120	360	720	720	Septen.		
7	42	210	840	2520	5040	5040	Octon.	
8	56	336	1680	6720	20160	40320	40320	Nouen.
9	72	504	3024	15120	60480	181440	362880	362880

Aus vorhergehender Tabelle iſt nun auf einen Blick zu erſehen, wie vielmal z. E. die Zahl 8 binariſch verbunden werden kann, nemlich 56 mal; wie vielmal ternariſch, nemlich 336 mal, u. ſ. w.

§. 391.

Es iſt aus der im vorhergehenden erſten Abſchnitt enthaltnen Lehre von den ausſchließenden Verbindungen bekannt, daß z. E. in der Zahl 6 enthalten ſind 15 (excluſiviſche) Binionen, 20 Ternionen, 15 Quaternionen, 6 Quinionen und 1 Senion. Wenn nun in eben der Zahl 6 enthalten ſind 30 (alternativiſche) Binionen, 120 Ternionen, 360 Quaternionen, 720 Quinionen, und 720 Senionen, ſo ſiehet man, daß ſich die Anzahl der in eben derſelben Zahl enthaltnen excluſiviſchen und alternativiſchen Verbindungen gegen einander verhält,

in den Binionen, wie 1 : 2 = 15 : 30
in den Ternionen, wie 1 : 6 = 20 : 120
in den Quaternionen, wie 1 : 24 = 15 : 360
in den Quinionen, wie 1 : 120 = 6 : 720
in den Senionen, wie 1 : 720 = 1 : 720

Man kann alſo durch die ausſchlieſſenden Verbindungen die abwechſelnden, und umgekehrt, die abwechſelnden

durch

durch die ausſchlieſſenden von eben derjenigen Quotenität finden. Wenn man z. E. die ausſchlieſſenden Binionen einer Zahl mit 2 multipliciret, ſo bekömmt man die in eben dieſer Zahl enthaltnen abwechſelnden; und wenn man die abwechſelnden Binionen einer Zahl mit 2 dividiret: ſo bekömmt man die in eben dieſer Zahl enthaltnen ausſchlieſſenden. Bey den Ternionen wird in dieſer Abſicht entweder mit 6 multipliciret oder dividiret; bey den Quaternionen mit 24, bey den Quinionen mit 120, u. ſ. w.

§. 392.

Wenn man nicht mehr als die Anzahl der höchſten alternativiſchen Verbindungen einer Zahl verlanget: ſo fänget man die Multiplication mit 1 an, und rechnet 1, mal 2, mal 3, mal 4, u. ſ. w. und alſo vorwärts bis zur gegebnen Zahl. Vermittelſt dieſes Proceſſes, wo jede vorhergehende Anzahl von Verbindungen mit der nächſtfolgenden Zahl aus der natürlichen Progreſſion 1. 2. 3. 4. 5, u. ſ. w. multipliciret wird, entwickeln ſich zugleich die höchſten Verbindungen jeder vorhergehenden kleinern Zahl, als:

1 = 1
1 × 2 = 2 höchſte, allhier binariſche, altern. Verbind. in 2.
1 × 2 × 3 = 6 höchſte, allhier ternar. altern. Verbind. in 3.
1 × 2 × 3 × 4 = 24 höchſte, allhier quat. altern. Verb. in 4.
1 × 2 × 3 × 4 × 5 = 120 höchſte, allhier quinar. altern. Verbindungen in 5.
u. ſ. w.

oder

1	120
2	6
2	720
3	7
6	5040
4	8
24	40320
5	
120	

und ſo weiter.

Hier ist eine auf vorhergehende Art bis 20 ausgerechnete Progreßionstabelle, welche nach Belieben weiter fortgeführet werden kann, und aus welcher auf einen Blick zu ersehen ist, daß 7 Dinge aufs höchste (allhier septenarisch) 5040 mal verbunden werden können; 6 Dinge aufs höchste (allhier senarisch) 720 mal; u. s. w.

Progreßionstabelle II.

Combinanda.	Combinationes.
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800
11	39916800
12	479001600
13	6227020800
14	87178291200
15	1307674368000
16	20922789888000
17	355687428096000
18	6402373705728000
19	121645100408832000
20	2432902008176640000

und so weiter.

§. 393.

Es sollen die in den zwölf Größen a b c d e f g h i k l m enthaltnen duodenarischen Verbindungen zu Papier gebracht werden. Die Arbeit der Zergliederung wird zwischen zwölf Perso-

Perſonen vertheilet. Wie viel Zeit und Papier wird zur Vollendung derſelben erfordert? — In der Zahl 12 ſind 479,001,600 abwechſelnde duodenariſche Verbindungen enthalten. Jede Perſon hat alſo 39,916,800 Verbindungen zu bearbeiten. — Wenn jede Seite eines Foliobogens in 4 Columnen zerſpaltet, und auf jede Columne eine Anzahl von 50 Verbindungen angenommen wird: ſo kommen auf jede Seite 200, und mithin auf einen ganzen Bogen 800 Verbindungen. — Mit 800 in 479,001,600 dividiret, kommen 598,752 Bogen. Wenn nun ein Ballen Papier 5000 Bogen oder 10 Rieß, jedes Rieß 500 Bogen oder 20 Bücher, und jedes Buch 25 Bogen enthält: ſo gehören dazu 119 Ballen, 7 Rieß, 10 Bücher, und 2 Bogen, von welchen jeder der zwölf Decompoſiten 49,896 Bogen, das iſt 9 Ballen, 9 Rieß, 15 Buch und 21 Bogen, (der eine für die mit a, der andere für die mit b, der dritte für die mit c, u. ſ. w. anhebende Verbindungen) zu bearbeiten hat. — Da ſelbige dieſe Arbeit nicht bloß mechaniſch verrichten können, indem ſie die Verbindungen nicht copiren, ſondern machen und alſo dabey denken müſſen: ſo laſſe ich einen jeden nicht mehr als ſechs Bogen täglich vollenden. Mit 6 in 49,896 dividiret, kömmt 8316, und ſo viele Tage hat ein jeder an ſeinem Buchſtaben zu arbeiten. Wenn man mit der gemeinen Anzahl der Tage eines Jahres 365 in die Zahl 8316 dividiret, kommen 22 Jahre und 286 Tage, und ſo viele Zeit wird, unter vorigen Bedingungen, zur Vollendung der zwiſchen 12 Perſonen vertheilten Decompoſition der Zahl 12 erfordert.

§. 394.

Wenn man ſich die Decompoſition einer Zahl erleichtern will, ſo gehet man folgendergeſtalt zu Werke, als:

a) Die Zahl 4 in den 4 Größen a b c d binariſch zu zergliedern.

Setzet jede Größe mit einer der drey andern nach und nach zuſammen,

als a mit bcd;
b mit acd;
c mit abd,
und d mit abc.

Vermittelst dieses Processes kommen, da jede Größe einmal initial werden muß, die daraus entstehenden Verbindungen in der besten Ordnung zum Vorschein, und es entsteht

aus a{ab, ac, ad}, aus b{ba, bc, bd}, aus c{ca, cb, cd}, aus d{da, db, dc.

β) Die Zahl 4 in den vier Größen abcd ternarisch zu zergliedern.

Setzet nach Anleitung der vorhergehenden binarischen Zergliederung, jede Binion mit einer der zwey andern Größen nach und nach zusammen: so entsteht

aus ab{abc, abd}	aus ba{bac, bad}	aus ca{cab, cad}	aus da{dab, dac}
aus ac{acb, acd}	aus bc{bca, bcd}	aus cb{cba, cbd}	aus db{dba, dbc}
aus ad{adb, adc}	aus bd{bda, bdc}	aus cd{cda, cdb}	aus dc{dca, dcb}

γ) Die Zahl 4 in den vier Größen abcd quaternarisch zu zergliedern.

Setzet nach Anleitung der vorhergehenden ternarischen Zergliederung, jede Ternion mit der vierten übrig gebliebenen Zahl zusammen, so entsteht

aus abc	abcd	aus bac	bacd	aus cab	cabd	aus dab	dabc
abd	abdc	bad	badc	cad	cadb	dac	dacb
acb	acbd	bca	bcad	cba	cbad	dba	dbac
acd	acdb	bcd	bcda	cbd	cbda	dbc	dbca
adb	adbc	bda	bdac	cda	cdab	dca	dcab
adc	adcb	bdc	bdca	cdb	cdba	dcb	dcba

§. 395.

§. 395.

Man wird in den vorhergehenden Decompositionen gesehen haben, wie eine jede durch eine besondere Initialgröße bezeichnete Abtheilung, einer jeden andern Abtheilung in Absicht auf die Anzahl der darinnen enthaltnen Verbindungen gleich ist. So enthält z. E. in der binarischen Zergliederung von abcd, die Abtheilung a drey Verbindungen; die von b ebenfalls, u. s. w. Es findet hier also nicht, wie bey den ausschliessenden Verbindungen des vorhergehenden ersten Abschnitts, wo die Abtheilungen beständig kleiner wurden, und sich zuletzt in die Einheit verlohren, die Stellung der Verbindungen in eine dreyeckigte Figur statt, sondern die Stellung derselben ist viereckigt. Die aus der abwechselnden Verbindung unähnlicher Größen entstehenden Progreßionalen sind also, figürlich betrachtet, viereckigte Zahlen, von welchen die Folge der binarischen 2. 6. 12. 20. 30. 42 u. s. w. unter der Benennung von Pronikzahlen bekannt ist.

Dritter Abschnitt.

Von der ausschliessenden Verbindung wiederholter Größen.

§. 396.

Es wird entweder nur eine einzige Größe wiederholet, z. E. aab, oder es werden ihrer mehrere wiederholet, z. E. aabb. In dem leztern Falle wird jede Größe entweder sovielmal als die andere wiederhohlet, z. E. so wie in aabb; oder es wird die eine mehrmal als die andere wiederholet, z. E. aaabb. Es entstehen also dreyerley Classen von Fällen.

In die erste Classe von Fällen gehören alle folgende und ähnliche, worinnen nicht mehr als eine einzige Größe zwey- oder mehrmal gesetzet wird, z. E.

aab	aaab	aaaab
aabc	aaabc	aaaabc
aabcd	aaabcd	aaaabcd
aabcde	aaabcde	aaaabcde u. ſ. w.

In die zweyte Claſſe von Fällen gehören alle diejenigen, worinnen mehrere Größen, und zwar die eine ſo vielmal als die andere, wiederholet werden. Z. E.

aabb	aaabbb	aaaabbbb
aabbc	aaabbbc	aaaabbbbc, u. ſ. w.

In die dritte Claſſe von Fällen gehören alle diejenigen, worinnen von den wiederholten Größen die eine mehrmal als die andere geſetzet worden, z. E.

aaabb	aaabbcc	aaaabbbcc
aaabbc, ꝛc.	aaabbccd, ꝛc.	aaaabbbccd, u. ſ. w.

§. 397.

Auf keine andere als die vorhergehende dreyfache Art laſſen ſich die in die Lehre von der ausſchlieſſenden Verbindung wiederholter Größen gehörigen Aufgaben bequem claſſificiren, und wenn man Progreßionen verfertigen will, ſo iſt es nöthig, die Anzahl der Dinge nicht durch die neue Wiederholung einer bereits wiederholten Größe, ſondern durch Hinzufügung einer neuen unähnlichen oder verſchiednen Größe wachſen zu laſſen, z. E.

aab	und nicht aab
aabc	aaab
aabcd	aaaab
u. ſ. w.	

§. 398.

Bey der Wiederholung der Größen iſt es zwar im Grunde einerley, in was für einer Ordnung die Wiederholungen erſcheinen, und ob man z. E. ſchreibet

a) aaabbc

α)	aaabbc,	das ist	3. 2. 1
β)	oder abbccc,		1. 2. 3
γ)	oder aaabcc,		3. 1. 2
δ)	oder aabbbc,		2. 3. 1
ε)	oder aabccc,		2. 1. 3
ζ)	oder abbbcc,		1. 3. 2

indem nirgends mehr als drey verschiedne Größen a, b und c erscheinen, von welchen eine drey- eine andere zwey- und eine dritte dreymal gesetzet worden. Es ist aber der Deutlichkeit wegen besser, entweder die größere Anzahl der Wiederholungen vor der kleinern, wie bey (α), oder umgekehrt die kleinere vor der größern, wie bey (β), beständig vorhergehen zu lassen. Wir werden uns der Schreibart bey (α) bedienen, da solche in Ansehung der Progreßionen die natürlichste ist.

§. 399.

Aufgaben, worinnen gar keine Verschiedenheit statt findet, sondern alle Dinge einerley sind, wie z. E. die vier Dinge aaaa, sind keiner eigentlichen, sondern nur einer **nachgeahmten Combination** fähig. Denn, wenn man sie auch je zwey, je drey, je vier, u. s. w. nach Beschaffenheit ihrer Anzahl, zum Vorschein bringen kann, z. E. allhier aa, aaa, aaaa; so hat sich dennoch nicht die Combination, in jeder Quotenität zu verstehen, über alle gegebne Größen, sondern **nur über einige derselben**, welche willkührlich aus ihnen ausgehoben worden, erstrecket. In dergleichen nachgeahmten Combinationen ist die Zahl der Combination allezeit der Zahl der Aufgabe —1 gleich; man müßte denn die Betrachtung eines **Einers** oder einer **Union** hinzufügen wollen, in welchem Falle zwar nicht so viele Verbindungen aber doch so viele Veränderungen angegeben werden können, als einerley Größen gegeben werden; und die vier wiederholten Größen würden alsdenn unter folgenden vier Gestalten gezeiget werden können, als: a, aa, aaa, und aaaa.

§. 400.

Zu Folge des im vorhergehenden §. bemerkten Umstandes geschicht es, daß in vermischten Fällen, das ist solchen, welche theils aus einerley, theils aus verschiednen Größen bestehen,

α) die Anzahl der binarischen Verbindungen einer Aufgabe dadurch im geringsten nicht vermehret wird, wenn eine Größe mehr als zweymal gesetzet worden. Z. E. in aaabc, oder aaaabc sind nicht mehr Binionen enthalten, als in aabc; ferner sind in aaabbbc, oder in aaaabbbbc nicht mehr Binionen enthalten, als in aabbc; u. s. w.

β) Daß die Anzahl der ternarischen Verbindungen einer Aufgabe dadurch im geringsten nicht vermehret wird, wenn eine Größe mehr als dreymal gesetzet worden; z. E. in aaaabbbbcd sind nicht mehr Ternionen enthalten, als in aaabbbcd, u. s. w.

γ) Daß die Anzahl der quaternarischen Verbindungen einer Aufgabe dadurch im geringsten nicht vermehret wird, wenn eine Größe mehr als viermal gesetzet worden.

Alles dieses ist nun mit leichter Mühe auf die folgende Verbindungsarten zu appliciren, und gilt nicht nur von den exclusivischen Verbindungen wiederholter Größen, von welchen in diesem Abschnitt gehandelt wird, sondern auch von den alternativischen Verbindungen derselben, die in dem folgenden Abschnitt vorkommen werden.

§. 401.

Es ist mühsam, die Lehre von der ausschließenden Verbindung wiederholter Größen, überall in gleichförmige leichte Specialregeln zu bringen, und daraus allgemeine Regeln abzuziehen. Indessen ist es möglich, auch ohne mit Regeln für jeden Fall und dessen verschiedne Quotenitäten versehen zu seyn, vermittelst der bloßen Addition, alle mögliche

Ver-

Verbindungszahlen jeder Quotenität zu finden, und Progreßionstabellen zu construiren, wenn man zuvor jede erste Aufgabe der zu construirenden Tabelle durch alle Quotenitäten zergliedert, und durch diese Zergliederung die Anzahl der darinnen enthaltnen Verbindungen von jeder Art entwickelt hat. Ich werde diesen Weg, als den bequemsten, erwählen, und nur hin und wieder, wo ich den Vortheil gehabt, ohne vielen Zeitverlust einige Regeln zu entdecken, solche hinzufügen.

Erste Classe der Fälle.

Wenn nur eine einzige Größe wiederholet, und solche zwey- oder mehrmal gesetzet wird.

§. 402.

Wenn nur eine einzige Größe wiederholet und solche zweymal gesetzet wird, so kann die erste Aufgabe keine andere als aa, die zweyte keine andere als aab, und die dritte keine andere als aabc seyn, u. s. w. Wir bedürfen, vermöge des vorhergehenden §. keiner andern als der ersten Aufgabe aa. Da solche aus nicht mehr als zwey Größen besteht, so ist ihre höchste Quotenität binarisch, und da zwey Größen niemals mehr als eine einzige exclusivische Binion enthalten, wenn solche auch unter sich verschieden sind, so merken wir diese Binion durch 1, nehmen die Zahlen der Verschiedenheit zu Hülfe, und fangen an zu rechnen. Es sind aber die Zahlen der Verschiedenheit die natürlichen Zahlen 1. 2. 3. 4. 5, u. s. w., und zwar 1 wegen aa; 2 wegen aab; 3 wegen aabc; 4 wegen aabcd; u. s. w. Nun addiret folgendergestalt:

α) um die binarischen Verbindungszahlen zu finden.

1) für aa. Saget: aa enthält 1 Binion, und giebet die erste binarische Zahl 1.

2) für aab. Addiret die erste Zahl der Verschiedenheit zur zur ersten binarischen Zahl. Jene ist = 1, wegen

gen aa, und dieſe ebenfalls = 1 nach dem vorhergehenden; alſo 1 + 1 = 2. In aab ſind alſo 2 Binionen enthalten, oder die zweyte binariſche Zahl iſt 2.

3) für aabc. Addiret die zweyte Zahl der Verſchiedenheit zur zweyten binariſchen Zahl. Jene iſt 2 wegen aab, und dieſe iſt auch 2 nach dem vorhergehenden. Alſo 2 + 2 = 4. In aabc ſind alſo 4 Binionen enthalten, oder die dritte binariſche Zahl iſt 4.

4) für aabcd. Addiret die dritte Zahl der Verſchiedenheit zur dritten binariſchen Zahl. Jene iſt 3 wegen aabc, und dieſe iſt 4 nach dem vorhergehenden. Alſo 3 + 4 = 7. In aabcd, ſind alſo 7 Binionen enthalten, oder die vierte binariſche Zahl iſt 7, und ſo weiter.

Dieſer Proceß kann auf folgende Art vorgeſtellet werden:

aa 1 = 1
aab 1 + 1 = 2
aabc 1 + 1 + 2 = 4
aabcd 1 + 1 + 2 + 3 = 7
aabcde 1 + 1 + 2 + 3 + 4 = 11 und ſo weiter.

β) Um die ternariſchen, quaternariſchen und alle folgende höhere Verbindungen zu finden.

Addiret die gefundenen binariſchen Verbindungszahlen 1. 2. 4. 7. 11. 16 u. ſ. w. nach und nach, ſo kommen die ternariſchen. Addiret die kommenden ternariſchen nach und nach, ſo erſcheinen die quaternariſchen; und durch einen ähnlichen Proceß werden aus den quaternariſchen die quinariſchen erzeuget, u. ſ. w. Man ſehe folgende Vorſtellung.

aab	1=1	aabc	1=1
aabc	1+2=3	aabcd	1+3=4
aabcd	1+2+4=7	aabcde	1+3+7=11
aabcde	1+2+4+7=14	aabcdef	1+3+7+14=25
aabcdef	1+2+4+7+11=25	aabcdefg	1+3+7+14+25=50

u. ſ. w.

§. 403.

Wenn man die combinatoriſchen Zahlen dieſer Art auf einer Progreſsionstabelle beyſammen haben will, ſo bringe man zuvörderſt die Zahlen der Verſchiedenheit zu Papier; bezeichne jedes Fach, in welches die allererſten Verbindungszahlen jeder Quotenität kommen, mit 1, und addire hernach wie gelehret worden, oder auch von einem Fache zum andern, welches leztere Verfahren die Operation annoch erleichtern wird, und ſolches beſtehet darinnen z. E. daſs man die neben einander ſtehende binariſche Zahl 2 und ternariſche 1 ſummiret, um daraus die ternariſche Zahl 3 hervorzubringen; daſs man die binariſche Zahl 4 und die ternariſche 3 ſummiret, um daraus die ternariſche Zahl 7 hervorzubringen, u. ſ. w. Die Anwendung wird mit leichter Mühe weiter zu machen ſeyn. Hier iſt der Anfang einer Progreſsionstabelle, welche nach Belieben weiter erſtrecket werden kann.

Progreſsionstabelle KK.

Wenn nur eine einzige Gröſse wiederholet, und ſolche zweymal geſetzet wird.

Combinanda.	Diverſa.	Bin.							
aa	1	1	Tern.						
aab	2	2	1	Quat.					
aabc	3	4	3	1	Quin.				
aabcd	4	7	7	4	1	Sen.			
aabcde	5	11	14	11	5	1	Sept.		
aabcdef	6	16	25	25	16	6	1	Oct.	
aabcdefg	7	22	41	50	41	22	7	1	Nou.
aabcdefgh	8	29	63	91	91	63	29	8	1

§. 404.

Wenn man die combinatoriſchen Zahlen der vorhergehenden Progreſsionstabelle KK mit denen aus der Tabelle

belle FF oder mit den Trigonalzahlen vergleichet, als:

(α)	(β)	(γ)
1. 3. 6. 10. 15	1. 4. 10. 20. 35	1. 5. 15. 35. 70
1. 2. 4. 7. 11	1. 3. 7. 14. 25	1. 4. 11. 25. 50
0. 1. 2. 3. 4	0. 1. 3. 6. 10	0. 1. 4. 10. 20
u. s. w.		

so findet man, daß die Differenzen der binarischen Zahlen bey (α) die natürlichen Zahlen 1. 2. 3. 4 ꝛc. sind; daß die Differenzen der ternarischen Zahlen bey (β) die binarischen Zahlen 1. 3. 6. 10. aus der Tabelle FF und daß die Differenzen der quaternarischen Zahlen bey (γ) die ternarischen Zahlen 1. 4. 10. 20 aus der Tabelle FF sind. Wir sehen hieraus, daß es möglich ist, mit Hülfe der combinatorischen Zahlen aus der Tabelle FF die für die Tabelle KK zu finden, und zwar

α) daß die binarischen Zahlen 1. 2. 4. 7. 11. der Tabelle KK gefunden werden, wenn man von den binarischen Zahlen 1. 3. 6. 10. der Tabelle FF die mit 0 anfangenden natürlichen Zahlen oder ihre Wurzeln abziehet;

β) daß die ternarischen Zahlen 1. 3. 7. 14. 25 der Tabelle KK gefunden werden, wenn man von den ternarischen Zahlen 1. 4. 10. 20 der Tabelle FF die mit 0 anfangenden binarischen Zahlen eben dieser Tabelle abziehet;

γ) daß die quaternarischen Zahlen 1. 4. 11. 25. 50 der Tabelle KK gefunden werden, wenn man von den quaternarischen Zahlen 1. 5. 15. 35. 70 der Tabelle FF die mit 0 anfangenden ternarischen Zahlen eben dieser Tabelle abziehet, als:

1. 3. 6. 10. 15	1. 4. 10. 20. 35	1. 5. 15. 35. 70
0. 1. 2. 3. 4	0. 1. 3. 6. 10	0. 1. 4. 10. 20
1. 2. 4. 7. 11	1. 3. 7. 14. 25	1. 4. 11. 25. 50

Da

Da sich auf ähnliche Art die quinarischen Zahlen der Tabelle KK finden lassen, wenn man von denen aus der Tabelle FF die mit o anfangenden quaternarischen eben dieser Tabelle abziehet; und da sich die senarischen Zahlen der Tabelle KK finden lassen, wenn man von denen aus der Tabelle FF die mit o anfangenden quinarischen eben dieser Tabelle abziehet, u. s. w.: so haben wir also eine Regel entdecket, nach welcher die Richtigkeit der, durch Hülfe des vorhin erklärten Additionsprocesses, gefundnen combinatorischen Zahlen für die Progreſsionstabelle KK geprüfet werden kann.

§. 405.

Wir verfolgen die Spur unserer Entdeckung, und finden, daß in jeder Aufgabe der hieher gehörigen Fälle beyderley Arten von Zahlen, die von welcher eine andere abgezogen werden soll und die abzuziehende, enthalten sind, und daß die erstern gefunden werden können durch die Anzahl aller Dinge, und die andern durch die Zahl der nicht wiederholten Gröſsen. Wir brauchen mit diesen beyderley Arten von Zahlen also nur zuvörderst auf eben die Art umzugehen, als mit den Aufgaben des ersten Abschnitts von der ausschliessenden Verbindung unähnlicher Gröſsen, und hernach die kleinere Zahl von der gröſsern abzuziehen: so werden wir Regeln finden, die unsern Absichten auf jeden Fall gemäſs sind, als:

Die Anzahl der binarischen Verbindungen einer Zahl, in welcher eine Gröſse zweymal gesetzet worden, zu finden.

1) Multipliciret die Zahl aller Dinge mit der zunächst vorhergehenden kleinern Zahl, und dividiret das Product mit 1 X 2. 2) Ziehet von dem Quotienten die Zahl der nicht wiederholten Gröſsen, oder die Zahl der Aufgabe — 2, ab; als die binarischen Verbindungen zu finden

a) von

α) von aab. Die Zahl aller Dinge ist = 3, und die Zahl der nicht wiederholten Größen ist = 1. Also

1) $\frac{3 \times 2}{1 \times 2} = \frac{6}{2} = 3$

2) 3 — 1 = 2. Die gefundene Anzahl der in aab enthaltnen binarischen Verbindungen.

β) von aabcdefg. Die Zahl aller Dinge ist = 8, und die Zahl der nicht wiederholten Größen = 6.

1) $\frac{8 \times 7}{1 \times 2} = \frac{56}{2} = 28$

2) 28 — 6 = 22. Die gefundne Anzahl der in aabcdefg enthaltnen binarischen Verbindungen.

Die Anzahl der ternarischen Verbindungen einer Zahl, in welcher eine Größe zweymal gesetzet worden, zu finden. §. 406.

Multipliciret die Zahl aller Dinge mit den zunächst vorhergehenden zwey kleinern Zahlen; dividiret das Product mit 1 × 2 × 3, und behaltet den Quotienten. 2) Berechnet die Anzahl der binarischen Verbindungen in der Zahl der nicht wiederholten Größen, d. i. in der Zahl der Aufgabe — 2. 3) Ziehet die gefundnen binarischen Verbindungen von dem Quotienten der ersten Operation ab; als die ternarischen Verbindungen zu finden.

α) Von aabcd. Die Zahl aller Dinge ist = 5, und diese — 2 = 3. Also

1) $\frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = \frac{60}{6} = 10$

2) $\frac{3 \times 2}{1 \times 2} = \frac{6}{2} = 3$

3) 10 — 3 = 7. Die gefundne Anzahl der in aabcd enthaltnen ternarischen Verbindungen.

β) Von aabcdefg. Die Zahl aller Dinge ist = 8, und diese — 2 = 6. Also

1) $\frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = \frac{336}{6} = 56$

2) $\frac{6 \times 5}{1 \times 2} = \frac{30}{2} = 15$

3) 56 — 15 = 41. Die gefundne Anzahl der in aabcdefg enthaltnen ternarischen Verbindungen.

Die

Die Anzahl der quaternariſchen Verbindungen einer Zahl, in welcher eine Größe zweymal geſetzet worden, zu finden.

1) Multipliciret die Zahl aller Dinge mit den zunächſt vorhergehenden drey kleinern Zahlen; dividiret das Product mit 1 X 2 X 3 X 4, und behaltet den Quotienten. 2) Berechnet die Anzahl der ternariſchen Verbindungen in der Zahl der nicht wiederholten Größen, d. i. in der Zahl der Aufgabe — 2. 3) Ziehet die gefundnen ternariſchen Verbindungen von dem Quotienten der erſten Operation ab; als die quaternariſchen Verbindungen zu finden

α) von aabcd. Die Zahl aller Dinge iſt = 5, und dieſe — 2 = 3. Alſo

1) $\frac{5\times4\times3\times2}{1\times2\times3\times4} = \frac{120}{24} = 5$

2) $\frac{3\times2\times1}{1\times2\times3} = \frac{6}{6} = 1$

3) 5 — 1 = 4. Anzahl der gefundnen Quaternionen.

β) von aabcdefg. Die Zahl aller Dinge iſt = 8, und dieſe — 2 = 6. Alſo

1) $\frac{8\times7\times6\times5}{1\times2\times3\times4} = \frac{1680}{24} = 70$

2) $\frac{6\times5\times4}{1\times2\times3} = \frac{120}{6} = 20$

3) 70 — 20 = 50. Gefundene Quaternionen.

§. 407.

Da die vorhergehenden Specialregeln gleichförmig ſind, ſo faſſen wir ſie in folgender Generalregel zuſammen.

Generalregel.

Die Anzahl der Verbindungen von jeder Art in einer Zahl zu entwickeln, worinnen eine Größe zweymal geſetzet worden.

1) Berechnet die Combinationen der Anzahl aller Dinge nach der verlangten Quotenität, ſo wie bey den ausſchlieſſenden Verbindungen unähnlicher Dinge, oder ſuchet ſie in einer ausgerechneten Tabelle. 2) Berechnet auch die Combinationen der Zahl der Aufgabe — 2; doch nicht nach

der verlangten, sondern nach der vorhergehenden Quotenitäe.
3) Ziehet die vermittelst der zweyten Operation gefundne Zahl von der vermittelst der ersten Operation gefundnen Zahl ab. Der Rest giebt die verlangte Anzahl der Verbindungen.

§. 408.

Hier ist eine Decomposition der sechs Größen a a b c d e.

Binarisch.

aa ab ac ad ae	5
bc bd be	3
cd ce	2
de	1
Summe	11

Ternarisch.

aab aac aad aae	4
abc abd abe	3
acd ace	2
ade	1
	10
— — bcd bce	2
bde	1
	3
— — — cde	1, u. 10+3+1=14.

Quaternarisch.

aabc aabd aabe	3
aacd aace	2
aade	1
	6
— abcd abce	2
abde	1
	3
— — acde	1
— — bcde	1

und 6+3+1+1=11.

Quinarisch.

aabcd aabce	2
aabde	1
	3
— aacde	1
— abcde	1, und 3+1+1=5.

Senarisch.

aabcde	1

Anmerkung.

Um die Summe sämmtlicher Verbindungen einer gegebnen Zahl zu finden, giebet Ozanam folgende Regel; z. E.

Zu wissen, auf wie vielerley Art überhaupt die vier Größen aabc verbunden werden können.

2) Da die Größe a zweymal gesetzt worden, so nehmet die Zahl

Zahl 2 und behaltet ſolche. 2) Addiret 1 zur vorigen Zahl 2; kommt 3, und multipliciret die Zahl 3 durch die Anzahl der Gröſse b. Da ſolche nur einmal vorkömmt, ſo iſt $3 \times 1 = 3$, welche 3 ebenfalls zu behalten iſt. 3) Addiret die 3 der zweyten Operation zur 2 der erſten, vermehret die Summe 5 um eine Einheit; kömmt 6, und multipliciret die 6 durch die Anzahl der Gröſsen c. Da ſolche nur einmal vorkömmt, ſo iſt $6 \times 1 = 6$. 4) Addiret die 6 zur 2 der erſten, und zur 3 der zweyten Operation. Die Summe $11 = 6 + 2 + 3$ zeiget, daſs die 4 Gröſsen aabc auf eilferley Art überhaupt verbunden werden können. Wenn man aber in die vorhin beygebrachte und richtig berechnete Progreſsionstabelle ſiehet, ſo findet man, daſs in aabc nicht mehr als vier binariſche Verbindungen, drey ternariſche und eine quaternariſche enthalten ſind, und $4 + 3 + 1$ ſind $= 8$. Es muſs Ozanam alſo die Einer der vier Gröſsen aabc ohne Zweifel mitgezählet haben, als $a = 1$, $b = 1$, und $c = 1$. In dieſem Falle kommen zwar eilf Veränderungen, aber es ſind nur immer acht Combinationen, und von den Combinationen redet der berühmte Verfaſſer eigentlich. Wenn man alſo die Combinationen haben will, ſo muſs die gegebne Zahl der Dinge, (allhier 4) — 1, und alſo die Zahl 3 von der Summe der eilf Veränderungen abgezogen werden. Uebrigens kann man die Summe ſämtlicher Verbindungen einer Zahl in allen Fällen weit bequemer finden, wenn man die Progreſsionstabelle zur Hand nimmt, und die Specialverbindungen der Zahl addiret; und will man alle Veränderungen der hieſelbſt excluſiviſch verbundnen Zahl bey einander haben, ſo addire man die Einer hinzu.

§. 409.

Wir haben uns bisher mit Fällen beſchäftiget, wo eine einzige Gröſse zweymal geſetzet worden. Wir wollen anitzo Fälle vornehmen, wo eine einzige Gröſse dreymal geſetzet wird. Die erſte Aufgabe allhier kann keine andere ſeyn, als aaa; die zweyte aaab, die dritte aaabc, u. ſ. w. Wir bedürfen, vermöge §. 401. keiner andern als der erſten Aufgabe aaa. Da ſolche aus nicht mehr als drey Gröſsen beſteht, ſo iſt ihre höchſte Quotenität ternariſch; und wir haben alſo weiter nichts als die darinnen enthaltnen binariſchen und ternariſchen Verbindungen zu ſu-

chen. Diese sind nun leicht gefunden, α) indem nach §. 402. bey α), drey einerley Größen, binarisch betrachtet, nicht mehr enthalten als ihrer zwey; und da in aa nur eine einzige Binion ist, folglich in aaa auch nicht mehr als eine Binion seyn kann; und β) indem drey Größen niemals mehr als eine einzige exclusivische Ternion enthalten, wenn solche auch unter sich verschieden sind. Wir machen es also wie vorhin im §. 402, bemerken die gefundne Binion mit 1, die Ternion ebenfalls mit 1, nehmen die Zahlen der Verschiedenheit zu Hülfe, und fangen an auf bekannte Art mit gehöriger Anwendung zu rechnen, durch welchen Proceß alsdenn folgende Progreßionstabelle zum Vorschein kömmt.

Progreßionstabelle LL.

Wenn nur eine einzige Größe wiederholet, und solche dreymal gesetzet wird.

Combinanda.	Diuers.	Bin.	Tern						
aaa	1	1	1	Quat.					
aaab	2	2	2	1	Quin.				
aaabc	3	4	4	3	1	Sen.			
aaabcd	4	7	8	7	4	1	Sept.		
aaabcde	5	11	15	15	11	5	1	Oct.	
aaabcdef	6	16	26	30	26	16	6	1	Nou.
aaabcdefg	7	22	42	56	56	42	22	7	1
aaabcdefgh	8	29	64	98	112	98	64	29	8

§. 410.

Wenn man die combinatorischen Zahlen der vorhergehenden Tabelle LL mit denen aus der Tabelle FF oder mit den Trigonalzahlen vergleichet, (von welcher Vergleichung aber die binarischen Zahlen wegbleiben, indem sie mit den binarischen der Tabelle KK völlig einerley sind, und also in diesem Punkt die vorhergehende Tabelle LL nichts neues hat:) so findet man, α) daß die Differenzen der ternarischen

Zah

Zahlen die Zahlen 0. 2. 6. 12. 20, und also die duplirten Trigonalen 0. 1. 3. 6. 10, und also die duplirten binarischen Zahlen der Tabelle FF sind; β) daß die Differenzen der quaternarischen Zahlen die Zahlen 0. 2. 8. 20. 40. 70, und also die duplirten ternarischen Zahlen 1. 4. 10. 20. 35 der Tabelle FF sind; γ) daß die Differenzen der quinarischen Zahlen die Zahlen 0. 2. 10. 30. 70, und also die duplirten quaternarischen Zahlen 1. 5. 15. 35 der Tabelle FF sind, als:

1. 4. 10. 20. 35.	1. 5. 15. 35. 70	1. 6. 21. 56. 126
1. 2. 4. 8. 15.	1. 3. 7. 15. 30	1. 4. 11. 26. 56
2) 0. 2. 6. 12. 20.	2) 0. 2. 8. 20. 40	2) 0. 2. 10. 30. 70
0. 1. 3. 6. 10.	0. 1. 4. 10. 20	0. 1. 5. 15. 35

Wir sehen also hieraus, daß es möglich ist, mit Hülfe der combinatorischen Zahlen der Tabelle FF die Zahlen für die Tabelle LL zu finden, und zwar,

α) Daß die ternarischen Zahlen 1. 2. 4. 8. 15 der Tabelle LL gefunden werden, wenn man von den ternarischen Zahlen 1. 4. 10. 20. 35. 56 der Tabelle FF das Duplum der mit 0 anhebenden binarischen Zahlen 0. 1. 3. 6. 10. 15. 21 eben dieser Tabelle, und folglich 0. 2. 6. 12. 20. 30. 42, u. s. w. abziehet, als:

1.	4.	10.	20.	35.	56
0.	2.	6.	12.	20.	30
1.	2.	4.	8.	15.	26.

β) Daß die quaternarischen Zahlen 1. 3. 7. 15 ꝛc. der Tabelle LL gefunden werden, wenn man von den quaternarischen Zahlen 1. 5. 15. 35. 70 der Tabelle FF das Duplum der mit 0 anhebenden ternarischen Zahlen 0. 1. 4. 10. 20. 35 eben dieser Tabelle, und folglich 0. 2. 8. 20. 40. 70 abziehet, als:

1.	5.	15.	35.	70.	126	
0.	2.	8.	20.	40.	70	
1.	3.	7.	15.	30.	56.	

γ) Daß die quinariſchen Zahlen 1. 4. 11. 26. 56 der Tabelle LL gefunden werden, wenn man von den quinariſchen Zahlen 1. 6. 21. 56. 126 der Tabelle FF das Duplum der mit 0 anhebenden quaternariſchen Zahlen 0. 1. 5. 15. 35 ꝛc. eben dieſer Tabelle, und folglich 0. 2. 10. 30. 70 ꝛc. abziehet, als:

1.	6.	21.	56.	126.	252	
0.	2.	10.	30.	70.	140	
1.	4.	11.	26.	56.	112.	u. ſ. w.

Generalregel.

Die Anzahl der Verbindungen von jeder Art in einer Zahl zu entwickeln, worinnen eine Größe dreymal geſetzet worden. §. 411.

Operiret wie bey der Generalregel, nach welcher die Anzahl der Verbindungen von jeder Art in einer Zahl entwickelt worden, worinnen eine Größe zweymal vorgekommen; nur daß die in der zweyten Operation gefundne Zahl dupliret, und in der dritten dieſes Duplum abgezogen wird. Z. E. **Es ſeyn die quaternariſchen Verbindungen von aaabcdefg zu finden.** Wenn nun die Zahl aller Dinge $= 9$, und $9 - 2 = 7$, ſo ſind

1) Quaternionen von $9 = 126$
2) Ternionen von $7 = 35$.
   Duplum $2 \times 35 = 70$
3) $126 - 70 = 56$ Quaternionen in aaabcdefg.

§. 412.

Ich komme zu einem dritten Falle, wo eine einzige Größe viermal geſetzet iſt. Die erſte Aufgabe allhier iſt aaaa, die zweyte aaaab, die dritte aaaabc u. ſ. w. Wir bedürfen, vermöge §. 401. keiner andern als der erſten Aufgabe aaaa. Da ſolche aus vier Größen beſtehet, ſo iſt ihre höchſte Quotenität quaternariſch, und wir haben alſo

weiter

weiter nichts als die darinnen enthaltnen binarischen, ternarischen und quaternarischen Verbindungen zu suchen. Diese sind nun leicht gefunden, α) indem nach dem §. 402. vier einerley Gröſsen, binarisch betrachtet, nicht mehr enthalten als ihrer zwey. Es wird in aaaa also nicht mehr als eine einzige Binion seyn. β) Indem nach eben demselben §. 402. vier Gröſsen, ternarisch betrachtet, nicht mehr enthalten als ihrer drey. Es wird in aaaa also nicht mehr als eine einzige Ternion seyn. γ) Indem vier Gröſsen niemals mehr als eine einzige excluſiviſche Quaternion enthalten, wenn sie auch verschieden sind. Wir machen es also, wie vorhin; bemerken die Anzahl der Binionen, Ternionen und Quaternionen eine jede durch 1, nehmen die Zahlen der Verschiedenheit zu Hülfe, und fangen an, auf bekannte Art mit gehöriger Anwendung zu rechnen, durch welchen Proceſs alsdenn folgende Progreſsionstabelle kömmt.

Progreſsionstabelle MM.

Wenn nur eine einzige Gröſse wiederholet, und solche viermal geſetzet wird.

Combinanden.	Diuerſe.	Bin.	Tern.	Quat.							
aaaa	1	1	1	1	Quin.						
aaaab	2	2	2	2	1	Sen.					
aaaabc	3	4	4	4	3	1	Sept.				
aaaabcd	4	7	8	8	7	4	1	Oct.			
aaaabcde	5	11	15	16	15	11	5	1	Nov.		
aaaabedef	6	16	26	31	31	26	16	6	1	Den.	
aaaabcdefg	7	22	42	57	62	57	42	22	7	1	Vnd.
aaaabcdefgh	8	29	64	99	119	119	99	64	29	8	1

§. 413.

Generalregel.

Die Anzahl der verschiedenen Verbindungen jeder Art für jede Menge von Gröſsen zu finden, unter welchen eine mehrmal geſetzt wird.

Erster Fall.

Wenn die Zahl der Wiederholung der Zahl der geforderten Quotenität gleich oder größer als diese ist.

Auflösung.

Suchet die geforderte quotenische Verbindung von der Zahl der Verschiedenheit — 1, und zugleich, wenn welche sind, die vorhergehenden. Summiret alles, und addiret die Zahl der Verschiedenheit. Das Collect ist die gesuchte Zahl.

Es sey von aabcdefgh die Anzahl der Binionen zu finden. Hier ist die Zahl der Wiederholung 2 gleich der Zahl der geforderten Quotenität 2, indem Binionen gesuchet werden sollen. Die Zahl der Verschiedenheit ist 8 und 8 — 1 = 7. Also

Binionen von 7 sind	21
Vorhergehende Verbindungen —	0
Zahl der Verschiedenheit	8
	29 Binionen in aabcdefgh.

Es sey von aaaabcdefg die Anzahl der Ternionen zu finden. Hier ist die Zahl der Wiederholung 4 größer als die Zahl der geforderten Quotenität 3, indem Ternionen gesucht werden sollen. Die Zahl der Verschiedenheit ist 7 und 7 — 1 = 6. Also

Ternionen von 6 sind —	— 20
Vorhergehende Binionen von 6 —	15
Die Zahl der Verschiedenheit —	7
	42 Ternionen in aaaabcdefg.

Zweyter Fall.

Wenn die Zahl der Wiederholung kleiner ist als die Zahl der geforderten Quotenität.

Auflöſung.

1) Subtrahiret die Zahl der Wiederholung von der Zahl der geforderten Quotenität.

2) Suchet die geforderte quoteniſche Verbindungen der Zahl der Verſchiedenheit — 1, und zugleich die vorhergehenden bis auf diejenige incluſive, welche durch die gefundene Zahl der erſten Operation angezeiget wird. Summiret alles.

Es ſeyn von aaaabcdefgh die Anzahl der Octonionen zu finden. Hier iſt die Zahl der Wiederholung 4 kleiner als die Zahl 8 der geforderten Quotenität. Die Zahl der Verſchiedenheit iſt 8 und 8 — 1 = 7. Alſo

1) 8 — 4 = 4. Die quoteniſchen Verbindungen ſind alſo bis auf die Quaternionen incluſive zu ſummiren.

2) Octonionen von 7 — 0
Septenionen — 1
Senionen — 7
Quinionen — 21
Quaternionen — 35
64 Octonionen von aaaabcdefgh.

Zweyte Claſſe der Fälle.

Wenn zwey und mehrere Gröſſen wiederholet werden, und eine jede zweymal geſetzet wird.

§. 414.

Wenn zwey verſchiedne Gröſſen wiederholet werden, und eine jede zweymal geſetzet wird: ſo iſt die erſte Aufgabe aabb. Die zweyte aabbc, die dritte, aabbcd, u. ſ. w. Wir bedürfen, vermöge §. 401. keiner andern als der erſten Aufgabe aabb. Da ſolche aus vier Gröſſen beſteht: ſo iſt ihre höchſte Quotenität quaternariſch,

und wir müssen also die darinnen enthaltnen binarischen, ternarischen und quaternarischen Verbindungen suchen. Dieses geschicht vermittelst der Zergliederung, durch welche man findet, daß in aabb nicht mehr als drey Binionen, zwey Ternionen und eine Quaternion enthalten sind, als:

aa | bb	aab	aabb
ab	abb	1 Quaternion.
3 Binionen.	2 Ternionen.	

Wenn wir die Zahlen der Verschiedenheit zu diesen gefundnen Datis 3. 2. 1 setzen, und jedes Fach, in welches die allererſten combinatorischen Zahlen jeder Quotenität kommen, mit 1 zum voraus bezeichnen: so wird vermittelst des bekannten, gehörig anzuwendenden, Additionsprocesses folgende Progreßionstabelle hervorgebracht werden.

Progreßionstabelle NN.

Wenn zwey Größen wiederholet werden, und jede zweymal gesetzet wird.

Combinanda.	Diverſa.	Bin.	Tern.	Quat.	Quin.	Sen.	Sept.	Oct.	Nou.	Dec.
aabb	2	3	2	1						
aabbc	3	5	5	3	1					
aabbcd	4	8	10	8	4	1				
aabbcde	5	12	18	18	12	5	1			
aabbcdef	6	17	30	36	30	17	6	1		
aabbcdefg	7	23	47	66	66	47	23	7	1	
aabbcdefgh	8	30	70	113	132	113	70	30	8	1

§. 415.

Wenn drey verschiedne Größen wiederholet werden, und eine jede zweymal gesetzet wird: so ist die erste Aufgabe aabbcc, die zweyte aabbccd, die dritte aabbccde, u. s. w. Wir bedürfen, vermöge §. 401. keiner andern als der ersten Aufgabe aabbcc. Da solche aus sechs Größen besteht, so ist ihre höchste Quotenität senarisch

rischen, und wir müssen also die darinnen enthaltnen binarischen, ternarischen, quaternarischen, quinarischen und senarischen Verbindungen suchen. Dieses geschicht vermittelst der Zergliederung, durch welche man findet, daß in aabbcc sechs Binionen, sieben Ternionen, sechs Quaternionen, drey Quinionen und eine Senion enthalten sind, als:

aa	bb	cc	aab	bbc	aabb	aabbc	aabbcc		
ab	bc		aac	bcc	aabc	aabcc	1 Sen-		
ac			abb		aacc	abbcc	sion.		
6 Binionen.			abc		abbc	3 Qui-			
			acc		abcc	nionen.			
			7 Ternio-		bbcc				
			nen.		6 Qua-				
					ternionen.				

Wenn wir die Zahlen der Verschiedenheit zu den gefundnen Zahlen 6. 7. 6. 3. 1 setzen, und jedes Fach, in welches die allererstern combinatorischen Zahlen jeder Quotenität kommen, mit 1 zum voraus bezeichnen: so wird, vermittelst des bekannten gehörig anzuwendenden Additionsprocesses folgende Progreßionstabelle hervorgebracht werden.

Progreßionstabelle OO.

Wenn drey Größen wiederholet werden, und jede zweymal gesetzet wird.

Combinanda.	Diuerſa.	Bin.	Tern.	Quat.	Quin.	Sen.				
aabbcc	3	6	7	6	3	1	Sept.			
aabbccd	4	9	13	13	9	4	1	Oct.		
aabbccde	5	13	22	26	22	13	5	1	Non.	
aabbccdef	6	18	35	48	48	35	18	6	1	Den.
aabbccdefg	7	24	53	83	96	83	53	24	7	1
aabbccdefgh	8	31	77	136	179	179	136	77	31	8

§. 416.

§. 416.

Hier ſind annoch zwey Progreßionstabellen, eine wenn vier, und eine andere, wenn fünf Größen wiederholet werden, und jede zweymal geſetzet wird.

Progreßionstabelle PP.

Wenn vier Größen wiederholet werden, und jede zweymal geſetzet wird.

§. 417.

	Din.	Bin.	Tern.	Quat.	Quin.	Sen.	Sept.	Oct.				
aabbccdd	4	10	16	19	16	10	4	1	Nou.			
aabbccdde	5	14	26	35	35	26	14	5	1	Den.		
aabbccddef	6	19	40	61	70	61	40	19	6	1	Vnd.	
aabbccddefg	7	25	59	101	131	131	101	59	25	7	1	Duod.
aabbccddefgh	8	32	84	160	232	262	232	160	84	32	8	1

Progreßionstabelle QQ.

Wenn fünf Größen wiederholet werden, und jede zweymal geſetzet wird.

	Diuerſ.	Bin.	Tern.	Quat.	Quin.	Sen.	Sept.	Octon.	Nou.	Den.				
aabbccddee	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1	Vnden.			
aabbccddeef	6	20	45	75	96	96	75	45	20	6	1	Duod.		
aabbccddeefg	7	26	65	120	171	192	171	120	65	26	7	1	Tred.	
aabbccddeefgh	8	33	91	185	291	363	363	291	185	91	33	8	1	Quatrd.
aabbccddeefghi	9	41	124	276	476	654	726	654	476	276	124	41	9	1

§. 417.

In einer jeden Menge von dergleichen Größen, darin mehrere, und zwar jede zweymal, wiederholet werden, z. E. in aabbccde sind

1) alle Verbindungen enthalten, die in einer Menge von Größen sich finden, die der Zahl der Verschiedenheit gleich ist. Z. E. in aabbccde sind so viele Binionen, Ternionen, Quaternionen ꝛc. als in abcde.

2) Dazu kommen aber noch die Verbindungen, welche durch die Wiederholung der Größen entstehen, und zwar besondere Verbindungen für aa, eben so viele für bb, eben so viele für cc u. s. w. Sucht man nun z. E. die Binionen, Ternionen ꝛc. von aabcde, von bbacde, von ccabde (es sind aber in aabcde, eben so viele Binionen, Ternionen ꝛc. enthalten, als in bbacde ꝛc. indem die Verschiedenheit der Buchstaben hier keine Aenderung macht, wenn nur die Anzahl der Größen dieselbe bleibt), und subtrahirt man von diesen die Binionen, Ternionen ꝛc. welche darin enthalten sind, insofern hier wiederum auch abcde ihre Verbindungen geben: so findet man, wie viele Binionen, Ternionen, Quaternionen ꝛc. für die Wiederholung von a, b, u. s. w. zu denen von abcde noch dazu kommen. Z. E. in abcde sind 10 Ternionen, in aabcde sind 14 Ternionen; da nun 14 — 10 = 4, so kommen zu jenen 10 für die Wiederholung von a noch 4 Ternionen, eben so viele für die Wiederholung von b und von c, folglich für aabbcde 8, für aabbccde 12, u. s. w.

3) Ist die Zahl der geforderten Quotenität so groß, daß auch aabb, aabbcc ꝛc. eine oder mehrere neue Verbindungen geben (und dis geht bey den Quaternionen an, indem aabb eine Quaternion giebt); so muß auch hierauf in der Rechnung gesehen werden. Hier kommen nun nach und nach verschiedene Producte heraus, von denen aus nachstehender Tabelle, die sogleich erklärt werden soll, zu sehen ist, nach welcher Regel die Factoren derselben zu nehmen sind. Tabelle

Tabelle der Producte

zur Erfindung der Combinationen einer Zahl, in welcher mehrere Größen, jede zweymal, wiederholet werden.

§. 418.

	Repet.		*Diuerſ.*		*Repet.*		*Diuerſ.*		*Repet.*		*Diuerſ.*		*Repet.*		*Diuerſ.*		*Repet.*		*Diuerſ.*		*Repet.*
IV. nion.	Bin.	—	—	-																	
V. nion.	Bin.	×	Un.	-2																	
VI. nion.	Bin.	×	Bin.	-2	Tern.	—	—	-													
VII. nion.	Bin.	×	Tern.	-2	Tern.	×	Un.	-3													
VIII. nion.	Bin.	×	Quat.	-2	Tern.	×	Bin.	-3	Quat.	—	—	-									
IX. nion.	Bin.	×	Quin.	-2	Tern.	×	Tern.	-3	Quat.	×	Un.	-4									
X. nion.	Bin.	×	Sen.	-2	Tern.	×	Quat.	-3	Quat.	×	Bin.	-4	Quin.	—	—	-					
XI. nion.	Bin.	×	Sept.	-2	Tern.	×	Quin.	-3	Quat.	×	Tern.	-4	Quin.	×	Un.	-5					
XII. nion.	Bin.	×	Oct.	-2	Tern.	×	Sen.	-3	Quat.	×	Quat.	-4	Quin.	×	Bin.	-5	Sen.	—	—	-	
XIII. nion.	Bin.	×	Nou.	-2	Tern.	×	Sept.	-3	Quat.	×	Quin.	-4	Quin.	×	Tern.	-5	Sen.	×	Un.	-6	
XIV. nion.	Bin.	×	Den.	-2	Tern.	×	Oct.	-3	Quat.	×	Sen.	-4	Quin.	×	Quat.	-5	Sen.	×	Bin.	-6	Sept.
XV. nion.	Bin.	×	Und.	-2	Tern.	×	Nou.	-3	Quat.	×	Sept.	-4	Quin.	×	Quin.	-5	Sen.	×	Tern.	-6	Sept.
XVI. nion.	Bin.	×	Duod.	-2	Tern.	×	Den.	-3	Quat.	×	Oct.	-4	Quin.	×	Sen.	-5	Sen.	×	Quat.	-6	Sept.

Diuerſ.			*Repet.*
—	—	-	
×	Un.	-7	
×	Bin.	-7	Oct.

Anmerkung.

IV. nion. heiſſet *Quaterniones*; V. nion. heiſſet *Quiniones*, und ſo weiter. Un. heiſſet *Uniones*. Man ſehe §. 397.

§. 418.

In vorstehender Tabelle stehen neben jeder der quotenischen Verbindungen, die in der ersten Columne in ihrer Folge angezeigt sind, in derselben Reihe durch alle Columnen die zu summirenden Producte, welche zur Erfindung dieser Verbindung für die Menge von zum Theil wiederholten Größen, von denen hier die Rede ist, dienen. Es ist aber jeder erste Factor in jeder Columne eine quotenische Verbindung der wiederholten Größen, welches durch die Ueberschrift *Repet.* angezeigt ist. Z. E. in der zweyten Columne sind durchgängig die Binionen, in der dritten die Ternionen der wiederholten Größen u. s. w. der erste Factor. Jeder zweyte Factor aber ist eine quotenische Verbindung der verschiedenen Größen, welches durch die Ueberschrifft *Diuerſ.* angezeigt ist, und zwar in der zweyten Columne der verschiedenen Größen — 2, in der dritten Columne der verschiedenen Größen — 3, u. s. w. Es ist nemlich wohl zu merken, daß jener Abzug von der Zahl der Verschiedenheit selbst, nicht aber von der Zahl der quotenischen Verbindungen geschehen muß.

Um also z. E. die Producte, die bey Erfindung der denarischen Verbindungen nöthig sind, zu summiren, sucht man unter der ersten Columne das Wort Deniones (X.nion.) auf, welches in der Tabelle in der 7ten Reihe der angezeigten Columne steht. In derselben Reihe findet man durch alle Columnen die zu summirenden Producte, nemlich

1) in der zweyten Columne: *Bin. Repet.* X *Sen. Diuerſ.* — 2; d. i. ein Product aus den Binionen der wiederholten Größen in die Senionen der verschiedenen Größen — 2.

2) In der dritten Columne: *Tern. Repet.* X *Quat. Diuerſ.* — 3. d. i. ein Product aus den Ternionen der wiederholten Größen in die Quaternionen der verschiedenen Größen — 3.

3) In der vierten Columne: *Quat. Repet.* X *Bin. Diuerſ.* — 4. d. i. ein Product aus den Quaternionen der wiederholten Größen in die Binionen der verſchiedenen Größen — 4.

4) In der fünften Columne: *Quin. Repet.* d. i. die Quinionen der wiederholten Größen.

Uebrigens lehrt der Augenſchein, daß es leicht ſey, die Tabelle willkührlich weiter fortzuſetzen.

§. 419.

Den Grund der Einrichtung dieſer Tabelle einzuſehen dienet folgende Betrachtung.

1) Bey den Quaternionen kommen, wenn die Größen nur zweymal wiederholt ſind, neue Verbindungen z. E. bey aabbccdef für aabb, aacc, bbcc. Die Summe dieſer Verbindungen iſt, wie der Augenſchein lehrt, die Anzahl der Binionen von abc, d. i. der wiederholten Größen.

2) Bey den Quinionen, da 5 Größen zur Combination erfordert werden, muß zu den vorhergehenden Quaternionen, aabb, aacc, bbcc, noch jedesmal eine Größe zugeſetzt werden, damit 5 Größen herauskommen. Es können aber ſo viele Größen hinzugeſetzt werden, als auſſer denen in Quaternionen geſetzten übrig ſind. Nun ſind aber jedesmal 2 darin; dieſe von der Zahl der Verſchiedenheit abgezogen, giebt die Zahl, welche anzeigt, wie oft zu jeder Quaternion ein Zuſatz komme. Folgendes Schema wird dies deutlich machen:

aabbc	aaccb	bbcca
....d	....d	....d
....e	....e	....e
....f	....f	....f

Um die Summe dieſer Verbindungen zu finden, darf man nun nur die Anzahl der Binionen in abc = 3

mit

mit der Anzahl der verſchiedenen Gröſsen — 2; allhier 6 — 2 = 4 multipliciren. 3 X 4 = 12.

3) Bey den Senionen, da 6 Gröſsen erfordert werden, kommen

a) zu den Quaternionen aabb, aacc, bbcc jedesmal 2 der übrigen Gröſsen hinzu. So oft alſo dieſe in Binionen verſetzt werden können, kommen ſie zu jeder Quaternion. Hieraus erhellet, daſs in dieſem Fall die Binionen der wiederholten Gröſsen mit den Binionen der verſchiednen Gröſsen — 2 multipliciret werden müſſen, wie folgendes Schema zeigt.

aabbcd	aaccbd	bbccad
....ce	....be	....ae
....cf	....bf	....af
....de	....de	....de
....df	....df	....df
....ef	....ef	....ef

b) Kommt bey den Senionen eine neue Verbindung hinzu, nemlich bey aabbcc, die Senion aabbcc, bey aabbccdd die Senionen aabbcc, aabbdd, aaccdd, bbccdd, überhaupt ſo viel Verbindungen als in den wiederholten Gröſsen (allhier abcd) Ternionen ſind.

4) Wie nun die Binionen von ab ꝛc. wegen aabb, ꝛc. die Ternionen von abc ꝛc. wegen aabbcc, ꝛc. bey jeder folgenden höhern quoteniſchen Verbindung neue Operationen, die aber denen vorigen ähnlich ſind, erfordern, und wie dazu neue Producte aus den Quaternione, Quinionen ꝛc. der wiederholten Gröſsen in jede ihrer quoteniſchen Verbindungen kommen, erhellet aus der bisherigen Betrachtung, welche dadurch noch verſtändlicher werden wird, wenn man theils die Tabelle genau über ſieht, theils ſelbſt einen Verſuch in der Erfindung dieſer Verbindungen macht.

§. 420.

Uebrigens kommen in der Tabelle die

Binionen zuerst bey den Quaternionen
Ternionen — Senionen
Quaternionen — Octonionen
Quinionen — Denionen, überhaupt jede

neue Verbindung für diejenige, deren Zahl noch einmal so groß ist

denn $\frac{4}{2}=2$, $\frac{6}{3}=2$, $\frac{8}{4}=2$, $\frac{10}{5}=2$. u. s. w.

Die Factoren für die Binionen, Ternionen ꝛc. sind quotenische Verbindungen, deren Zahlen immer um soviel gröſſer sind, als die quotenischen Verbindungen, für welche sie gehören, von den Quaternionen, Senionen ꝛc. entfernet sind.

Generalregel.

Alle quotenische Verbindungen der Gröſſen zu finden, von welchen mehrere, und zwar jede zweymal, wiederholet worden. §. 421.

1) Suchet die geforderte quotenische Verbindung von der Zahl der Verschiedenheit.

2) Suchet eben dieselbe für die Zahl der Verschiedenheit bey denen Gröſſen, von welchen eine zweymal wiederholt ist.

3) Ziehet von der in der zweyten Operation gefundenen Zahl die Zahl der ersten Operation ab, multipliciret den Rest mit der Anzahl der wiederholten Gröſſen, und addiret das Product zur Zahl der ersten Operation.

4) Dividiret hierauf in die Zahl der geforderten Quotenität mit 2, 3, 4, 5, u. s. w. so lange bis der Quotient kleiner als 2 wird. Ist bey der Division mit 2 der Quotient = 2 oder gröſſer, so sind Binionen, oder Producte aus denselben; ist bey der Division mit 3 der Quotient = 2 oder gröſſer: so sind Ternionen oder Producte aus denselben; ist er bey 4 gleich 2 oder gröſſer, so sind Quaternionen oder Producte aus denselben ꝛc. zu addiren.

5) Zie-

5) Ziehet ferner von der Zahl der geforderten Quotenität 2 X 2, 2 X 3, 2 X 4, 2 X 5, u. s. w. ab. Bleibt beym Abzuge von 2 X 2 = 4 nichts übrig: so sind bloß die Binionen; bey 2 X 3 = 6, bloß die Ternionen ꝛc. der wiederholten Größen zu addiren. Bleibt aber eine Zahl übrig, so zeigt diese die quotenische Verbindung der verschiedenen Größen — 2 bey den Binionen, — 3 bey den Ternionen, — 4 bey den Quaternionen, u. s. w. an, mit welchen die Binionen, oder Ternionen, oder Quaternionen u. s. w. zu multipliciren sind.

6) Suchet nun diese Verbindungen und Producte derselben, summiret sie, und addiret die Summe zu dem Collect der 3ten Operation. Die kommende Zahl ist die Zahl der geforderten quotenischen Verbindung.

Es sollen die Octonionen von aabbccddeefgh gefunden werden.

Die Zahl der Verschiedenheit ist 8, die Zahl der wiederholten Größen 5.

1ste Operation. Octonionen in abcdefgh — 1

2te Operation. Octonionen in aabcdefgh sind 8.

3te Operation. 8 — 1 = 7

7 X 5 . . . 35

36

4te Operation.

1) $\frac{5}{2} = 4$. Der Quotient 4 ist größer als 2. Es sind also Binionen oder ein Product aus denselben zu addiren.

2) $\frac{5}{3} = 2\frac{2}{3}$. Der Quotient $2\frac{2}{3}$ ist größer als 2. Es sind also auch Ternionen, oder ein Product aus denselben zu addiren.

3) $\frac{5}{4} = 2$. Der Quotient ist 2. Es sind also auch Quaternionen zu addiren.

4) $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$. Der Quotient $1\frac{2}{3}$ ist kleiner als 2. Es sind also keine Quinionen, folglich auch keine Seniones ꝛc. zu addiren.

5te Operation. Die Zahl der geforderten Quotenität, der Octonion, ist 8. Also

1) $8-(2\times 2)=8-4=4$.
Die Binionen der wiederholten Größen sind also mit den Quaternionen der verschiedenen Größen — 2 zu multipliciren.

2) $8-(2\times 3)=8-6=2$.
Die Ternionen der wiederholten Größen sind also mit den Binionen der verschiedenen Größen — 3 zu multipliciren.

3) $8-(2\times 4)=8-8=0$.
Die Quaternionen der wiederholten Größen werden also gesucht, aber nicht multiplicirt.

6te Operation. Vermöge der 5ten Operation sind zu summiren:

1) Binionen von abcde × Quaternionen von cdefgh oder Bin. von 5 × Quatern. von $6=10\times 15=$ 150
2) Ternionen von abcde × Bin. von defgh oder Tern. von 5 × Bin. von $5=10\times 10=$ 100
3) Quaternionen von abcde . . . 5

255
Collect der 3ten Operation 36

291
Octonionen in aabbccddeefgh.

§. 422.

Ich setze noch einige Exempel hinzu, wo die Data gleich aus der Tabelle genommen sind:

Es ſeyn die Binionen von aabbccddef zu finden.

Binionen für abcdef ſ ſ ſ 15
für aabcdef — Bin. für abcdef
=16—15=1 und 1 X 4 4
19

Binionen in aabbccddef.

Es ſeyn die Quaternionen von aabbccddef zu finden.

Quatern. von abcdef ſ ſ ſ 15
ſ ſ aabcdef — Quat. von abcdef
=25—15=10 und 10 X 4 40
Binionen von abcd ſ ſ ſ 6
61

Quat. in aabbccddef.

Es ſeyn die Quinionen von aabbccddeef zu finden.

Quinion von abcdef ſ ſ ſ 6
ſ ſ aabcdef — Quin. abcdef
=16—6=10 und 10 X 5= 50
Bin. von abcde X Union von cdef=10 X 4= 40
96

Quin. in aabbccddeef.

Es ſeyn die Septenionen von aabbccddeefg zu finden.

Septen. von abcdefg ſ ſ ſ 1
Septen. von aabcdefg — Sept. von abcdefg
=7—1=6 und 6 X 5 ſ ſ 30
Binion von abcde X Tern. von cdefg = 10
X 10= ſ ſ 100
Tern. von abcde X Union von defg
=10 X 4 ſ ſ 40
171

Septen. in aabbccddeefg.

Anmerkung.

Um von der Richtigkeit des Calculs überzeuget zu werden, kann man mit dieſen Exempeln die Progreſſionstabellen PP und QQ vergleichen.

Dritte Claſſe der Fälle.

Wenn von den wiederholten Größen die eine mehrmal als die andere wiederholet wird.

§. 423.

Wenn zwey verſchiedne Größen wiederholet werden, und die eine drey- und die andere zweymal geſetzet wird: ſo iſt die erſte Aufgabe aaabb, die zweyte aaabbc, die dritte aaabbcd, u. ſ. w. Wir bedürfen, vermöge §. 401. keiner andern als der erſten Aufgabe aaabb. Da ſolche aus fünf Größen beſteht, ſo iſt ihre höchſte Quotenität quinariſch, und wir müſſen alſo die darinnen enthaltnen binariſchen, ternariſchen, quaternariſchen und quinariſchen Verbindungen ſuchen. Dieſes geſchieht vermittelſt der Zergliederung, durch welche man findet, daß in aaabb drey Binionen, drey Ternionen, zwey Quaternionen und eine Quinion enthalten ſind, als:

aa | bb	aaa	aaab	aaabb	1 Quinion.
ab |	aab	aabb		
3 Binionen.	abb	2 Quaternionen.		
	3 Ternionen.			

Wir nehmen die Zahlen der Verſchiedenheit zu den gefundnen Zahlen 3. 3. 2. 1; bezeichnen jedes Fach, in welches die allererſten combinatoriſchen Zahlen der höchſten Quotenität kommen, mit 1, und addiren auf bekannte Art; woraus alsdenn folgende Progreßionstabelle RR entſtehet.

Anmerkung.

Wer die dritte Claſſe der Fälle auf eben die Art unterſuchen wollte, als es in Anſehung der zweyten Claſſe der Fälle im §. 417 ſqq. geſchehen iſt, dem würde es nicht ſchwer ſeyn, auch hier eine Generalregel zu erfinden, die der im §. 421 ähnlich und nur erweiterter ſeyn würde, wiewohl die Arbeit weitläuftig iſt, und viele Zeit erfordert. Vielleicht iſt es auch nicht unmöglich, für alle drey Claſſen der Fälle eine Generalregel zu erdenken.

Pro-

Progreßionstabelle RR.

Wenn zwey Größen, die eine drey- und die andere zweymal, wiederholet werden.

Combinanda.	Diuerſ.	Bin.	Tern.	Quat.	Quin.					
aaabb	2	3	3	2	1	Sen.				
aaabbc	3	5	6	5	3	1	Sept.			
aaabbcd	4	8	11	11	8	4	1	Oct.		
aaabbcde	5	12	19	22	19	12	5	1	Nov.	
aaabbcdef	6	17	31	41	41	31	17	6	1	Dec.
aaabbcdefg	7	23	48	72	82	72	48	23	7	1
aaabbcdefgh	8	30	71	120	154	154	120	71	30	8

Vierter Abſchnitt.

Von der abwechſelnden Verbindung wiederholter Größen.

§. 424.

Die Wiederholung der Größen geſchicht, wie in dem vorhergehenden dritten Abſchnitt, auf dreyerley Art, indem entweder 1) nicht mehr als eine einzige Größe zwey- oder mehrmal geſetzet wird; oder 2) indem mehrere Größen, die eine ſovielmal als die andere, wiederholet werden; oder 3) indem von den wiederholten Größen die eine mehrmal als die andere wiederholet wird. Hierdurch entſtehen dreyerley Claſſen von Fällen.

§. 425.

In was für einer Claſſe es ſey, ſo will man entweder wiſſen, wie vielmal eine Anzahl von Dingen nach allen Quotenitäten, oder nur wie vielmal ſolche nach der höchſten Quotenität verbunden werden könne. Die Fälle der letzten Anforderung können durch eine einzige Regel abgemachet werden; aber nicht die Fälle der erſten, indem ſolche ſo oft verändert werden, als eine ſchon wiederholte Größe aufs neue hinzugefüget wird; und dieſe Fälle, welche in Rückſicht auf alle Quotenitäten betrachtet, allezeit

eine neue Regel erfordern, gehen ins Unendliche. Wir werden uns dieserwegen, nur gleichsam zur Probe, auf ein paar Aufgaben aus den beyden ersten Classen, in Absicht auf die Untersuchung aller möglichen Verbindungen eines Falles einlassen; bey jeder Classe aber mit der Untersuchung der Verbindungen nach der höchsten Quotenität den Anfang machen.

Erste Classe der Fälle.

Wenn nicht mehr als eine einzige Größe zwey- oder mehrmal gesetzet wird.

Zu wissen, wie vielmal eine gewisse Anzahl von Dingen, worinnen nur eine einzige Größe mehrmal gesetzet wird, nach ihrer höchsten Quotenität verbunden werden könne. §. 426.

1) Betrachtet die Dinge, als wenn keines darunter wiederholet wäre, und berechnet, nach der im zweyten Abschnitt gezeigten Art, erstlich die in der Zahl aller Dinge, und hernach die in der Zahl der Wiederholung enthaltenen alternativischen Verbindungen. 2) Dividirt die Zahl der erstern Operation durch die Zahl der letztern. Z. E.

Es sey aaabc.	Es sey aaaabc.
Die Zahl aller Dinge ist = 5, und die Zahl der Wiederholung = 3. Also	Die Zahl aller Dinge ist = 6, und die Zahl der Wiederholung = 4. Also
1) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$	1) $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$
und $3 \times 2 \times 1 = 6$	und $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
2) $\frac{120}{6} = 20$ gefundne Anzahl der höchsten, allhier quinarischen, Verbindungen.	2) $\frac{720}{24} = 30$ gefundne Anzahl der höchsten, allhier senarischen, Verbindungen.

Wenn man die im zweyten Abschnitt berechnete Tabelle II aus 1. 2. 6. 24. 120. 720, u. s. w. bey der Hand hat: so kann man die beyden Zahlen, sowohl die größern als die kleinern, womit die größere getheilet werden muß, aus selbiger nehmen.

§. 427.

§. 427.

Der vorige Calcul kann abgekürzet werden, wenn man aus den zu multiplicirenden Zahlen 1. 2. 3. 4. 5. 6. u. ſ. w. die Zahl der Wiederholung, und alle vorhergehende kleinere Zahlen bis auf 1 excluſive, wegläſſet, als:

Es ſey aaabc. Die Zahl aller Dinge iſt = 5, und die Zahl der Wiederholung = 3. Alſo bleibet die Zahl 3 und die vorhergehende kleinere Zahl 2 aus der Multiplication weg, als:

1×4×5=20 gefundne Zahl.

Es ſey aaaabc. Die Zahl aller Dinge iſt = 6, und die Zahl der Wiederholung = 4. Alſo bleibet die Zahl 4, und hernach 3 und 2 aus der Multiplication weg, als:

1×5×6=30 gefundne Zahl.

Wenn man eine Progreßionstabelle conſtruiren will, ſo kann ſolches vermittelſt vorhergehenden abgekürzten Calculs, bey welchem ſich die höchſten Verbindungen jeder Anzahl von Dingen nach einander entwickeln, am leichteſten geſchehen, als:

α) Wenn eine Größe zweymal geſetzet wird. Da die Zahl der Wiederholung = 2 iſt: ſo bleibet ſolche alſo weg, als:

aa	1	
	3	
aab	3	
	4	
aabc	12	
	5	
aabcd	60	
	6	
aabcde	360	
	7	
aabcdef	2520	u. ſ. w.

β) Wenn eine Größe dreymal geſetzet wird. Da die Zahl der Wiederholung = 3 iſt: ſo bleiben 3 und 2 weg, als:

aaa	1	
	4	
aaab	4	
	5	
aaabc	20	
	6	
aaabcd	120	
	7	
aaabcde	840	
	8	
aaabcdef	6720	u. ſ. w.

§. 428.

Die durch vorigen Proceß gefundne Progreßionstabelle wird demnach folgende ſeyn.

Progreßionstabelle S. S.

Zahl aller Dinge.	Zwey einerley Dinge.	Drey einerley Dinge.	Vier einerley Dinge.	Fünf einerley Dinge.	Sechs einerley Dinge.	Sieben einerley Dinge.	Acht einerley Dinge.	Neun einerley Dinge.	Zehn einerley Dinge.
II	1								
III	3	1							
IV	12	4	1						
V	60	20	5	1					
VI	360	120	30	6	1				
VII	2520	840	210	42	7	1			
VIII	20160	6720	1680	336	56	8	1		
IX	181440	60480	15120	3024	504	72	9	1	
X	1814400	604800	151200	30240	5040	720	90	10	1

Aus vorhergehender Tabelle ſiehet man 1) daß in einer Anzahl von zwey Dingen, welche einerley ſind, nicht mehr als eine einzige Verbindung ſtatt findet, indem aa mit aa allezeit einerley iſt.

Und eben dieſes geſchiehet, wenn in einer Anzahl von drey Dingen alle drey einerley ſind, oder wenn ein Ding dreymal geſetzet iſt, indem aaa = aaa, und ſo weiter. 2) daß, wenn die Anzahl aller Dinge = 5 iſt, α) 60 höchſte, allhier quinariſche, Verbindungen kommen, wenn ein Ding nicht mehr als zweymal geſetzet iſt; β) daß 20 höchſte, allhier quinariſche, Verbindungen kommen, wenn ein Ding dreymal geſetzet iſt; γ) daß 5 höchſte, allhier quinariſche, Verbindungen kommen, wenn ein Ding viermal geſetzet iſt, u. ſ. w.

§. 429.

Wir haben geſehen, wie ſich die höchſten Verbindungen jeder Zahl, in welcher eine einzige Größe zwey- oder mehrmal geſetzet wird, finden laſſen. Wie können die vorhergehenden niedrigen Verbindungen in dem Falle, daß nicht mehr als eine einzige Größe zweymal geſetzet wird, entwickelt werden? Die Sache kömmt darauf an,

daß, um die binariſchen Verbindungen zu finden, die Zahl der Verſchiedenheit mit ſich ſelbſt multiplicirt, und um die ternariſchen zu finden, die vorhin gefundne Anzahl der binariſchen Verbindungen durch die Zahl der Verſchiedenheit — 1 multiplicirt wird;

daß, um die quaternariſchen Verbindungen zu finden, die vorhin gefundne Anzahl der ternariſchen durch die Zahl der Verſchiedenheit — 2, und um die quinariſchen zu finden, die vorhin gefundne Anzahl der quaternariſchen durch die Zahl der Verſchiedenheit — 3 multiplicirt wird. u. ſ. w.

Es findet hier alſo ebenfalls eine rückgängige Multiplication ſtatt, nur daß ſolche nicht ſofort durch ihr Product die verlangte Anzahl der Verbindungen giebet, ſondern daß

von

von diesem Product zuvor ein Abzug zu machen ist; und dieser Abzug geschicht mit den in der Zahl der nicht wiederholten Größen enthaltnen alternativischen Verbindungen jeder vorhergehenden Quotenität. Ich werde den ganzen Proceß durch ein paar Exempel erläutern.

Die verschiednen alternativischen Verbindungen zu finden

von aabcd. Die Zahl der Verschiedenheit (abcd) ist = 4, und die Zahl der nicht wiederholten Größen (bcd) ist = 3.

1) Berechnet, nach bekannter Manier, sämtliche in der Zahl 3 der nicht wiederholten Größen bcd enthaltne alternativische Verbindungen, als

3
× 2
6 binarische Verbin-
× 1 dungen
6 ternarische Verbindungen, und behaltet alle drey Zahlen
3. 6. 6.

2) Quadriret die Zahl der Verschiedenheit 4, und ziehet von dem Quadrat die

von aabcdefg. Die Zahl der Verschiedenheit (abcdefg) ist = 7, und die Zahl der nicht wiederholten Größen (bcdefg) — 1, und also = 6.

1) Berechnet sämtliche in der Zahl 6 der nicht wiederholten Größen bcdefg enthaltne alternativische Verbindungen, als:

6
5
30 Binionen
4
120 Ternionen
3
360 Quaternionen
2
720 Quinionen
1
720 Senionen
und behaltet alle sechs Zahlen
6. 30. 120. 360. 720. 720.

2) Quadriret die Zahl der Verschiedenheit 7, und ziehet von dem Quadrat die

erste

erſte voriger Zahlen, und alſo die 3 ab, als

4 X 4 = 16
— 3
13 Anzahl der binariſchen Verbindungen in aabcd.

3) Multipliciret die gefundene Anzahl der binariſchen Verbindungen durch die Zahl der Verſchiedenheit — 1, und ziehet von dem Product die zweyte der oben behaltnen Zahlen, und alſo die 6 ab, als

13 Binionen
3 = 1 von 4 Zahl der Verſchiedenheit
39 — 6 = 33 Anzahl der ternariſchen Verbindungen in aabcd.

4) Multipliciret die gefundene Anzahl der ternariſchen Verbindungen durch die Zahl der Verſchiedenheit — 2, und ziehet von dem Product die dritte der oben behaltnen Zahlen, und alſo die 6 ab, als

33 Ternionen
2 = 2 von 4 Zahl der Verſchiedenheit
66 — 6 = 60 Anzahl der quaternariſchen Verbindungen in aabcd.

erſte voriger Zahlen, und alſo die 6 ab, als

7 X 7 = 49 und 49 — 6 = 43 Anzahl der binariſchen Verbindungen in aabcdefg.

3) Multipliciret die gefundene Zahl der binariſchen Verbindungen durch die Zahl der Verſchiedenheit — 1, und ziehet von dem Product die zweyte der oben behaltnen Zahlen, und alſo die 30 ab, als:

43 Binionen
6 = 1 von 7 Zahl der Verſchiedenheit
258 — 30 = 228 Anzahl der ternariſchen Verbindungen in aabcdefg.

4) Multipliciret die gefundene Anzahl der ternariſchen Verbindungen durch die Zahl der Verſchiedenheit — 2, und ziehet von dem Product die dritte der oben behaltnen Zahlen, und alſo die 120 ab, als:

228 Ternionen
5 = 2 von 7 Zahl der Verſchiedenheit
1140 — 120 = 1020 Anzahl der quaternariſchen Verbindung. in aabcdefg.

5) Mul-

5) Multipliciret die gefundene Anzahl der quaternariſchen Verbindungen durch die Zahl der Verſchiedenheit — 3, und ſubtrahiret 0, indem keine zu ſubtrahirende Zahl mehr vorhanden iſt, als:

60 Quaternionen
1 = 3 von 4 Zahl der Verſchiedenheit
60 Anzahl der quinariſchen Verbindungen in aabcd.

Da die quinariſchen Verbindungen die höchſten von aabcd ſind, ſo können ſolche auch nach der Regel im §. 426. gefunden werden, als:
Die Zahl aller Dinge = 5
Die Zahl der wiederholten Dinge = 2
Alſo

$$\frac{5\times4\times3\times2\times1=120}{\text{und}\quad 2\times1=2}=60$$

5) Multipliciret die gefundene Anzahl der quaternariſchen Verbindungen durch die Zahl der Verſchiedenheit — 3, und ſubtrahiret von dem Product die vierte der oben behaltnen Zahlen, und alſo die 360, als:

1020 Quaternionen
4 = 3 von 7 Zahl der Verſchiedenheit
4080 — 360 = 3720 Anzahl der quinariſchen Verbindungen in aabcdefg.

6) Multipliciret die gefundene Anzahl der quinariſchen Verbindungen durch die Zahl der Verſchiedenheit — 4, und ſubtrahiret von dem Product die fünfte der oben behaltnen Zahlen, und alſo die 720, als:

3720 Quinionen
3 = 4 von 7 Zahl der Verſchiedenheit
11160 — 720 = 10440 Anzahl der ſenariſchen Verbindungen in aabcdefg.

7) Multipliciret die gefundene Anzahl der ſenariſchen Verbindungen durch die Zahl der Verſchiedenheit — 5, und ſubtrahiret von dem Product die ſechſte der oben behaltnen Zahlen, und alſo die 720, als:

10440 Senionen
2 = 5 von 7 Zahl der Verſchiedenheit
20880 — 720 = 20160 Anzahl der ſeptenariſchen Verbindungen in aabcdefg.

8) Multipliciret die gefundene Anzahl der ſeptenariſchen Verbindungen durch die Zahl der Verſchiedenheit — 6, und ſubtrahiret 0, indem keine zu ſubtrahirende Zahl mehr vorhanden iſt, als:

20160 Septenionen
1 = 6 von 7 Zahl der Verſchiedenheit
20160 Anzahl der octonariſchen Verbindungen in aabcdefg.

§. 430.

Ich füge eine nach vorhergehender Art berechnete Progreßionstabelle hinzu.

Progreßionstabelle TT.

worinnen eine einzige Größe zweymal geſetzet wird.

Combinanda.	Differ.	Binion.						
aa	1	1	Tern.					
aab	2	3	3	Quat.				
aabc	3	7	12	12	Quin.			
aabcd	4	13	33	60	60	Sep.		
aabcde	5	21	72	192	360	360	Septen.	
aabcdef	6	31	135	480	1320	2520	2520	Octon.
aabcdefg	7	43	228	1020	3720	10440	20160	20160

§. 431.

Es ſey die Aufgabe aabc, um ſolche in die darinnen enthaltne alternativiſche Binionen, Ternionen und Quaternionen zu zergliedern, als:

| 7 Binionen. | | |

wird: ſo kommen überhaupt 13 alternativiſche, in aabcd enthaltne Binionen, worüber die Progreßionstabelle TT zu Rathe gezogen werden kann.

β) Wegen der Ternionen.

In den drey erſten Ternionen aab, aac, und aad iſt eine Größe zweymal geſetzet worden. Aus der Progreßionstabelle SS iſt bekannt, daß drey Dinge, worunter zwey einerley ſind, nicht mehr als dreymal ihrer höchſten Quotenität nach, alternativiſch verbunden werden können. Alſo giebet aab drey ſolcher Combinationen; aac giebet auch 3, und aad giebet auch 3, welches überhaupt neun alternativiſche Verbindungen machet. In den vier lezten Ternionen abc, abd, acd, und bcd ſind lauter verſchiedne Dinge. Wenn nun drey verſchiedne Dinge, ihrer höchſten Quotenität nach, ſechsmal alternativiſch verbunden werden können, wie aus dem zweyten Abſchnitt bekannt iſt: ſo müſſen dieſe vier excluſiviſche Ternionen vier und zwanzig alternativiſche geben, und die Anzahl ſämtlicher alternativiſchen Ternionen in aabcd wird alſo ſeyn 33 = 9 + 24; und eben dieſe Summe wird man in der Progreßionstabelle TT finden.

γ) Wegen der Quaternionen.

In den drey erſten Quaternionen aabc, aabd und aacd iſt die Größe a zweymal geſetzet worden. Aus der Progreßionstabelle SS iſt bekannt, daß vier Dinge, worunter zwey einerley ſind, nicht mehr als zwölfmal, ihrer höchſten Quotenität nach, alternativiſch verbunden werden können. Alſo giebet aabc 12 ſolcher Combinationen; aabd giebet auch 12, und aacd giebet auch 12, welches überhaupt ſechs und dreyßig alternativiſche Verbindungen machet. In der vierten Quaternion abcd ſind lauter verſchiedne Dinge, und vier verſchiedne Dinge können ihrer höchſten Quotenität nach vier und zwanzigmal alternativiſch verbun-

den werden, wie aus dem zweyten Abschnitt bekannt ist. Wenn nun 36 + 24 = 60, so entstehen aus den vier excluſiviſchen Quaternionen sechzig alternativiſche, und eben dieſe Summe findet man in der Progreßionstabelle TT.

f) Wegen der Quinion aabcd.

Eine Anzahl von fünf Dingen, worunter zwey einerley ſind, giebet sechzig alternativiſche Quinionen, wie aus der Progreßionstabelle SS bekannt iſt.

Zweyte Claſſe der Fälle.

Wenn zwey und mehrere Größen, eine ſo vielmal als die andere, wiederholet werden.

Zu wiſſen, wie vielmal eine Anzahl von Dingen, worinnen zwey oder mehr Größen gleich vielmal wiederholet worden, nach ihrer höchſten Quotenität verbunden werden können. §. 432.

1) Betrachtet die Dinge, als wenn ſie alle verſchieden wären, und berechnet nach der Regel im §. 389. des zweyten Abſchnitts erſtlich die in der Zahl aller Dinge, und hernach die in der Zahl der Wiederholung jeder Größe enthaltnen alternativiſchen Verbindungen. 2) Dividiret die gefundne Zahl der erſten Operation nach und nach durch die gefundnen Zahlen der andern Operationen, ſoviel als deren ſind. z. E.

Es ſey aabbcd.

Die Anzahl aller Dinge iſt = 6, und die Zahl der Wiederholung 2, indem a 2mal geſetzet iſt, und b ebenfalls. Alſo

1) 6×5×4×3×2×1 = 720 höchſte Verbindungen in ſechs Dingen; und 2×1 = 2 höchſte Verbindungen in zwey Dingen.

Es ſey aaabbbcd.

Die Anzahl aller Dinge iſt = 8, und a iſt 3 mal geſetzet, und b ebenfalls. Alſo

1) 8×7×6×5×4×3×2×1 = 40320 höchſte Verbindungen in acht Dingen; und 3×2×1 = 6 höchſte Verbindungen in drey Dingen.

2) 720

a) für a. 2) $\frac{720}{360}$
für b. 2) $\frac{360}{180}$. gefundne Anzahl der höchsten, allhier senarischen, alternativischen Verbindungen in aabbcd.

b) für a. 6) $\frac{40320}{6720}$
für b. 6) $\frac{6720}{1120}$ gefundene Anzahl der höchsten, allhier octonarischen, alternativischen Verbindungen in aaabbbcd.

§. 433.

Wenn man die höchsten Verbindungen einer sich beständig durch eine neue verschiedne Größe vermehrenden Anzahl von Dingen, z. E. aabb, aabbc, aabbcd u. s. w., oder aaabbb, aaabbbc, aaabbbcd u. s. w. progressionsmäßig hinter einander entwickeln will: so kann solches durch folgenden verkürzten Calcul geschehen.

Suchet die Anzahl der höchsten Verbindungen, welche in den zwey, oder mehrern gleich vielmal gesetzten Größen enthalten sind, und multiplicirt die gefundne Anzahl derselben von einer Operation zur andern mit der Anzahl der wiederholten Dinge + 1, + 2, + 3, + 4, und so weiter, als:

aabb hat 6 höchste Verbindungen.
5 = 4 + 1. Die Zahl 4 ist die Anzahl der wiederholten Dinge aabb.
aabbe 30 höchste Verbind.
6 = 4 + 2
aabbed 180 höchste Verbind.
7 = 4 + 3
aabbcde 1260 höchste Verbind.
8 = 4 + 4
aabbcdef 10080 höchste Verbind.
9 = 4 + 5
aabbedefg 90720 höchste Verbind. u. s. w.

Also, um die höchsten Verbindungen von aabbcc, aabbccd, u. s. w. zu finden:

aabbcc hat 90 höchste Verbindungen.

7 = 6 + 1. Die Zahl 6 ist die Anzahl der wiederholten Dinge aabbcc.

aabbccd 630

8 = 6 + 2

aabbccde 5040

9 = 6 + 3

aabbccdef 45360 = 6 + 4 u. s. w.

Also, um die höchsten Verbindungen von aaabbb, aaabbbc, u. s. w. zu finden:

aaabbb hat 20 höchste Verbindungen.

7 = 6 + 1. Die Zahl 6 ist die Anzahl der wiederholten Dinge aaabbb.

aaabbbc 140

8 = 6 + 2

aaabbbcd 1120

9 = 6 + 3

aaabbbcde 10080 u. s. w.

§. 434.

So wie es nach dem vorhergehenden keine Weitläuftigkeit verursachet, die Anzahl der höchsten Verbindungen einer hieher gehörigen Aufgabe zu finden, so ist es auch ganz leicht, die Anzahl der niedrigsten Verbindungen, d. i. der binarischen in einer Aufgabe zu berechnen, worinnen zwey Größen, jede zweymal, vorkommen, indem man nur die Zahl der Verschiedenheit quadriren, und vom Quadrat die Zahl der nicht wiederholten Größen abziehen darf, als:

Die binarischen alternativischen Verbindungen zu finden.

in aabbcd	in aabbcdef
Die Zahl der Verschiedenheit (abcd) ist = 4, und die Zahl der nicht wie-	Die Zahl der Verschiedenheit (abcdef) ist = 6, und die Zahl der nicht wie-

wiederholten Dinge (cd) iſt = 2. Alſo:

4 X 4 = 16
— 2
14 die gefundne Zahl der Binionen.

wiederholten Größen (cdef) iſt = 4. Alſo

6 X 6 = 36
— 4
32 die gefundne Zahl der Binionen.

§. 435.

Hingegen iſt es mühſamer, die zwiſchen der höchſten und niedrigſten Quotenität enthaltnen mittlern Verbindungsarten zu berechnen. Die wenigſt unbequemſte Art iſt ohne Zweifel, dieſe Berechnung mit Hülfe der alternativiſchen Progreßionstabelle TT aus aa, aab, aabc, aabcd und ſo weiter vorzunehmen, wenn die Zahlen derſelben dupliret, und α) zur Erhaltung der ternariſchen Verbindungen die duplirten binariſchen gebrauchet werden; β) zur Erhaltung der quaternariſchen Verbindungen die duplirten ternariſchen; γ) zur Erhaltung der quinariſchen die duplirten quaternariſchen, u. ſ. w. nach folgender Manier.

Die Aufgabe aabbcde nach allen ihren alternativiſchen Verbindungsarten zu berechnen.

1) Suchet in der alternativiſchen Progreßionstabelle TT diejenige Aufgabe, die mit der gegenwärtigen in Abſicht auf die Anzahl der nicht wiederholten Größen übereinkömmt. Dieſe wird die vierte Aufgabe aabcd ſeyn, worinnen die drey Größen bcd nicht wiederholet ſind, ſo wie allhier die drey Größen cde nicht wiederholet worden. 2) Extrahiret die vier Zahlen 13. 33. 60. 60, welche die Binionen, Ternionen, Quaternionen und Quinionen in aabcd enthalten, und dupliret ſolche, als:

2 X 13 = 26 binariſche Zahl
2 X 33 = 66 ternariſche —
2 X 60 = 120 quatern. —
und 2 X 60 = 120 quinar. —

Wenn dieſes geſchehen, ſo ſuchet 3) die binariſchen Verbindungen der Aufgabe aabbcde auf ſchon bekannte Art, nach §. 434. das iſt, durch Quadrirung der Zahl der

Verſchiedenheit, und durch Abziehung der Zahl der nicht wiederholten Größen von dem Quadrat, als:

5 X 5 = 25
— 3
22 gefundne Anzahl der Binionen.

5 iſt die Zahl der Verſchiedenheit (abcde), und 3 die Zahl der nicht wiederholten Größen cde.

4) Multipliciret die gefundnen Binionen durch die Zahl der Verſchiedenheit, und ziehet die duplirte binariſche Zahl 26 aus 2 X 13 von dem Producte ab, als:

22 Binionen
5 Zahl der Verſchiedenheit.
110 — 26 = 84 Ternionen.

5) Multipliciret die gefundnen Ternionen durch die Zahl der Verſchiedenheit — 1, und ziehet die duplirte ternariſche Zahl 66 aus 2 X 33 von dem Producte ab, als:

84 Ternionen
4 = 1 von 5 Zahl der Verſchiedenheit
336 — 66 = 270 Quaternionen.

6) Multipliciret die gefundnen Quaternionen durch die Zahl der Verſchiedenheit — 2, und ziehet die duplirte quaternariſche Zahl 120 aus 2 X 60 von dem Producte ab, als

270 Quaternionen
3 = 2 von 5 Zahl der Verſchiedenheit.
810 — 120 = 690 Quinionen.

7) Multipliciret die gefundnen Quinionen durch die Zahl der Verſchiedenheit — 3, und ziehet die duplirte quinariſche Zahl 120 aus 2 X 60 von dem Producte ab, als:

690 Quinionen
2 = 3 von 5 Zahl der Verſchiedenheit
1380 — 120 = 1260 Senionen.

8) Multipliciret die gefundnen Senionen durch die Zahl der Verſchiedenheit — 4, und ziehet 0 von dem Producte

ducte ab, da keine zu ſubtrahirende Zahl mehr vorhanden iſt, als:

1260 Senionen
1 = 4 von 5 Zahl der Verſchiedenheit.
1260 Septenionen, und mehrerer Verbindungsarten iſt die aus den ſieben Größen aabbcde nicht fähig.

Wer alſo die aus den acht Größen aabbcdef beſtehende Aufgabe berechnen wollte, müßte aus der Progreßionstabelle TT und zwar aus der Aufgabe aabcde, worinnen vier nicht wiederholte Größen ſind, wie in aabbcdef, die fünf Zahlen 21. 72. 192. 360. 360 herausziehen, ſolche dupliren und hernach, wie gelehret worden, verfahren.

§. 436.

Ich füge eine auf vorhergehende Art berechnete Progreßionstabelle hinzu.

Progreßionstabelle VV.

Combinanda.	Diuerſa.	Bin.	Tern.	Quar.	Quin.	Sen.	Sept.	Octon.	Noven.
aabb	2	4	6	6					
aabbc	3	8	18	30	30				
aabbcd	4	14	42	102	180	180			
aabbcde	5	22	84	270	690	1260	1260		
aabbcdef	6	32	150	606	2040	5400	10080	10080	
aabbcdefg	7	44	246	1206	4070	17640	47880	90720	90720

§. 437.

Man kann, der bekannten dreyfachen Claſſification zuwider, eine beſondere Progreßion formiren, wenn man keine andere als gleich vielmal wiederholte Dinge nimmt. Es kommen aber keine andere als Quadrat- oder Cubik- oder Biquadratzahlen, u. ſ. w. Z. E.

α) wenn jede Größe zweymal wiederholet, und nichts als die binarische Verbindungsart verlanget wird: so kommen lauter Quadratzahlen, als:

Combinanda.	*Diuerſa.*	*Biniones.*
aa	1	1
aabb	2	4
aabbcc	3	9
aabbccdd	4	16 u. ſ. w.

In ſolchen Fällen alſo brauchet man nur die Zahl der Verſchiedenheit zu quadriren, um die Anzahl der alternativiſchen Binionen zu finden.

β) Wenn jede Größe dreymal wiederholet, und nichts als die ternariſche Verbindungsart verlanget wird, ſo kommen lauter Cubiczahlen, als:

Combinanda.	Diverſa	Tern.
aaa	1	1
aaabbb	2	8
aaabbbccc	3	27
aaabbbcccddd	4	64

u. ſ. w.

In ſolchen Fällen alſo brauchet man nur die Zahl der Verſchiedenheit zu cubiren, um die Anzahl der alternativiſchen Ternionen zu finden.

γ) Wann jede Gröſſe viermal wiederholet, und nichts als die quaternariſche Verbindungsart verlanget wird, ſo kommen lauter Biquadratzahlen, als:

Combinanda.	Diverſa	Quat.
aaaa	1	1
aaaabbbb	2	16
aaaabbbbcccc	3	81
aaaabbbbccccdddd	4	256

u. ſ. w.

In ſolchen Fällen alſo brauchet man nur die Zahl der Verſchiedenheit zu biquadriren, um die Anzahl der alternativiſchen Quaternionen zu finden.

§. 438.

Ich füge einige Decompoſitionen hinzu, und zwar

von

von aabb		von aaabbb		von aaaabbbb	
aa	bb	aaa	baa	aaaa	baaa
ab	ba	aab	bab	aaab	baab
		aba	bba	aaba	baba
2+	2=4	abb	bbb	aabb	babb
alternat. Binionen		4+	4=8	abaa	bbaa
		alternat. Ternionen		abab	bbab
				abba	bbba
				abbb	bbbb
				8+	8=16
				alternat. Quaternionen.	

Dritte Claſſe der Fälle.

Wenn von zwey und mehrern wiederholten Größen die eine mehrmal als die andere wiederholet wird.

Zu wiſſen, wie vielmal eine Anzahl von Dingen, worinnen mehrere Größen, und die eine öfter als die andere wiederholet worden, nach ihrer höchſten Quotenität verbunden werden könne. §. 439.

1) Betrachtet die Dinge als wenn ſie alle verſchieden wären, und berechnet, nach Anweiſung des zweyten Abſchnitts, erſtlich die in der Zahl aller Dinge, und hernach die in der Zahl der Wiederholung jeder Größe enthaltnen alternativiſchen Verbindungen. 2) Dividiret die gefundne Zahl der erſten Operation nach und nach durch die gefundnen Zahlen der andern Operationen, ſo viel als deren ſind. Z. E.

Es ſey aaabbc.

Die Anzahl aller Dinge iſt =6; a iſt dreymal geſetzet; und b zweymal. Alſo:

Es ſey aaabbbcc.

Die Anzahl aller Dinge iſt =8; a iſt dreymal geſetzet; b dreymal, und c zweymal. Alſo

1) $6\times5\times4\times3\times2\times1=720$
und $3\times2\times1=6$
und $2\times1=2$

2)
für a. 6) $\frac{720}{120}$
für b. 2) $\frac{120}{60}$ gefundne Anzahl der höchsten, allhier senarischen Verbindungen in aaabbc.

1) $8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=40320$
und $3\times2\times1=6$
$3\times2\times1=6$
$2\times1=2$

2)
für a. 6) $\frac{40320}{6720}$
für b. 6) $\frac{6720}{1120}$
für c. 2) $\frac{1120}{560}$
gefundne Anzahl der höchsten, allhier octonarischen, Verbindungen.

§. 440.

Wenn man die höchsten Verbindungen einer sich beständig durch eine neue verschiedene Größe vermehrenden Anzahl von Dingen progreßionsmäßig hinter einander entwickeln will, so kann solches durch folgenden verkürzten Calcul geschehen.

Suchet die Anzahl der höchsten Verbindungen, welche in den sämtlichen wiederholten Größen enthalten sind, und multipliciret die gefundne Anzahl derselben von einer Operation zur andern durch die Zahl der wiederholten Dinge $+1, +2, +3$, u. s. w. als:

aaabb	10 höchste Verbindungen.	
	$6=5+1$	Die Zahl 5 ist die Zahl der wiederholten Dinge.
aaabbc	60	
	$7=5+2$	
aaabbcd	420	
	$8=5+3$	
aaabbcde	3360	
	$9=5+4$	
aaabbcdef	30240	u. s. w.

Also um die höchsten Verbindungen von folgender Aufgabe zu finden.

aaabbcc

aaabbcc hat 210 höchſte Verbindung.

8 = 7 + 1. Die Zahl 7 iſt die Zahl der wiederholten Dinge.

aaabbccd 1680

9 = 7 + 2

aaabbccde 15120

10 = 7 + 3

aaabbccdef 151200 u. ſ. w.

§. 441.

Von der Verbindungskunſt haben unter andern folgende Mathematiker im Ziffercalcul gehandelt, 1) **Athanaſius Kircher**, deſſen *Ars magna ſciendi ſive combinatoria* im Jahre 1669 zu Amſterdam herausgekommen. Es hat aber der Verfaſſer nicht ſowohl die Abſicht gehabt, die Verbindungskunſt zu lehren, als ſie vielmehr auf allerhand Fragen aus verſchiednen Wiſſenſchaften und Künſten dialektiſch anzuwenden; weswegen auch dem reinen oder eigentlichen Calcul nicht mehr als ein paar Blätter in einem dicken Folianten von etwann drittehalb Alphabet gewidmet worden ſind. Den Anlaß zur Verfertigung dieſes Werks gab dem Verfaſſer die, unter den Gelehrten ſeiner Zeit annoch viel Aufſehen machende, ſo genannte Erfindungskunſt des **Raymundus Lullus**, welche von vielen commentiret, von einigen verachtet, von andern vergöttert, und von keinem jemals verſtanden worden war. Kircher, der gewiß wußte, daß in der **Lullianiſchen** oder lulliſchen Kunſt nicht das Geheimniß Gold zu machen ſteckte, welches einige Laboranten darinnen zu finden vermeinten, ſchlug in Erklärung derſelben, von ſeinem großen Genie und ſeiner ausgebreiteten Gelehrſamkeit unterſtützet, einen andern Weg als ſeine Vorgänger ein; nahm die Geſetze der Combination zu Hülfe, und damit entſtand die groſſe Kunſt, über jede aufgegebne Materie, ich weiß nicht vernünftig zu reden, oder auf ſcholaſtiſche Art ins Unendliche zu plaudern, *Ars magna gaxriendi*. Von der beſondern Anwendung der Verbindungskunſt auf die Muſik hat Kircher in ſeiner **Muſurgie**, oder ſogenannten

genannten *Ars magna Conſoni & Diſſoni* einige Proben gegeben. 2) Bernard Frenicle, deſſen *Abrégé des Combinaiſons* den Memoires de l'Academie Royale des Sciences, contenant les ouvrages adoptés par cette Academie avant ſon renouvellement en 1699, Tom. II. einverleibet worden iſt. (Man findet eben daſelbſt eine Abhandlung dieſes Autors über die Zauberquadrate, ein ſehr deutliches und ausführliches Werk über dieſen Gegenſtand.) 3) Johannes Walliſius, Profeſſor der Geometrie zu Oxford, welcher ſeinem Tractat von der Algebra eine Anleitung zur Verbindungskunſt, im Ziffercalcul angehänget hat. 4) Andreas Taquet, Lehrer der Mathematik bey dem Jeſuitercollegio zu Antwerpen, in deſſen Arithmetik ein Capitel von der Verbindungskunſt zu finden iſt. 5) Jacob Ozanam, Profeſſor der Mathematik zu Paris, welcher in dem erſten Theile ſeiner *Recréations mathématiques* allerhand Aufgaben aus der Verbindungskunſt beygebracht hat. Die neuern Mathematiker, z. E. Wolf, und die Hrn. v. Segner, Käſtner, Clemm und andere haben den combinatoriſchen Calcul meiſtentheils algebraiſch gelehret; und auf eben dieſe Art findet man ſelbigen, in Anwendung auf die aus der Verbindungskunſt entſtandne Zahlenlotterie, in den Memoires der Kön. Preuß. Academie der Wiſſenſchaften, von den Herren Euler, Bernoulli und Beguelin abgehandelt.

Viertes Buch
von der
Construction
der
eckigten geometrischen Körper.

Construction
der
eckigten geometriſchen Körper.

Vorbericht.

§. 442.

Man verſtehet durch einen geometriſchen Körper eine Größe, welche in die Länge, Breite und Tiefe ausgedehnet iſt. Nach Beſchaffenheit der Oberflächen, welche krumm oder geradelinicht ſeyn können, werden dieſe Körper in krummlinichte und geradlinichte unterſchieden, und jene insgemein runde, dieſe aber eckigte Körper genennet. Ihre Conſtruction geſchicht nach Anleitung gewiſſer Figuren, welche man Netze heiſſet, und man verſtehet durch ein Netz die Vorſtellung der einzelnen Flächen, welche einen Körper einſchlieſſen, nach derjenigen Ordnung, in welcher ſolche, bey der ſchicklichſten Ordnung eines Körpers, auf einer Ebene neben einander zu liegen kommen.

Erſte Anmerkung.

Ungeachtet die runden Körper ſchwerer als die eckigten zu verfertigen ſind, ſo iſt doch ihre Verfertigung nicht unmöglich; und eine ausführliche und praktiſche Beſchreibung derſelben würde

würde also ein sehr brauchbares Werk seyn: ich sage ausführliche Beschreibung, weil man sich nicht auf die gewöhnlichen runden Körper, als die Sphäre, den Conus und Cylinder, einschränken, sondern auch die ungewöhnlicheren, als die paraboliſchen, elliptiſchen und hyperboliſchen Conoiden abhandeln müßte; und praktiſch, damit man die gelehrten Diſcurſe der Meßkünſtler, welche nicht alle brauchten wiederholet oder umgearbeitet zu werden, nur nach den bequemſten Handgriffen zu realiſiren hätte. Nach dem Berichte des Herrn von Wolf, hat Keppler in einem unter dem Titel: Auszug aus der uralten Meßkunſt Archimedis, herausgegebnen Werke über neunzig conoidiſche Körper berechnet, welches, da es ohne Zweifel noch hin und wieder zu haben iſt, bey der Auſſetzung eines neuen aber praktiſchern Werks über dieſe Materie, vielleicht gut zu nutzen ſeyn würde.

Zweyte Anmerkung.

Die Körper können aus allerley Materie, als Pappe, Holz, Wachs, Thon, Glaß und Metall verfertiget werden. Bey Verfertigung derſelben aus Pappe iſt es nicht nöthig die Figuren aus der Pappe einzeln herauszuſchneiden: ſondern es iſt genug, daß man die Seiten einkerbet, und zwar etwas über die Hälfte der Dicke dieſer Pappe, damit ſich ſolche bequem umlegen laſſen. Zur Herausſchneidung des Netzes und der unnützen Pappe zwiſchen den Perimetern der Figuren, wird ein langes Meſſer von der Art derjenigen, als ſich die Buchbinder bedienen, beſſer als ein Federmeſſer ſeyn, und ſolches brauchet nicht mit Gewalt geführet, ſondern nur mit einem ſchwachen Druck begleitet, und längs dem Liniql mit der Spitze wiederholt angeſetzet zu werden.

§. 443.

Die Figuren, aus welchen die Körper entſtehen, werden vom Euklides in nicht mehr als reguläre und irreguläre Figuren eingetheilet; und er nennet reguläre Figuren diejenigen, in welchen alle Seiten und Winkel gleich ſind, und irreguläre, in welchen entweder die Seiten oder Winkel, oder ſowohl die Seiten als Winkel ungleich ſind. Zwiſchen dieſen beyden Eigenſchaften der Figuren wird von verſchiednen neuern Mathematikern eine mittlere angenommen, welche ſie regulär in uneigentlichem Verſtande, oder halbregulär

regulär, oder symmetrisch nennen. Nach dieser Eintheilung der Figuren, welcher wir folgen werden, sind

α) **reguläre Figuren in eigentlichem Verstande**, oder schlechtweg **reguläre Figuren diejenigen**, in welchen alle Seiten und Winkel gleich sind; z. E. Tab. IX. Fig. 4. 5. 6.

β) **symmetrische Figuren** diejenigen, welche in zwey gleiche und ähnliche Hälften getheilet werden können, z. E. Tab. IX. Fig. 7. 8. 9. 10. 11. 12. und

γ) **irreguläre Figuren** diejenigen, in welchen die eine Hälfte der andern ungleich und unähnlich ist. z. E. Tab. XIII. Fig. 3. 4. 5. 6.

Anmerkung.

Die Ordnung der Seiten einer regulären Figur ist aus allen Ständen dieser Figur sofort zu erkennen; die symmetrischen erfordern einen gewissen Stand, wenn man die Ordnung ihrer Theile bequem einsehen will, und die irregulären Figuren mögen gestellet werden, wie sie wollen, so ist, in Absicht auf das Ganze, nirgends eine Ordnung zu finden. — Alle reguläre Figuren sind zugleich symmetrisch; aber keine symmetrische Figur ist regulär.

§. 444.

Unter allen möglichen Figuren sind bloß die **Dreyecke**, reguläre, symmetrische und irreguläre, **einfache Figuren**, und alle übrigen, vom Viereck an **zusammengesetzte Figuren**. Denn obgleich jedes Dreyeck wieder in drey kleinere Dreyecke zergliedert werden kann: so sind diese Figuren doch immer Dreyecke; und da sich alle übrige Figuren in Dreyecke auflösen lassen, es mögen diese Dreyecke übrigens regulär, symmetrisch oder irregulär seyn, so werden sie aus diesem Grunde **zusammengesetzte Figuren** genennet, so wie man die Dreyecke deßwegen **einfache Figuren** nennet, weil sie durch sich selbst aufgelöset werden können, oder weil sie keiner Auflösung bedürfen. Annoch sind Dreyecke die allerersten eckigten Figuren in jeder Art, und die Ursache ist, weil keine geradlinichte Fläche von zwey Seiten allein eingeschlossen werden kann.

Erſter Abſchnitt.

Von den regulären Figuren.

§. 445.

Die allererſte reguläre Figur iſt das gleichſeitige oder reguläre Dreyeck; die zweyte das reguläre Viereck oder Quadrat; die dritte das reguläre Fünfeck, u. ſ. w. Da es unter den ſymmetriſchen Figuren auch gleichſeitige Vielecke giebet: ſo können die Wörter **gleichſeitig** und **regulär**, nur in Anſehung des Dreyecks, nicht aber der folgenden Vielecke, als ſynoniniſch gelten. Dieſe reguläre Figuren werden entweder **aus einer Zirkellinie erfunden**, oder **über einer geraden Linie conſtruiret**; jenes, wenn ſowohl die Seitengröſſe als der Winkel einer zu beſchreibenden Figur unbekannt iſt; dieſes, wenn die Seitengröſſe eines Vielecks bekannt iſt, und alſo nur der Winkel, unter welchem die bekannten gleichen Seiten aneinander gehänget werden ſollen, geſuchet wird. Die Regeln der Conſtruction ſind in beyden Fällen entweder **beſondere** oder **allgemeine Regeln**. In wie weit dieſe Regeln **pur geometriſch**, oder **geometriſch-mechaniſch** ſind, wird in den mit Beweiſen verſehenen Lehrbüchern der Geometrie gezeiget. Wenn man zur Erfindung einer Figur ſich bloſſer Verſuche bedienet, indem man z. E. bey Einſchreibung derſelben in eine Zirkellinie, dieſe Linie bald verkleinert oder vergröſſert, oder indem man die Seiten bald verlängert und bald verkürzet: ſo nennet man dieſes eine **mechaniſche Methode**. Die pur geometriſche Manier zur Aufreiſſung eines regulären Vielecks erſtrecket ſich nur auf wenig Fälle, und da Keppler in ſeiner Harmonik der Welt dargethan hat, daß es nicht einmal möglich iſt, ſich die Conſtruction gewiſſer Figuren, z. E. des Sieben- und Eilfecks, **aus geometriſchen Gründen** zu denken: ſo wird man in dieſem Punkte keine neue Entdeckungen zu erwarten haben. Man muß bey ſo bewandten Umſtänden da, wo die eigentlichen geometriſchen

Con-

Conſtructionen fehlen, die geometriſch-mechaniſchen, worunter ſehr viele nur beynahe treffen, ſubſtituiren. Wenn unterdeſſen nach der beſten eigentlichen geometriſchen Methode gefehlet werden kann: ſo kann gegentheils nach der geometriſch-mechaniſchen Manier der geſuchte Endzweck ganz wohl erhalten werden, indem das beynahe ſo viel als nichts ſaget, wenn man nur die vorgeſchriebenen Operationen aufs genaueſte vollziehet. Ich werde zuerſt die beſondern Regeln zur Conſtruction regulärer Figuren, und hernach die allgemeinern, beyde ſoweit als ſie mir bekannt ſind, darlegen.

Erſter Artikel.

Beſondere Regeln zur Erfindung regulärer Figuren aus der Zirkellinie; oder zur Einſchreibung regulärer Figuren in eine Zirkellinie.

(I.) Ein reguläres Drey- Sechs- Zwölf- oder Vier und Zwanzig-Eck in eine Zirkellinie zu ſchreiben. Tab. XXXVIII. Fig. 1. §. 446.

1) Traget den Radius AG ſechsmal auf der Zirkellinie herum, und ziehet allezeit die dritten Punkte zuſammen, als AC, CE und EA: ſo kömmt ein reguläres Dreyeck AEC.

2) Ziehet allezeit zwey Punkte zuſammen, als AB, BC, CD, DE, EF und FA; ſo kömmt ein reguläres Sechseck ABCDEF.

3) Halbiret den Bogen jeder Chorde des Sechsecks: ſo kömmt ein Zwölfeck, Fig. 2, und wenn der Bogen jeder Chorde des Zwölfecks halbiret wird: ſo kömmt ein Vier und zwanzig Eck; und auf ähnliche Art kann eine Peripherie in acht und vierzig, ſechs und neunzig u.ſ.w. gleiche Theile zerfället, und eine reguläre Figur von ſo viel Ecken hervorgebracht werden.

Anmerkung.

Um noch geſchwinder ein Dreyeck zu verfertigen, darf man nur mit dem Radius, aus welchem Theile der Peripherie es gefällig iſt, nach zwey andern Theilen derſelben, durch das Center, einen Bogen ziehen. Die Sehne deſſelben giebet die Seite des Dreyecks. Z. E. wenn bey Fig. 1. Tab. XXXVIII. aus dem Punkt D, mit dem Radius DG, der Bogen CGE beſchrieben wird, ſo giebet die Sehne CE ein Drittheil der Figur, und man brauchet ſolche nur aus C in A, oder aus E in A zu tragen.

(II.) Ein reguläres Vier- Acht- und Sechszehneck in eine Zirkellinie zu ſchreiben. Tab. XXXVIII. Fig. 3. §. 447.

1) Ziehet die beyden im Center I ſich recht winklicht einander durchſchneidenden Diameter AB und CD, und hänget ihre Enden A, B, C, D durch gerade Linien zuſammen: ſo iſt das Viereck vollendet.

2) Halbiret die vier Bogen AC, CB, BD und DA, und ziehet die Sehnen AE, EC, CF, FB, BG, GD, DH und HA: ſo kömmt ein reguläres Achteck AEC FBGDH.

3) Wenn auf ähnliche Art jeder Bogen eines Achtecks halbiret wird: ſo entſtehet ein reguläres Sechszehneck; und wenn jeder Bogen eines Sechszehnecks halbiret wird: ſo kömmt ein Zwey und dreyßigeck, u. ſ. w.

(III.) Ein reguläres Fünf- Zehn- und Zwanzigeck in eine Zirkellinie zu ſchreiben. Nach der Methode des Ptolomäus. Tab. XXXVIII. Fig. 4. §. 448.

1) Ziehet die beyden, in dem Mittelpunkt G, ſich einander perpendikulär durchſchneidenden Durchmeſſer AB und CD. 2) Halbiret den Radius GB in E, und beſchreibet mit der Weite EC aus E den Bogen CF. Die Sehne dieſes Bogens CF giebet die Seite des Fünfecks CH und die Linie FG die Seite des Zehnecks.

Wenn die zehn Bogen des Zehnecks halbiret werden: ſo entſtehet ein Zwanzigeck, u. ſ. w.

(IV.) Ein

(IV) Ein reguläres Sieben- Vierzehn- und Acht und Zwanzigeck in eine Zirkellinie zu ſchreiben. Tab. XXXVIII. Fig. 5. §. 449.

1) Reiſſet mit dem Radius AB, aus A den Bogen CBD. 2) Ziehet die Punkte C und D durch eine gerade Linie zuſammen: ſo giebet die Weite CE oder ED beynahe das Maaß zu einer Seite für das verlangte Siebeneck.

Wenn jeder Bogen des Siebenecks halbiret, und die Hälfte mit einer Sehne zuſammengezogen wird: ſo entſtehet ein Vierzehneck. Auf ähnliche Art kann aus einem Vierzehneck ein Acht und zwanzigeck, u. ſ. w. erzeuget werden.

(V.) Ein reguläres Neun- und Achtzehneck in eine Zirkellinie zu ſchreiben. Tab. XXXVIII. Fig. 6. §. 450.

1) Ziehet den Radius AB, und mit ſelbigem aus A den Bogen CBD. 2) Hänget die Enden der Bogen durch die gerade Linie DEC zuſammen, und verlängert die Linie DEC in F dergeſtalt, daß EF = AB werde. 3) Beſchreibet mit dem Radius AB, aus dem Durchſchnitt E, den Bogen FG, und aus F den Bogen EG. 4) Ziehet aus dem Center B nach dem Durchſchnitt G die gerade Linie BHG: ſo ſchneidet ſich zwiſchen C und H der Bogen zu einer Sehne ab, welche ſich beynahe neunmal auf der Peripherie herumtragen läſſet.

Wenn jeder der neun Bogen halbiret wird: ſo kömmt ein Achtzehneck; und auf ähnliche Art kann aus einem Achtzehneck ein Sechs und Dreyßigeck, u. ſ. w. hervorgebracht werden.

Anmerkung.

Wenn man ein reguläres Dreyeck in einem Zirkel beſchreibet, und jeden Bogen in drey gleiche Theile theilet: ſo erhält man auch ein Neuneck.

(VI.) Ein reguläres Eilf- und Zwey und zwanzigeck in eine Zirkellinie zu ſchreiben. §. 451.

Erſte Manier. Tab. XXXVIII. Fig. 7.

Schreibet ein reguläres Dreyeck ABC in die Zirkellinie, und ziehet die beyden im Center G ſich rechtwinklicht durchſchneidenden Diameter CF und DE, von welchen der eine CF durch die Spitze des Dreyeckes ABC gehen muß. Der durch die Linie CA von dem Radius DG abgeſchnittne Theil HG giebet beynahe eine Seite des verlangten Eilfecks.

Wenn die eilf Bogen des Eilfeckes halbiret werden: ſo entſtehet ein Zwey und zwanzigeck; und auf ähnliche Art kann aus dem Zwey und zwanzigeck ein Vier und vierzigeck, u. ſ. w. erzeuget werden.

Zweyte Manier. Tab. XXXVIII. Fig. 8.

1) Halbiret den Radius AB in C. 2) Beſchreibet mit der Weite BC aus B den Bogen CD, und durchſchneidet denſelben, mit unveränderter Weite, aus C in E. 3) Faſſet die Sehne des kleinen Bogens DE, und beſchreibet damit aus D den kleinen Bogen EF. 4) Ziehet die gerade Linie CF, welche die Größe einer Seite für das Eilfeck beynahe geben wird.

(VII.) Ein reguläres Dreyzehn- und Sechs und Zwanzigeck in eine Zirkellinie zu ſchreiben. §. 452.

Theilet den Radius der gegebnen Zirkellinie in zwey gleiche Theile, und nehmet einen davon für die Seite eines Dreyzehnecks. Trift beynahe.

Aus der Halbirung der Bogen wird ein Sechs und zwanzigeck, u. ſ. w. hervorgebracht.

(VIII.) Ein reguläres Funfzehn- und Dreyßigeck in eine Zirkellinie zu ſchreiben. Tab. XXXVIII. Fig. 9. §. 453.

1) Schreibet in die Zirkellinie ein reguläres Dreyeck ABC

A B C, und aus der Spitze C ein reguläres Fünfeck CDEFG.
2) Faſſet die Weite von A zu E, oder von F zu B, welche eine von den funfzehn Sehnen des verlangten Vielecks ſeyn wird.

Wenn die funfzehn Bogen halbiret werden: ſo entſtehet ein Dreyßigeck, u. ſ. w.

(IX.) Ein reguläres Siebzehneck in eine Zirkellinie zu ſchreiben. §. 454.

Theilet den Radius der gegebnen Zirkellinie in funfzehn gleiche Theile, und nehmet funf und einen halben Theil für die Seite des Siebzehneckes. Beynahe. Aus der Halbirung der Bogen kann ein Vier u. dreyßigeck, u. ſ. w. erzeuget werden.

(X.) Ein reguläres Neunzehneck in eine Zirkellinie zu ſchreiben. §. 455.

Theilet den Radius der gegebnen Zirkellinie in drey gleiche Theile, und nehmet einen davon für die Seite des Neunzehnecks. Beynahe. Aus der Halbirung der Bogen kann ein Acht und dreyßigeck, u. ſ. w. hervorgebracht werden.

§. 456.

Es giebet Fälle, wo man ſich nicht lange bey der Regel zur Verfertigung einer Figur aufhalten kann. In dieſen Fällen iſt es gut, abgetheilte Zirkellinien bey der Hand zu haben. Bey dieſer Abtheilung brauchet man nicht die gleichen Theile der Zirkellinie durch Sehnen zuſammenzuziehen; ſondern es iſt genug, daß man aus dem Center gerade Linien nach den Theilungspunkten ziehet, und innerhalb der Circumferenz ſo viele concentriſche Zirkel als man will, beſchreibet, ſo wie z. E. bey Fig. 1. 2. 3. Tab. IX. Wenn man nun eine reguläre Figur von einer gewiſſen Seitengröße verlanget: ſo wird die Zirkellinie dazu unter den gezogenen entweder ſchon vorhanden, oder durch Einſchaltung eines neuen concentriſchen Zirkels leicht auszumitteln ſeyn. Bey Verfertigung ſehr kleiner Figuren, ingleichen wenn man Figuren aus verſchiedenen Geſchlechten, z. E. drey- vier- fünf und mehreckigte von gleicher Seitengröße verlanget,

werden dieſe im voraus abgetheilten Zirkellinien ebenfalls vortheilhafte Hülfsmittel ſeyn.

Zweyter Artikel.

Beſondere Regeln zur Conſtruction regulärer Figuren über einer gegebnen geraden Linie.

(I.) Ein reguläres Dreyeck auf einer gegebnen Linie AB zu beſchreiben. Tab. XXXIII. Fig. 1. §. 457.

1) Reiſſet mit AB aus A und B die in C ſich einander durchſchneidenden Bogen AC und BC. 2) Ziehet die geraden Linien AC und BC: ſo wird das Dreyeck beſchrieben ſeyn.

(II.) Ein reguläres Viereck auf einer gegebenen Linie AB zu beſchreiben. §. 458.

1) Erhebet, entweder geometriſch oder mit Hülfe des Winkelmaaſſes, aus A die Perpendikuläre AD = AB. 2) Machet mit AB aus D und B den Durchſchnitt C, und ziehet die Linien BC und CD. Tab. XXXIII. Fig. 2.

Folgende zwey Methoden ſind mehr ſinnreich, als brauchbar.

1) Reiſſet mit der gegebnen Linie AB aus A den unbeſtimmten Bogen BCD, und aus B den unbeſtimmten Bogen ACF, und machet mit der Linie AB aus dem Durchſchnittspunkt C einen Durchſchnitt in D. 2) Halbiret den Bogen CD in E, und traget die Größe AB aus E in F. 3) Ziehet die Linien AE, EF und FB, von welchen jede = AB. Tab. XXXIII. Fig. 3.

1) Reiſſet mit der Größe der gegebnen Linie AB, aus A, den Bogen BCD, und aus B den Bogen ACF. 2) Machet mit der Linie AB aus dem Durchſchnitt C ein Zeichen in D, und ziehet aus dem Durchſchnittspunkt D die Linie DEB. 3) Machet ferner mit der Linie AB, aus dem Durchſchnitt E einen Durchſchnitt in F, und aus F in G. 4) Ziehet die Linien AG, GF und FB, von welchen jede = AB. Tab. XXXIII. Fig. 4.

(III.) Ein

(III.) Ein reguläres Fünfeck auf einer gegebenen Linie AB zu beſchreiben. Fig. 5. Tab. XXXIII. §. 459.

1) Verlängert die gegebne Linie AB unbeſtimmt in C, und richtet über B die Perpendikuläre BD = BA auf. 2) Halbiret die Linie AB in E, und reiſſet mit der Weite ED, aus E, den Bogen CD. 3) Faſſet die Weite AC, und machet aus A und B, den Durchſchnitt F. 4) Machet mit der Linie AB, aus A und F einen Durchſchnitt G, und aus B und F einen Durchſchnitt H. Wenn nun die Punkte AG, GF, FH, und HB, zuſammengezogen werden: ſo entſtehet das verlangte Fünfeck.

Es findet ſich in Albrecht Dürers Geometrie eine Methode mit unverrücktem Zirkel ein Fünfeck aufzureiſſen. Es iſt wahr, daß ein Fünfeck entſteht; aber kein reguläres, ſondern ein ſymmetriſches, indem zwar alle Seiten, aber nicht alle Winkel gleich ſind; wie ſolches vermittelſt der Anlegung eines Transporteurs an die Winkel, durch die Erfahrung beſtätiget werden kann, und vom Clavius, Prätorius und andern geometriſch erwieſen worden iſt. Die Aufreiſſung dieſes Fünfecks geſchicht folgendermaſſen.

1) Beſchreibet bey Fig. 6. Tab. XXXIII. mit der gegebnen Linie AB aus A den Zirkel F; aus B den Zirkel G; aus dem Durchſchnitt H der beyden Zirkel durch A und B den Bogen ILK, und aus eben dieſem Durchſchnitt H, durch L und M, die Linie HD. 2) Ziehet durch den Durchſchnitt L die Linie KLE und die Linie ILC. 3) Machet mit der Linie AB, aus C und E, einen Durchſchnitt D, und ziehet die Linien ED, DC, CB und EA, von welchen jede = AB: ſo wird das Fünfeck ABCDE beſchrieben ſeyn.

(IV.) Ein reguläres Sechseck auf einer gegebenen Linie AB zu beſchreiben. Tab. XXXIII. Fig. 7. §. 460.

1) Reiſſet mit der gegebnen Linie AB aus A den Bogen BC, und aus B den Bogen AC. 2) Beſchreibet mit

der Weite AC oder BC aus dem Durchſchnitt C ein blinde Zirkellinie, und traget die gegebne Größe AB ſechsmal auf ſolcher herum.

(V.) Ein reguläres Siebeneck auf einer gegebenen Linie AB zu beſchreiben. Tab. XXXIII. Fig. 9. §. 461.

1) Verlängert die gegebne Linie AB nach Belieben auf beyden Seiten in C und E, doch dergeſtalt, daß CB = AE, und reiſſet den gleichſeitigen Triangel CDE. 2) Halbiret die Linie AB in F, und ziehet FD, welche gegen AB perpendikulär iſt. 3) Traget die Linie AB aus der Spitze des Triangels D in G, und ziehet durch G die Linie HI parallel mit EC oder AB. 4) Machet mit der Linie HI aus A und B einen Durchſchnitt K, und beſchreibet mit der Weite AK oder KB aus dem Center K einen blinden Zirkel, auf welchem ſich die gegebne Linie AB beynahe ſiebenmal herumtragen läſſet.

Andere Manier. Tab. XXXIII. Fig. 8.

1) Verlängert die gegebne Linie AB dergeſtalt in B, daß BC = AB werde. 2) Machet mit der Weite AC, aus A und C, einen Durchſchnitt D, und aus C und D einen Durchſchnitt E, ziehet die Linien BD und AE und merket den Durchſchnitt F. 3) Reiſſet mit der Weite AF aus A und B einen Durchſchnitt G, und ziehet mit der Weite GA oder GB, aus dem Center G ein blinde Peripherie, auf welcher ſich die gegebne Linie AB beynahe ſiebenmal herumtragen laſſen wird.

(VI.) Ein reguläres Achteck auf einer gegebnen Linie AB zu beſchreiben. Tab. XXXIII. Fig. 10. §. 462.

1) Halbiret die gegebne Linie AB in C, und erhebet aus der Mitte C die unbeſtimmte Perpendikuläre CE. 2) Beſchreibet mit der Linie CB, aus C, einen Bogen ADB, und ziehet die Linien AD und BD. 3) Beſchreibet mit

der

der Weite DB oder DA, aus D, einen Bogen AEB und ziehet die Linien AE und BE. 4) Reisset aus E, mit der Weite AE oder BE, einen blinden Zirkel, und traget die gegebne Linie AB achtmal auf selbigem herum.

(VII.) Ein reguläres Neuneck auf einer gegebnen Linie AB zu beschreiben. Tab. XXXIV. Fig. 1. §. 463.

1) Halbiret die gegebne Linie AB in C, und erhebet aus C eine Perpendikuläre CF von unbestimmter Länge. 2) Zerschneidet die Perpendikuläre CF mit der Linie AB aus A, durch den Bogen BD; und traget die Hälfte von AB aus D nach E. 3) Reisset aus dem Punkt E, mit der Weite EA, oder EB, eine blinde Circumferenz, und traget auf selbiger die gegebne Linie AB neunmal herum.

(VIII.) Ein reguläres Zehneck auf einer gegebnen Linie AB zu beschreiben. Tab. XXXIV. Fig. 2. §. 464.

1) Verlängert die gegebne Linie AB unbestimmt in C, und richtet über B die Perpendikuläre BD = BA auf. 2) Halbiret die Linie AB in E, und reisset mit der Weite ED, aus E, den Bogen DC. 3) Fasset die Weite AC, und machet aus A und B den Durchschnitt F. (Vorhergehende Operationen sind alle wie beym Fünfeck.) 4) Beschreibet mit voriger Weite AC, aus F, eine blinde Peripherie, auf welcher die gegebne Linie AB sich zehnmal wird herumtragen lassen.

(IX.) Ein reguläres Eilfeck auf einer gegebenen Linie AB zu beschreiben. Tab. XXXV. Fig. 1. §. 465.

Die Auflösung dieses Problems, wenigstens auf folgende Art, erscheinet allhier zum erstenmal.

1) Halbiret die gegebne Linie AB in C, und ziehet aus C eine unbestimmte Perpendikuläre CD. 2) Traget die Linie AB auf die Perpendikuläre CD drey- und ein halbesmal; nemlich ganz aus C in E, aus E in F, aus F in G; und

halb,

halb, das ist mit der Weite AC, aus G in D. Die Länge CD giebet die Höhe des Eilfecks. 3) Beschreibet mit beliebiger Oefnung des Zirkels, jedoch unter der Hälfte der Perpendikuläre DC nach dem Augenmaaße, aus D einen Bogen HI, und durchschneidet solchen mit unveränderter Oefnung, aus A in H und I. 4) Ziehet die Linie HI, und reisset aus dem Punkt K, wo die Perpendikuläre durchschnitten wird, mit der Weite KA oder KB, eine blinde Peripherie, auf welcher sich die gegebne Linie AB eilfmal herumtragen lässet.

(X.) Ein reguläres Zwölfeck auf einer gegebnen Linie AB zu beschreiben. Tab. XXXV. Fig. 2. §. 466.

1) Halbiret die gegebne Linie AB in C, und richtet die Perpendikuläre CE von unbestimmter Länge auf. 2) Beschreibet mit der gegebnen Linie AB, aus A, den Bogen BD, und aus B den Bogen AD. 3) Traget die Länge AB aus D in E, und ziehet den Triangel AEB. Die Weite AE giebet den Radius zu einem Zirkel, auf welchem sich die gegebne Linie AB wird zwölfmal herumtragen lassen.

Dritter Artikel.

Allgemeine Regel zur Construction regulärer Figuren durch den Gebrauch des krummlinichten Transporteurs.

(1) In eine gegebne Zirkellinie jedes reguläre Vieleck, z. E. ein Fünfeck zu schreiben. Tab. XXVI. Fig. 6. §. 467.

1) Theilet die Peripherie = 360° durch die Eckzahl der Figur, und also allhier durch 5; kommen 72° für den Centerwinkel derselben. 2) Stellet den Transporteur auf den 72ten Grad; leget ihn an den Mittelpunkt E der Zirkellinie, und bemerket auf derselben die beyden Punkte D und B, durch welche der Centerwinkel gehet. 3) Ziehet die Sehne DB, und traget solche fünfmal auf der Peripherie herum.

(II.) Auf

(II.) Auf einer gegebnen Linie BD jedes regulare Vieleck, z. E. ein Fünfeck zu beschreiben. §. 468. Tab. XXVI. Fig. 6.

1) Theilet die Peripherie des Zirkels 360 durch die Eckzahl der Figur, und also allhier durch 5; und ziehet den kommenden Centerwinkel 72 von der halben Peripherie 180 ab; bleibt der Polygonwinkel 108 des Fünfecks zurück. 2) Stellet den Transporteur auf 108; leget ihn an die Linie DB; bemerket den Punkt H, durch welchen der Zeiger des Transporteurs gehet, und ziehet die Linie DH = BD. 3) Beschreibet durch die drey Punkte BDH eine blinde Peripherie, und traget die annoch fehlenden drey Sehnen HG, GF und FB jede = DB, in selbige: so kömmt das regulare Fünfeck BDHGF.

Auf ähnliche Art kann jedes andere regulare Vieleck construiret werden.

Vierter Artikel.

Allgemeine Regel zur Construction regulärer Figuren, durch den Gebrauch des geradlinichten Transporteurs.

§. 469.

Der geradlinichte Transporteur ist ein geometrischer Maaßstab, auf welchem die Größe der Winkel durch die Sehnen der Bogen gefunden werden kann. Ich werde, da er nicht so bekannt als der krummlinichte ist, zuvor seine Construction beschreiben, und hernach seinen Gebrauch lehren.

Einen geradlinichten oder Chordentranspor-teur zu beschreiben. Tab. XL. Fig. 1. §. 470.

1) Zeichnet bey Fig. 1. Tab. XL einen Zirkelquadranten ABC von gefälliger Größe, und theilet ihn in neun gleiche Theile, von welchen ein jeder = 10° seyn wird, da ein Quadrant aus 90° besteht, und bemerket die Theile durch 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 und 90. Die Theilung

zu

zu erleichtern, kann mit der Größe des Radius BA oder AC, der Quadrant erstlich aus B in dem Punkt 60, und aus C in den Punkt 30, durchschnitten werden, wodurch derselbe in drey gleiche Theile zerfället wird. Jeder dieser Theile kann nun wiederum mechanisch in drey gleiche kleinere Theile zerfället werden.

2) Reisset mit der Weite BC, bey Fig. 2. Tab. XL eine gerade Linie ED, und traget auf selbige nach und nach die Chorden des Quadranten, in den Größen, als sie bey Fig. 1. gefunden worden, nemlich die Chorde B 10 aus E in 10; die Chorde B 20 aus E in 20; die Chorde B 30 aus E in 30; die Chorde B 40 aus E in 40, u. s. w.

3) Erhöhet aus E eine Perpendikuläre EF von gefälliger Länge, und theilet sie in 10 gleiche Theile.

4) Construiret eine Perpendikuläre DG aus D von gleicher Höhe mit der vorigen; theilet sie ebenfalls in 10 gleiche Theile, und ziehet durch die Theilungspunkte der beyden Perpendikulären die Linie FG parallel mit DE.

5) Traget auf die oberste Linie GF eben die 10 Theile, welche auf der untersten DE abgestochen worden, und ziehet die 9 Transversallinien E 10; 10, 20; 20, 30; 30, 40, u. s. w.

6) Zeichnet in der Linie EF 10 die Chorden der einzelnen Grade mit 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, und 9, und ziehet durch die Theilungspunkte 1, 2, 3, 4 ꝛc. neun Parallelen mit ED oder FG: so wird der geradlinichte Transporteur vollendet seyn; dessen Gebrauch in Absicht auf die Messung eines Winkels überhaupt, und in Absicht auf die Construction der regulären Figuren besonders, aus folgenden drey Aufgaben erhellen wird.

(I.) Einen gegebnen Winkel NLM auszumessen. Tab. XL. Fig. 3. §. 471.

1) Nehmet den Radius des Transporteurs, nemlich die Chorde von 60°, das ist die Weite von E 60, oder F 60, von dem Transporteur ab, und beschreibet damit aus der Winkelspitze L den Bogen OP. 2) Messet die Chorde dieses Bogens OP auf dem Transporteur auf eben die Art, als

als man auf einem verjüngten Maaßstabe misset: so kömmt die Zahl der Grade, allhier 45°, welche der gegebne Winkel NLM in sich hält.

(II.) In eine gegebne Zirkellinie jedes reguläre Vieleck, z. E. ein Fünfeck zu beschreiben.

Tab. XXXVII. Fig. 1. §. 472.

1) Ziehet den Radius AE, und verlängert ihn unbestimmt in D. 2) Nehmet die Chorde von 60°, das ist, die Weite von E 60, oder F 60, von dem geradlinichten Transporteur ab, und beschreibet damit aus dem Center A einen unbestimmten Bogen FG. 3) Berechnet den Centerwinkel des Vielecks; ist = 72° für das Fünfeck. Nehmet die Chorde desselben von dem Transporteur, und schneidet sie auf dem Bogen FG aus F in C ab. 4) Ziehet aus dem Center A nach dem Durchschnitt C die gerade Linie AC, welche die gegebne Zirkellinie in B durchschneiden wird. Die Chorde EB ist die Seite des verlangten Fünfecks.

(III.) Auf einer gegebnen Linie AB jedes reguläre Vieleck, z. E. ein Fünfeck zu beschreiben.

Tab. XXXVII. Fig. 2. §. 473.

1) Verlängert die gegebne Linie AB dergestallt aus A in D, und aus B in C, daß AD und BC jede = AB, und beschreibet mit der Chorde von 60° aus A den Bogen CE und aus B den Bogen DE. 2) Berechnet den halben Polygonwinkel des Vielecks; ist 54° für das Fünfeck. Nehmet die Chorde desselben von dem Transporteur ab, und traget sie auf die Bogen CE und DE, aus C in G und aus D in F. 3) Ziehet aus A und B die Linien AG und BF, welche sich einander in H durchschneiden werden. 4) Beschreibet mit der Weite HA, oder HB, aus dem Punkte H eine blinde Circumferenz, auf welcher sich die gegebne Linie AB fünfmal herumtragen lässet.

Anmerkung.

Wenn eine Winkelzahl mit einem Bruche kömmt, so muß man ungefähr nach dem Augenmaaße den Zirkel auf dem geradlinichten Transporteur zwischen die Paralleln setzen. Z. E.

für

für den Winkel von 62½° muß man den Zirkel in H ſetzen und bis I öfnen. Eben ſo, wenn ⅓, ¼ u. ſ. w. kömmt.

Fünfter Artikel.

Allgemeine Regel zur Conſtruction regulärer Figuren, durch den Gebrauch des Proportionalzirkels.

(I) In eine gegebne Zirkellinie jedes reguläre Vieleck zu ſchreiben. §. 474.

Vermittelſt der Polygonlinie.

1) Traget den Radius der Zirkellinie auf die Polygonlinie von 6 zu 6. 2) Laſſet den Proportionalzirkel in voriger Oefnung, und ſuchet die Weite von 3 zu 3, wenn die Zirkellinie in drey gleiche Theile zerſchnitten werden ſoll; von 4 zu 4, wenn ſolche in vier gleiche Theile zerſchnitten werden ſoll; und ſo weiter, von 5 zu 5, von 6 zu 6, von 7 zu 7 ꝛc. wenn die Zirkellinie in fünf, ſechs, ſieben oder mehrere gleiche Theile zerſchnitten werden ſoll. 3) Traget die gefundne Weite ſo vielmal als es das verlangte Vieleck erfordert, auf der Zirkellinie herum.

(II.) Auf einer gegebnen Linie jedes reguläre Vieleck zu beſchreiben. §. 475.

Vermittelſt der Polygonlinie.

1) Traget die gegebne Linie auf die Polygonlinie von 3 zu 3, wenn ein reguläres Dreyeck auf der Linie beſchrieben werden ſoll; von 4 zu 4, wenn ein Viereck, und von 5 zu 5, wenn ein Fünfeck beſchrieben werden ſoll, u. ſ. w. 2) Laſſet den Proportionalzirkel in unverrückter Oefnung, und nehmet auf der Polygonlinie die Weite von 6 zu 6 ab. Die gefundne Weite giebet den Radius zu einem Zirkel für das verlangte Vieleck.

Auf eine andere Art.

(I.) In eine gegebne Zirkellinie ein reguläres Vieleck, z. E. ein Fünfeck zu schreiben. §. 476.

Vermittelst der Chordenlinie.

1) Traget den Radius der gegebnen Zirkellinie auf die Chordenlinie von 60 zu 60. 2) Berechnet den Centerwinkel des Vielecks, ist 72° für das zu construirende Fünfeck. 3) Lasset den Proportionalzirkel in voriger Oefnung, und suchet auf der Chordenlinie die Weite von 72 zu 72, welche sich auf der gegebnen Peripherie fünfmal herum tragen lassen wird.

(II.) Auf einer gegebnen Linie jedes reguläre Vieleck, z. E. ein Fünfeck zu beschreiben. §. 477.

1) Berechnet den Centerwinkel des Vielecks; ist 72. für das zu construirende Fünfeck; und traget die Länge der gegebnen Linie von 72 zu 72 auf die Chordenlinie. 2) Lasset den Proportionalzirkel in voriger Oefnung, und suchet auf der Chordenlinie die Weite von 60 zu 60. Die gefundne Weite giebet den Radius zu einem Zirkel für das verlangte Fünfeck.

Sechster Artikel.

Allgemeine Regel zur Construction regulärer Figuren, nach einer Methode des Clavius.

(I.) Auf einer gegebnen Linie AB jedes reguläre Vieleck, z. E. ein Fünfeck zu beschreiben. Tab. XXXIX. Fig. 1. §. 478.

1) Verlängert AB nach C, so daß BC = AB, und errichtet aus B eine Perpendikuläre BD = AB. 2) Beschreibet mit der Größe AB aus B den Quadranten CD, und theilet selbigen mechanisch in soviel gleiche Theile, als die Figur Ecken haben soll, und also allhier in fünf. 3) Ziehet aus B nach dem Fünftheil E die Linie BE, und beschrei-

bet durch die drey Punkte A B E einen Zirkel, auf welchem die gegebne Linie A B fünfmal herumgetragen wird.

(11.) In eine gegebne Zirkellinie jedes reguläre Vieleck, z. E. ein Siebeneck zu schreiben. Tab. XXXIX. Fig. 2. §. 479.

1) Ziehet die beyden in E sich rechtwinklicht einander durchschneidenden Diameter A C und B D, und theilet den Quadranten A B in so viele gleiche Theile, als die Figuren Ecken haben soll, und also allhier in sieben. 2) Nehmet vier solcher Theile, und hänget sie mit einer geraden Linie B 4 zusammen. Die Größe derselben giebet die Seite des Siebenecks.

Diese mechanische Methode ist, nach Bemerkung des Clavius und Schwenters, in soweit gut, als es leichter ist, einen Quadranten in gefällige gleiche Theile zu zerfällen, als einen Zirkel.

Siebenter Artikel.

Allgemeine Regel zur Construction regulärer Figuren nach der Methode Carls Renaldini.

§. 480.

In eine gegebne Zirkellinie jedes reguläre Vieleck, z. E. ein Siebeneck zu schreiben. Tab. XXXV. Fig. 3.

1) Ziehet den Diameter A B und theilet denselben in so viel gleiche Theile, als die Figur Ecken haben soll, z. E. allhier in 7. 2) Beschreibet mit A B aus A den Bogen D B C, und aus B den Bogen D A C. 3) Ziehet aus C durch den geraden Theilungspunkt 2 die Linie C 2 H; ferner durch 4 die Linie C 4 I und endlich durch 6 die Linie C 6 K. 4) Ziehet aus D durch den geraden Theilungspunkt 2 die Linie D 2 E; ferner durch 4 die Linie D 4 F, und endlich durch 6 die Linie D 6 G. 5) Hänget die Punkte A H I K G F E durch gerade Linien zusammen: so wird das Siebeneck beschrieben seyn.

Anmer-

Anmerkung.

Obgleich nach dieſer Methode in manchen Vielecken die Centerwinkel um einige Minuten zu klein, und in andern um einige Minuten zu groß werden, ſo wird ſie dennoch, wegen der Leichtigkeit ihrer Ausübung, und weil die Fehler in der Praxi wenig merklich ſind, von den Praktikern ſehr gebrauchet.

Achter Artikel.

Allgemeine Regel zur Conſtruction regulärer Figuren, nach der Methode Burchards von Pirkenſtein.

§. 481.

In eine gegebene Zirkellinie jedes reguläre Vieleck, z. E. allhier ein Dreyzehneck, zu ſchreiben. Tab. XXXV. Fig. 4.

1) Ziehet den Diameter AB, und aus deſſen Punkt A unter beliebigem Winkel eine gerade Linie AC, ſo lang, daß von A aus, dreyzehn gleiche Theile von willkührlicher Größe auf ſelbige getragen werden können. 2) Ziehet den lezten Theil 13 mit B zuſammen, und durch den zweyten Theil die den Diameter durchſchneidende Linie EFD parallel mit der Linie 13 B. 3) Machet mit der Weite des Diameters AB, aus A und B, den Durchſchnitt G, und ziehet aus G, durch den Durchſchnitt F, die Linie GFH. Der auf der Peripherie abgeſchnittne Theil AH wird die Seite des verlangten Dreyzehnecks geben.

Neunter Artikel.

Allgemeine Regel zur Conſtruction regulärer Figuren, durch den Bogen und die Perpendikuläre.

(I.) Auf einer gegebnen Linie AB jedes gefällige Vieleck, vom Sechs- bis Zwölfeck, zu beſchreiben. Tab. XXXIV. Fig. 3. §. 482.

1) Erhöhet aus der Mitte C der gegebnen Linie AB eine Perpendikuläre CD. 2) Durchſchneidet die Perpendikuläre

CD, mit der Linie AB, aus A und B durch die Bogen BE und AE, und theilet den Bogen BE in die ſechs gleichen Theile EF, FG, GH, HI, IK und KB. 3) Reiſſet aus E, worinn ihr den Zirkel ſtehen laſſet, mit der Weite EB, die Zirkellinie BQ; mit der Weite EK den Bogen PK; mit EI den Bogen OI; mit EH den Bogen NH; mit EG den Bogen MG; und mit EF den Bogen LF. 4) Das Center E, mit dem Radius EB giebet die Peripherie zu einem Sechsecke; das Center L mit dem Radius LB giebet die Peripherie zu einem Siebeneck; das Center M mit dem Radius MB giebet die Peripherie zu einem Achteck, und ſo weiter, und die Seite jedes Vielecks iſt = AB.

(H.) Auf einer gegebnen Linie AB jedes gefällige Vieleck, vom Zwölf- bis Vier und Zwanzigeck, zu beſchreiben. Tab. XXXVI. Fig. 1. §. 483.

1) Erhöhet aus der Mitte C der gegebnen Linie AB eine Perpendikuläre CD. 2) Durchſchneidet die Perpendikuläre CD, mit der Linie AB, aus A und B durch die Bogen BE und AE, und theilet den Bogen BE in zwölf gleiche Theile. 3) Reiſſet aus E, worinnen ihr den Zirkel ſtehen laſſet, mit der Weite EB zuerſt die Zirkellinie FB, und hernach, mit beſtändig abnehmender Weite, ſo wie ſolche von den Theilungspunkten gegeben wird, die folgenden eilf Bogen, nach der Art, wie ſolches in dem vorhergehenden Problem geſchehen iſt. 4) Ziehet aus F, mit dem Radius FA, den Halbzirkel mA, und mit beſtändig abnehmenden Radien, die folgenden Halbzirkel lA, kA, iA, hA und ſo weiter. 5) Das Center F, mit dem Radius FA, giebet die Peripherie zu einem Zwölfeck; das Center a, mit dem Radius aA, giebet die Peripherie zu einem Dreyzehneck; das Center b, mit dem Radius bA, giebet die Peripherie zu einem Vierzehneck, u. ſ. w.

Es müssen aber diese Zeichnungen aufs genaueste gemachet werden, und weit genauer, als allhier die Kupfertafeln geben, und überhaupt ist in allen Fällen auf die Regeln mehr Bedacht zu haben, als auf die Zeichnungen.

Zehnter Artikel.

Allgemeine Regel zur Construction regulärer Figuren durch den Gebrauch der Sinuszahlen.

§. 484.

Ich will die Zahlen für diese Methode, zu deren Ausübung ein Maaßstab nöthig ist, vom Dreyeck bis zum Zwölfeck zuvörderst hersetzen, und hernach zeigen, wie sie gefunden werden.

Satz. Wenn der Diameter eines Zirkels 1000,0000 angenommen wird: so sind die Zahlen der Seiten einer in diesem Zirkel beschriebnen regulären Figur, wie folget:

im Dreyeck	866,0254	im Achteck	382,6834
— Viereck	707,1068	— Neuneck	342,0202
— Fünfeck	587,7853	— Zehneck	309,0170
— Sechseck	500,0000	— Eilfeck	281,7326
— Siebeneck	433,8838	— Zwölfeck	258,8190

u. s. w.

Wegen der Bequemlichkeit im Messen können die Zahlen, welche rechter Hand auf das Comma folgen, ausgelassen werden; doch mit der Vorsicht, daß, wenn die auf das Comma folgende allererste Ziffer eine 5 oder drüber ist, die linker Hand vor dem Commate vorhergehende nächste Ziffer um eine Einheit erhöhet wird, um den Mangel dadurch zu ergänzen. Auf diese Weise muß z. E. die Seite des Fünfecks 587 in 588, und die Seite des Siebenecks 433 in 434 abgeändert werden.

§. 485.

Wegen der Verschiedenheit des Maaßstabes ist es in gewissen Fällen sehr bequem, die Seiten der regulären Figu-

ren nach verſchiednen Diametern berechnet, vor Augen zu haben.

§. 486.

Man kann nach Anleitung vorhergehender Grundtabelle mit leichter Mühe dazu gelangen. Die Sache kömmt darauf an, der Seite eines zum Grunde gelegten Vielecks eine feſte Zahl, z. E. 1000 zuvörderſt zuzueignen. Wenn dieſes geſchehen iſt, ſo wird der Diameter des Zirkels, und aus dieſem die Seite jeder andern Figur geſuchet. Zum Exempel, wenn die Seite des regulären Dreyecks zu 1000 angenommen wird, ſo heiſſet es nach der Regel de tri:

Seite des Dreyecks in Sinuszahlen	:	Diameter	=	Angenommne Seite des Dreyecks	:	Der gefundene Diameter.
866,0254	:	1000,0000	=	1000,0000		.....

und nun weiter:

Diameter	:	Seite eines Vierecks in Sinuszahlen	=	Der gefundene Diameter	:	Die gefundene Seite des Vierecks.
1000,0000	:	707,1068	=	.....		.....

Auf ähnlich fortgeſetzte Art wird die Seite jedes folgenden Vielecks gefunden, und man verfähret nach eben dieſer Methode, wenn die Seite eines regulären Quadrats zu 1000 angenommen wird; ausgenommen wenn die Seite des Sechsecks = 1000 ſeyn ſoll, als in welchem Falle man nur die Sinuszahlen der Haupttabelle zu verdoppeln brauchet. Die gefundnen Zahlen für die Seite des zu 1000 angenommnen Drey- Vier- und Sechsecks werden alsdenn, wiewohl abgekürzt, ſeyn wie folget:

(a) Seite des Dreyecks = 1000; der Diameter = 1154,8.		(b) Seite des Vierecks = 000; der Diameter = 1414,2.		(c) Seite des Sechsecks = 1000; der Diameter = 2000,0	
Seite des 3 Ecks.	1000,0	Seite des 3 Ecks.	1224,7	Seite des 3 Ecks.	1732,0
4 =	816,5	4 =	1000,0	4 =	1414,2
5 =	678,7	5 =	831,2	5 =	1175,5
6 =	577,4	6 =	707,1	6 =	1000,0
7 =	501,0	7 =	613,5	7 =	867,8
8 =	441,9	8 =	541,2	8 =	765,4
9 =	394,9	9 =	483,7	9 =	684,0
10 =	356,8	10 =	437,0	10 =	618,0
11 =	325,3	11 =	398,4	11 =	563,5
12 =	298,9	12 =	366,0	12 =	517,6

und so weiter.

In der Geometrie des Adr. Metius sind die Zahlen der Seiten für die Columne (c) bis zum Achtzigeck berechnet zu finden.

§. 487.

Die Zahlen der im §. 484. dargelegten Grundtabelle werden gefunden,

1) wenn die Zahl 360 durch die Eckzahl einer verlangten Figur getheilet wird. Der Quotient giebet den Centerwinkel der Figur.

2) Wenn der gefundne Centerwinkel durch 2 getheilet, und die Sinuszahl zu dem kommenden Quotienten, welcher den halben Centerwinkel an Graden giebet, in den trigonometrischen Tabellen aufgesuchet wird.

Zum Exempel: Die Sinuszahl für die Seite eines regulären Dreyecks zu finden. Stehet also:

Eckzahl des Dreyecks 3) $\frac{360}{120}$ Centerwinkel

2) $\frac{}{60}$ halber Centerwinkel, dessen

Sinus = 8650254.

Durch eine einzige Operation wird der halbe Centerwinkel gefunden, wenn die Zahl 360 mit dem Duplo der Eckzahl getheilet wird. Z. E. 14 in 360 giebet den halben Centerwinkel für das Siebeneck. (Die hierdurch gefundne Sinuszahl ist eigentlich die Zahl des Sinus, welcher der halben Seite des Vielecks gleich ist für einen Radius von 10 Millionen. Da wir aber hier den Diameter, das Duplum des Radius, von 10000000, folglich den Radius zu 5 Millionen annehmen, so gehöret die gefundne Sinuszahl auch für das Duplum des Sinus oder der halben Seite des Vielecks, das ist, für die ganze Seite desselben.)

§. 488.

Jeder Grad einer Peripherie wird in 60 Minuten, und jede Minute in 60 Secunden eingetheilet. Wenn also die Anzahl der Grade für einen Winkel nicht in ganzen Zahlen kömmt, so sind allezeit Minuten, oder Minuten und Secunden zugleich damit verbunden. So giebet z. E. der Centerwinkel 45 des Achtecks, durch 2 getheilet, die Zahl $22\frac{1}{2}$ für den halben Centerwinkel des Achtecks, und der Centerwinkel $51\frac{3}{7}$ des Siebenecks, durch 2 getheilet, die Zahl $25\frac{5}{7}$ für den halben Centerwinkel des Siebenecks. Wie aber in dem ersten Falle der Wehrt des Bruchs $\frac{1}{2}$ sofort in die Augen fällt, indem ein halber Grad just 30 Minuten enthält, so muß hingegen in dem leztern Falle der Wehrt des Bruches $\frac{5}{7}$ erst gesuchet werden, und wie dieses geschehe, ist in den Anfangsgründen des Progreßionalcalculs §. 156. 157. 159. 160 gezeiget worden.

§. 489.

Gebrauch der Grundtabelle aus dem §. 485. über das Verhältniß des Diameters eines Zirkels = 10000000 gegen die Seiten einer in diesem Zirkel beschriebnen regulären Figur.

(1.) Aus der Größe des Diameters eines Zirkels die Seitengröße einer in diesem Zirkel beschriebnen regulären Figur zu finden.

Z. E.

Z. E. Es ſey der Diameter eines Fünfecks = 25. Saget aus der Tabelle:

Diamet. Seite des Fünfecks Diam. gefundne Seite
10000000: 5877853 = 25: $14\frac{69}{100}$ = 14,69.

(II.) Aus der Seite einer regulären Figur den Diameter zu einem um dieſe Figur zu beſchreibenden Zirkel zu finden.

Es ſey aber die Figur ein Viereck, und die Seite = 70. Saget aus der Tabelle:

Seite des Vierecks. Diameter. Seite. Diameter.
7071068 : 10000000 = 70 : bald 99.

Zweyter Abſchnitt.

Von den ſymmetriſchen Figuren.

§. 490.

Die ſymmetriſchen Figuren können in die bekanntern und unbekanntern, oder ordentlichen und auſſerordentlichen unterſchieden werden. Die ordentlichen oder bekanntern ſymmetriſchen Figuren ſind

1) Das gleichſchenklichte Dreyeck, welches beſchrieben wird, wenn man aus den beyden Endpunkten einer gegebnen Grundlinie AB, mit der gleichfalls gegebnen Gröſſe eines Schenkels einen Durchſchnitt C machet, und die Linien AC und BC ziehet. Tab. IX. Fig. 7.

2) Das rechtwinklichte Dreyeck, in ſofern die beyden Catheten, das iſt die Grundlinie und die Höhe, einander gleich ſind, wie bey Fig. 8 und 9. Tab. IX. Es wird beſchrieben, wenn zwey Linien von gleicher Gröſſe rechtwinklicht verbunden, und die beyden unverbundnen Enden durch eine Linie, welche die Hypotenuſe heiſſet, zuſammengehänget werden.

3) Das länglichte Viereck, insgemein Oblongum, welches bey Fig. 10. Tab. IX. liegend, und bey Fig. 11. stehend, abgebildet ist. Es wird beschrieben, wenn man eine größere und kleinere Linie perpendikulär zusammenfüget, und sowohl zu der größern als kleinern Parallele ziehet, welches am bequemsten verrichtet wird, wenn mit der kleinern Linie aus der größern, und mit der größern Linie aus der kleinern ein Durchschnitt gemachet, und jede der beyden Linien mit dem Durchschnitt zusammengehänget wird.

4) Das isoscelische Trapezium, Fig. 12. Tab. IX. Es entsteht, wenn ein gleichschenklichtes, oder auch ein gleichseitiges Dreyeck, mit der Grundlinie parallel, abgekürzet wird.

5) Das verschobne Viereck, welches auch ein Rhombus, ein rhombisches Viereck oder eine Raute genennet wird. Fig. 13. Tab. IX. Es wird beschrieben, wenn zwey Linien von gleicher Größe entweder unter einem scharfen oder stumpfen Winkel verbunden werden, und mit der Weite einer der beyden Linien aus den beyden unverbundnen Enden ein Durchschnitt gemachet, und der Durchschnitt mit den Linien zusammengezogen wird.

6) Das verschobne Oblongum, welches auch ein Rhomboid, oder rhomboidisches Viereck, ingleichen eine länglichte Raute genennet wird. Tab. IX. Fig. 14. Es wird beschrieben, wenn man eine größere und kleinere Linie entweder unter einem scharfen oder stumpfen Winkel zusammenfüget, und mit der kleinern aus der größern, und mit der größern aus der kleinern einen Durchschnitt machet, und den Durchschnitt mit den Linien zusammenziehet.

7) Das rhombisch rhomboidische Trapezoid, Tab. IX. Fig. 15. Es entstehet, wenn entweder zwey gleichseitige oder zwey gleichschenklichte Triangulärflächen von ungleicher Größe zusammengefüget werden.

Anmer-

Anmerkung.

Von den Trapezien und Trapezoiden wird in dem dritten Abſchnitt (dieſes IVten Buches,) von den irregulären Figuren, ein mehrers vorkommen.

§. 491.

Die **auſſerordentlichen oder unbekannten ſymmetriſchen Figuren** werden, überhaupt geſprochen, durch keine beſondere Nahmen, auſſer denjenigen, welchen ſie nach ihrem Geſchlecht führen, und nach welchem ſie fünfſechs- oder ſieben eckigt, u. ſ. w. ſind, characteriſiret. Ihre Conſtruction iſt auf verſchiedne Art, ſo wie ihre innere Beſchaffenheit in Abſicht auf die Gleichheit und Ungleichheit der Linien und Winkel, ins Unendliche möglich. Ich werde mich aber nur auf einige Arten ihrer Conſtruction kürzlich einlaſſen, und, um ſolches nach einer gewiſſen Ordnung zu thun, zuerſt von denjenigen Figuren handeln, welche aus einer geraden Eckzahl, z. E. aus 4, 6, 8, 10, u. ſ. w. beſtehen, und hernach von denen, welche aus einer ungeraden Eckzahl, z. E. aus 5, 7, 9, 11, ꝛc. beſtehen.

Erſter Artikel.

Von den geradeckigten ſymmetriſchen Figuren.

Erſte Art, ſymmetriſche Figuren von einer geraden Eckzahl zu erfinden. §. 492.

1) Beſchreibet mit einerley Weite zwey Bogen, die oben und unten einander durchſchneiden.

Um dieſes bequem zu thun, reiſſet eine Linie, und beſchreibet aus einem auf ſelbiger genommnen Punkt, mit beliebiger Weite einen Bogen. Setzet den Zirkel in den Punkt, wo der Bogen die gerade Linie durchſchneidet, und reiſſet aus ſelbigem mit unveränderter Weite einen zweyten Bogen: ſo iſt der Aufgabe genüget. Wenn der Raum zwiſchen beyden Bogen etwas gröſſer oder kleiner ſeyn ſoll, als er vermöge vorhergehender Operation kömmt, ſo muß man, um den

den zweyten Bogen zu ziehen, auf der Linie einen etwas entferntern oder nähern Punkt, als denjenigen nehmen, wo der erste Bogen diese Linie durchschneidet, und den Zirkel, wiewohl mit unveränderter Weite, in selbigen setzen.

2) Theilet jeden Bogen in zwey Theile, um ein Viereck zu bekommen, wie bey Fig. 16. und 17. Tab. IX; in drey Theile, um ein Sechseck zu bekommen, wie bey 18. und 19. und 20. Tab. IX; in vier Theile, um ein Achteck zu bekommen, wie bey Fig. 21. 22. Tab. IX. u. s. w.

3) Geschicht die Section des Bogens in gleiche Theile, so kommen gleichseitige Figuren, wie bey Fig. 16. 18 und 21. Tab. IX; und geschicht solche in ungleiche Theile, so kommen Figuren, die wir gleichschenklichte nennen wollen, wie bey Fig. 17. 19. 20 und 22. Tab. IX. In diesen gleichschenklichten Figuren müssen die gegen einander über stehenden Seiten allezeit gleich gemachet werden.

Erste Anmerkung.

Die bey Fig. 16. und 17. Tab. IX. vorkommenden Vierecke sind uns zwar schon vorhin als ordentliche symmetrische Figuren bekannt geworden. Ich habe aber des Zusammenhangs der Sachen wegen nicht umhin gekonnt, sie noch einmal allhier, wiewohl unter den ausserordentlichen symmetrischen Figuren, aufzuführen.

Zweyte Anmerkung.

Alle zu dieser Classe gehörige Figuren lauffen oben und unten spitzig zu, und können durch eine gerade Linie aus den beyden Spitzen in zwey gleiche und ähnliche Hälften getheilet werden.

Dritte Anmerkung.

Wenn sowohl der oberste als unterste Theil dieser Figuren abgekürzet wird: so entstehet ein Sechseck aus jedem Viereck; ein Achteck aus jedem Sechseck; ein Zehneck aus jedem Achteck, u. s. w. Exempel, wie ein Viereck zum Sechseck werden könne, stehet man bey Fig. 23. und 24. Tab. IX. Uebrigens müssen die Seiten der abgeschnittnen Triangel, als allhier AB und AC in jedem △ ABC gleich seyn.

ſeyn. Da durch dieſe Abkürzung die Figuren ſowohl unten als oben platt werden: ſo muß man, um die Figur in zwey gleiche Hälften zu theilen, aus der Hälfte der oberſten Linie auf die Hälfte der unterſten eine Linie ziehen, welche gegen beyde Seiten BC, BC perpendiculär ſeyn wird.

Zweyte Art, ſymmetriſche Figuren von einer geraden Eckzahl zu erfinden. §. 493.

Zur Erfindung der in dieſe Claſſe gehörigen ſymmetriſchen Figuren wird eine regulâre Figur zum Grunde gelegt, und zwar 1) ein Dreyeck zur Erfindung eines Vierecks; 2) ein Fünfeck zur Erfindung eines Sechsecks; 3) ein Siebeneck zur Erfindung eines Achtecks, u. ſ. w. Die zum Grunde gelegte Figur iſt alſo allezeit von einer ungeraden Eckzahl, und hat eine Ecke weniger als die zu erfindende Figur.

(a) Ein ſymmetriſches Viereck zu conſtruiren. Tab. IX. Fig. 25. §494.

1) Theilet einen Zirkel ABCD durch Punkte in drey gleiche Theile, und ziehet die zwey Sehnen AB und BC. 2) Machet mit dem Radius des Zirkels aus A und C den Durchſchnitt D; ziehet aus ſelbigem, mit unveränderter Oefnung, einen Zirkel AEC, und traget in ſolchen den Theil AE = AB und ziehet EC, welche der Linie AB ebenfalls gleich ſeyn wird; ſo erſcheinet das ſymmetriſche Viereck ABCE. Dieſe Figur, die uns bereits unter der Benennung eines Rhombus, als eine ordentliche ſymmetriſche Figur bekannt geworden, findet unter den auſſerordentlichen nur der Ordnung wegen ſtatt, nach welcher allhier die Figuren geſuchet werden.

(b) Ein ſymmetriſches Sechseck zu conſtruiren. Tab. IX. Fig. 26. §. 495.

1) Theilet einen Zirkel ABCDE durch Punkte in fünf gleiche Theile, und ziehet die drey Sehnen AB = BC = CD. 2) Machet mit der Weite des Radius, aus A und D, den Durchſchnitt E. 3) Reiſſet mit unveränderter Weite, aus E einen zweyten Zirkel, und traget in ſelbigen die Theile

AF,

AF, FG, jede = AB, und ziehet GD, welche auch = AB, so kömmt das symmetrische Sechseck ABCDGF.

(c) Ein symmetrisches Achteck zu construiren. Tab. IX. Fig. 27. §. 496.

Theilet einen Zirkel durch Punkte in sieben gleiche Theile, und verfahret mit verhältnißmässiger Anwendung wie vorhin.

Anmerkung.

Die hieher gehörigen Figuren sind alle gleichseitig, sonst aber wechselsweise entweder spitzig oder platt. So ist z. E. jedes Viereck spitzig, jedes Sechseck platt: jedes Achteck spitzig, jedes Zehneck platt, u. s. w. Die spitzigen Figuren werden durch eine Diagonale, entweder aus der obersten und untersten Spitzen der Länge, oder aus den beyden Spitzen der Breite, in zwey gleiche und ähnliche Hälften unterschieden. In den platten Figuren geschicht solches entweder durch eine Diagonale aus den beyden Spitzen der Breite, oder durch eine Linie aus der Hälfte der obersten Linie auf die Hälfte der untersten, welche gegen beyde Linien perpendikulär seyn wird.

Dritte Art, symmetrische Figuren von einer geraden Eckzahl zu erfinden. §. 497.

Zur Erzeugung dieser Figuren werden wiederum reguläre Polygone zum Grunde geleget; und solche müssen allezeit und wenigstens eine Ecke mehr haben, als die daraus herzuleitenden symmetrischen Figuren. Je mehr Ecken nemlich das reguläre Polygon hat, desto mehr und verschiedenere symmetrische Figuren, welche hier alle gleichschenklicht (§. 492.) sind, können daraus abgeleitet werden.

(a) Ein Sechseck aus einem Siebeneck zu erfinden. Tab. X. Fig. 1. §. 498.

Es sey ein durch Punkte in sieben gleiche Theile zerfällter Zirkel ABCDEFG. 1) Ziehet die vier Sehnen AB, BC, CD und DE. 2) Halbiret GF in H, und ziehet die Linien AH und EH: so kömmt das symmetrische Sechseck ABCDEH.

Auf

Auf eine andere Art. Tab. X. Fig. 2.

Es ſey ein durch Punkte in ſieben gleiche Theile zerfällter Zirkel ABCDEFG. Ziehet die fünf Sehnen BA, AG, GF, FE und ED; und contrahiret die beyden übrigen Theile durch die Diagonale BD: ſo kömmt das ſymmetriſche Sechseck ABDEFG.

(b) Ein Sechseck aus einem Achteck zu erfinden. Tab. X. Fig. 3. §. 499.

Es ſey ein durch Punkte in acht gleiche Theile zerfällte Zirkel ABCDEFGH. Ziehet die vier Sehnen FE, ED, DC und CB, und contrahiret die vier übrigen Theile durch FH und HB: ſo entſtehet das ſymmetriſche Sechseck HFEDCB.

Auf eine andere Manier. Tab. X. Fig. 4.

Es ſey ein durch Punkte in acht gleiche Theile zerfällter Zirkel ABCDEFGH. 1) Ziehet unten die beyden Sehnen CD und DE, und oben die beyden AH und HG. 2) Contrahiret linker Hand die beyden Theile CB und BA durch CA; und rechter Hand EF und FG durch EG: ſo kömmt das ſymmetriſche Sechseck ACDEGH.

Auf eine andere Manier. Tab. X. Fig. 5.

Es ſey ein durch Punkte in acht gleiche Theile zerſchnittner Zirkel ABCDEFGH. 1) Ziehet unten die drey Sehnen AB, BC und CD, und oben die Sehne GF. 2) Contrahiret linker Hand die beyden Theile AH und HG durch AG, und rechter Hand die beyden Theile DE und EF durch DF: ſo kömmt das ſymmetriſche Sechseck ABCDFG.

(c) Ein Sechseck aus einem Neuneck zu erfinden. Tab. X. Fig. 6. §. 500.

Es ſey ein durch Punkte in neun gleiche Theile zerſchnittner Zirkel ABCDEFGHI. 1) Ziehet die Grundlinie DF durch Contraction der beyden Theile DE und EF. 2) Ziehet linker Hand der Grundlinie die Sehne DC, und rechter Hand die Sehne FG. 3) Contrahiret linker Hand die

beyden

beyden Theile CB und BA durch CA, und rechter Hand die beyden Theile GH und HI durch GI. 4) Ziehet die Sehne AI: so wird ein symmetrisches Sechseu ACDFGI formiret seyn.

§. 501.

Wie auf ähnliche Art ein symmetrisches Achteck erfunden werden könne

1) aus einem regulären Neuneck, siehet man Tab. X. Fig. 7 und 8.
2) Aus einem regulären Zehneck, siehet man Tab. X. Fig. 9. und Tab. XI. Fig. 1. 2.
3) Aus einem regulären Eilfeck, siehet man Tab. XI. Fig. 3. und
4) aus einem regulären Zwölfeck, siehet man Tab. XI. Fig. 4.

Anmerkung.

In keinem vorhergehender Exempel sind alle in einem regulären Vieleck steckende symmetrische Figuren erschöpfet, sondern es ist immer Stof gelassen werden, mehrere und verschiedenere Arten daraus hervorzubringen.

Zweyter Artikel.

Von den ungeradeckigten symmetrischen Figuren.

Erste Art, symmetrische Figuren von einer ungeraden Eckzahl zu erfinden. §. 502.

Es werden allhier die ausserordentlichen geradeckigten symmetrischen Figuren nach der ersten Art ihrer Construction im §. 492. zum Grunde geleget, und daraus ungeradeckigte produciret, wenn das unterste Dreyeck abgekürzet wird. Auf diese Weise sind die Fünfecke bey Fig. 5. u. 6. Tab. XI. aus den symmetrischen Quadraten nach der ersten Art ihrer Construction, (Fig. 16. u. 17. Tab. IX.) entstanden, und auf ähnliche Art können Siebenecke aus Sechsecken, und Neunecke aus Achtecken hervorgebracht werden. Es sind aber alle vorhergehende ungeradeckigte Figuren gleichschenklicht. Will

man

man ſolche gleichſeitig haben, ſo verfahre man folgendergeſtalt.

Generalregel, um gleichſeitige ſymmetriſche Figuren von einer ungeraden Eckzahl zu erfinden. §. 503.

1) Beſchreibet mit einerley Weite zwey Bogen, welche ſich oben und unten einander durchſchneiden, und ziehet aus der oberſten Spitze auf die unterſte eine gerade Linie. 2) Theilet einen der beyden Bogen durch Punkte in ſo viel gleiche Theile, weniger einen, als die Figur Ecken haben ſoll, z. E. für ein verlangtes Fünfeck in vier Theile; für ein verlangtes Siebeneck in ſechs Theile, u. ſ. w. 3) Traget aus dem unterſten Durchſchnitt des Bogens den erſten gleichen Theil deſſelben auf den andern Bogen, und ziehet die zwey Theilungspunkte von einem Bogen zum andern durch eine gerade Linie zuſammen. Die Länge dieſer Linie beſtimmet die Größe der Seiten. 4) Traget die Seiten der Figur dergeſtalt auf den beyden Bogen herum, daß die beyden leztern ſich oben auf der aus den beyden Durchſchnitten der Bogen gezogenen Linie in einen Punkt verliehren, um die Spitze der Figur zu bilden.

(a) Ein gleichſeitiges ſymmetriſches Fünfeck nach voriger Regel zu beſchreiben. Tab. XI. Fig. 7. §. 504.

1) Theilet den Bogen rechter Hand durch Punkte in die vier gleichen Theile AB, BC, CD und DE. 2) Traget den Theil AB, aus A in G, auf den andern Bogen, und ziehet die Linie BG. 3) Traget die Linie BG aus G in F, und aus F in H auf die Perpendikuläre. 4) Traget die Linie GB aus B in I, und aus I in H: ſo wird das gleichſeitige ſymmetriſche Fünfeck HFGBI beſchrieben ſeyn.

(b) **Ein gleichseitiges symmetrisches Siebeneck nach voriger Regel zu beschreiben.** Tab. XI. Fig. 8. §. 505.

Es werden allhier die ausserordentlichen geradeckigten symmetrischen Figuren nach der zweyten Construction aus dem §. 493. folgg. zum Grunde geleget, und aus selbigen, auf folgende Art, gleichschenklichte Figuren von einer ungeraden Eckzahl hervorgebracht:

1) Wenn in den oben und unten spitzig zulauffenden Figuren die unterste Triangulärfläche aufgehoben, und dadurch aus zwey Theilen ein einziger gemacht wird. Auf diese Weise kann das Achteck bey Fig. 27. Tab. IX. in das Siebeneck von Fig. 9. Tab. XI. verwandelt werden.

2) Wenn in den platten Figuren die oberste Linie aufgehoben, und auf die Endpunkte ein Triangel, dessen Schenkel aber kleiner seyn müssen, als die andern Seiten der Figur, gesetzet wird. Auf diese Weise ist das Sechseck von Fig. 26. Tab. IX. zu dem Siebeneck bey Fig. 10. Tab. XI. geworden.

Anmerkung.

Aus den beyden vorhergehenden Exempeln ist zu sehen, daß sowohl eine mehreckigte Figur zu einer weniger eckigten, als umgekehrt, eine weniger eckigte Figur zu einer mehreckigten werden kann.

Dritte Art, symmetrische Figuren von einer ungeraden Eckzahl zu erfinden. §. 506.

Es hat es mit der Erfindung dieser Figuren eben die Bewandtniß, als mit denen von einer geraden Eckzahl, nach der dritten Art ihrer Construction aus dem §. 497. folgg. Es werden nemlich reguläre Polygone zum Grunde geleget, die allezeit und wenigstens eine Ecke mehr haben, als die daraus herzuleitenden symmetrischen Figuren, welche alle gleichschenklicht werden.

(a) Ein

(a) **Ein Fünfeck aus einem Sechseck zu erfinden.** Tab. XI. Fig. 11. §. 507.

Es ſey ein durch Punkte in ſechs gleiche Theile zerſchnittener Zirkel ABCDEF. 1) Ziehet die drey Sehnen FA, AB und BC. 2) Halbiret ED in G, und ziehet die Linien FG und CG; ſo kömmt das ſymmetriſche Fünfeck GFABC.

Auf eine andere Art. Tab. XI. Fig. 12.

Es ſey der durch Punkte in ſechs gleiche Theile zerfällte Zirkel ABCDEF. Ziehet die vier Sehnen AF, FE, ED und DC, und contrahiret AB und BC durch die Linie AC: ſo kömmt das Fünfeck EFACD.

(b) **Ein Fünfeck aus einem Siebeneck zu erfinden.** Tab. XI. Fig. 13. §. 508.

1) Ziehet nach dem gegebnen Muſter unten eine Sehne AB, und oben ihrer zwey FE und ED. 2) Contrahiret die zwey Theile AG und GF linker Hand in einen AF, und rechter Hand BC und CD in BD: ſo kömmt das ſymmetriſche Fünfeck EFABD.

Auf eine andere Art. Tab. XI. Fig. 14.

1) Ziehet nach dem Schemate unterwärts die drey Sehnen AB, BC und CD; 2) contrahiret linker Hand die beyden Theile AG und GF durch AF, und rechter Hand die beyden Theile DE=EF durch DF: ſo kömmt das ſymmetriſche Fünfeck FABCD.

Auf eine andere Art. Tab. XI. Fig. 15.

Contrahiret, nach der Vorſtellung, unterwärts die drey gleichen Theile AB, BC und CD durch die gerade Linie AD, und ziehet die Sehnen der übrigen vier Theile. Das Reſultat iſt das ſymmetriſche Fünfeck FGADE.

(c) **Ein Fünfeck aus einem Achteck zu erfinden.** §. 509.

Man ſehe die Exempel bey Fig. 1 und 2. Tab. XII. Auf ähnliche Art können ſymmetriſche Siebenecke aus

reguläre Acht- Neun- und Zehnecken ꝛc. und symmetrische Neunecke aus regulären Zehn- Eilf und Zwölfecken ꝛc. hervorgebracht werden.

Anhang
zum zweyten Abschnitt
von den symmetrischen Figuren.

§. 510.

Es ist in den beyden vorhergehenden Artikeln des zweyten Abschnitts die Construction der symmetrischen, sowohl gerad- als ungeradeckigten Figuren, auf eine dreyfache Art gezeiget worden. Ich will allhier, zur Erweckung weitern Nachdenkens, wiewohl nur in einigen wenigen vermischten Exempeln zeigen, wie diese Construction auch nach andern Operationen verrichtet werden könne.

1) Aus jedem regulären Drey- Vier- Fünfeck u. s. w. kann ein symmetrisches Sechs- Acht- Zehneck u. s. w. erzeuget werden, wenn jede Seite derselben in drey ungleiche Theile zerfället wird. Den Beweis findet man Tab. XII. Fig. 3. 4. 5.

2) Aus einer zusammengesetzten regulären Quadrat- und Triangulärfläche wird ein symmetrisches gleichseitiges Fünfeck erzeuget. Tab. XII Fig. 6.

3) Aus einem Oblongo und einer Triangulärfläche wird ein symmetrisches gleichschenklichtes Fünfeck erzeuget. Tab. XII. Fig. 7.

4) Aus einem regulären Viereck und zwey gleichseitigen Triangeln, wird ein symmetrisches gleichseitiges Sechseck hervorgebracht. Tab. XII. Fig. 8.

5) Aus einem länglichten Viereck und zwey gleichseitigen Triangeln wird ein symmetrisches gleichschenklichtes Sechseck hervorgebracht. Tab. XII. Fig. 9.

6) Wenn die längern Seiten eines länglichten Vierecks in zwey gleiche, und die beyden kürzern in drey ungleiche

gleiche Theile, nach Art der Fig. 10. Tab. XII. zerfället werden, so entsteht daraus ein länglichtes symmetrisches Sechseck.

7) Aus einem Rhombus kann sowohl ein Siebeneck, wie bey Fig. 11. Tab. XII. als Achteck, Fig. 12. erzeuget werden.

8) 1) Beschreibet die blinden Parallelen AD und BC von unbestimmter Länge, wie bey Fig. 13. Tab. XII. 2) Ziehet solche unten durch die Perpendikuläre AB zusammen. 3) Ziehet mit der Weite AB, aus A den Bogen BE, und aus B den Bogen AF. 4) Machet mit der Weite AB, aus dem Durchschnitt C, ein Zeichen in E und F und ziehet die Linien AE und BF. 5) Ziehet die blinde Linie EF, welche der Linie AB parallel seyn wird, und traget die Weite AK zweymal auf AD, nemlich aus K nach L, und aus L nach D. Eben so machet BM = MN = NC. 6) Traget die Weite AB perpendikulär aus E in H, und aus F in I. 7) Ziehet die Linien HD, DC und CI = FB = BA und AE: so kömmt das gleichseitige symmetrische Achteck ABFICDHE, und so weiter.

Dritter Abschnitt.
Von den irregulären Figuren.

§. 511.

Die irregulären Figuren können, wie die symmetrischen, in ordentliche und ausserordentliche unterschieden werden. Die **ordentlichen** oder **bekanntern irregulären Figuren** sind

1) alle ungleichseitige Dreyecke, sie mögen vorkommen unter was für einer Benennung, und in was für einer Stellung sie wollen, z. E. die rechtwinklichten Dreyecke bey Fig. 14. und 15. Tab. XII. in welchen die beyden Catheten von ungleicher Länge sind; ferner die stumpfwinklichten Dreyecke bey Fig. 16. und

17. Tab. XII. und die ſcharfwinklichten bey Fig. 18 und 19. Tab. XII.

2) Das rechtwinklichte oder orthogoniſche Trapezium, eine viereckigte Figur, welche aus der Abkürzung eines rechtwinklichten Triangels entſpringet. Tab. X. Fig. 16. 17.

3) Das amblygoniſche Trapezium, welches aus der Abkürzung eines ſtumpfwinklichten Triangels entſpringet. Tab. X. Fig. 14. 15.

4) Das oxygoniſche Trapezium, welches aus der Abkürzung eines ſcharfwinklichten Triangels entſpringet. Tab. X. Fig. 12. 13.

Alle drey Gattungen ſind mit einander gleichartig.

5) Das Trapezoid, welches in allen ſeinen Arten aus der ungleichen Abkürzung eines Triangels entſteht, wie man Tab. VII. Fig. 1. 2. 3. 4; ferner Tab. VIII. Fig. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16 ſehen wird. Alle Trapezoiden ſind irreguläre Figuren; das einzige rhombiſch- rhomboidiſche Trapezoid ausgenommen, wovon im zweyten Abſchnitt von den ſymmetriſchen Figuren, §. 490. No. 7. Rechenſchaft gegeben worden.

Anmerkung
über die Trapezien und Trapezoiden.

Derjenige, der zuerſt gewiſſen viereckigten Figuren den Nahmen von Trapezien, und gewiſſen andern den Nahmen von Trapezoiden beygeleget hat, muß ſie ohne Zweifel nicht weniger als die quadrat- und oblongiſchen, rhombiſchen und rhomboidiſchen Figuren von einander unterſchieden haben, wenn gleich in der Folge der Zeit nicht überall auf dieſen Unterſcheid ſorgfältig genug acht gegeben, ſondern öfters ein Trapezium mit einem Trapezoid verwechſelt worden iſt. Es beſtehet aber der ſehr große und leicht einzuſehende Unterſcheid beyder Figuren darinnen, daß in allen Trapezien zwey Seiten einander parallel laufſen; in den Trapezoiden aber nicht, die Beſchaffenheit der Seiten in Abſicht auf ihre Größe ſey wie ſie wolle. Auf dieſe Weiſe ſind alle bey Fig. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. Tab. X. vorgeſtellte viereckigte Figuren Trapezien; und die bey Fig. 1. 2. 3. 4. Tab. VII. und Fig. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. Tab. VIII. befindlichen, ſind Trapezoiden.

Da

Da beyderley Arten von Figuren aus der Abkürzung eines Dreyecks entstehen, so ist bey jeder Figur das Dreyeck punktirt beybehalten worden, und der Augenschein giebt, daß die Trapezien durch einen Parallelschnitt mit der Grundlinie, die Trapezoiden hingegen durch einen schiefen Schnitt erzeuget werden. Es giebet aber nicht mehr als viererley Arten von Trapezien, als 1) das isoscelische oder gleichschenklichte Trapezium, Tab. X. Fig. 10. 11. 2) Das rechtwinklichte, Tab. X. Fig. 16. 17. 3) Das amblygonische Trapezium, Fig. 14. 15. Tab. X.; und 4) das oxygonische Trapezium, Fig. 12. 13. Tab. X. Unter den Trapezoiden zeichnet sich besonders das sogenannte rhombisch-rhomboidische aus, welches, durch einen abgemeßnen Schnitt, aus einem stumpfwinklichten Triangel dergestalt hervorgebracht wird, daß sowohl die beyden kürzern als die beyden längern Schenkel von gleicher Größe unter sich werden. Man sehe Tab. XIII. Fig. 1. Um seine symmetrische Eigenschaft desto eher in die Augen fallen zu lassen, kann man es der Länge nach auf eine seiner Spitzen stellen. Es siehet alsdenn einer Figur ähnlich, die aus zwey gleichschenklichten Triangeln von ungleicher Höhe hervorgebracht worden. Tab. XIII. Fig. 2. Die übrigen Arten der Trapezoiden brauchen nicht durch besondere Benennungen ausgezeichnet zu werden.

§. 512.

Die ausserordentlichen oder unbekanntern irregulären Figuren nehmen von dem Fünfeck ihren Anfang, und können, wie die symmetrischen, ebenfalls entweder aus zwey sich einander unten und oben einander durchschneidenden Bogen, oder auch aus einem regulären Polygon hervorgebracht werden; wie man Tab. XIII. Fig. 3. 4. 5. 6. an zwey Fünf- und zwey Sechsecken siehet.

Erster Anhang zur Lehre von den Figuren.

Ueber die Theilung eines Bogens.

§. 513.

Es ist bekannt, wie eine gerade Linie in zwey gleiche Theile zerschnitten wird. Auf eben die Art, als sol-

ches geschicht, kann jeder Bogen in zwey gleiche Theile zerschnitten werden; und da jeder Theil wiederum nach eben denselben Regeln, in zwey gleiche Theile zerfället werden kann, so ist leicht zu sehen, daß die Theilung eines Bogens in 2, 4, 8, 16 und so weiter in zweyfacher Proportion fortgehende Theile, ohne viele Mühe zu verrichten ist. Weit anders verhält es sich mit der Theilung eines Bogens in 3, 5, 7, 11, 13 Theile u. s. w. Seit langen Zeiten hat man gesuchet, der ebenen Meßkunst den Vortheil zu verschaffen, diese Theilung zu leisten, und man hat nichts weiter gefunden, als daß die Auflösung dieses Problems ein Reservat der höhern Mathematik ist. Ich nehme einen einzigen Fall, nemlich die Trisection des Bogens aus, welche der berühmte Albrecht Dürer, mit dem Zirkel und Lineal allein vorzunehmen gelehret hat. Es wäre zu wünschen, daß mehrere solche leichte Specialregeln entdecket würden. Durch zwey Regeln gewinnet man sogleich eine dritte, und man hat z. E. durch die Dürersche Regel nicht bloß die Theilung in 3, 9, 27 und so weiter in Proportione tripla bekommen, sondern wenn man die Bi- und Trisection verbindet, so ist auch sofort ein Mittel da, einen Bogen in jede durch 6 theilbare Zahl zu zerfällen. Was ist nun aber zu thun, so lange die euklidische Schule nicht den gordischen Knoten der Bogentheilung durch den bloßen Zirkel und die gerade Linie löset, und so lange diese Theilung durch Hülfe der höhern Linien in der Praxi allezeit beschwerlich, und annoch unrichtig ist, wenn die Quadratricen und conischen Sectionen nicht zum voraus aufs schärfste executiret worden? Nichts anders, als daß man mechanische Versuche machet, und den Zirkel auf verschiedne Art öfnet, bis man endlich die Weite findet, welche sich 5, 7 mal u. s. w. auf dem Bogen herum tragen lässet.

§. 514.

Wie vermittelst der Dinostratischen Quadratrix ein Bogen in drey gleiche Theile zerfället werden könne, hat Beli-

Belidor in ſeinem Cursu mathematico aufs deutlichſte gezeiget. Ich werde allhier die Dürerſche Triſection darlegen.

Einen Bogen AB in drey gleiche Theile zu zerfällen.

Tab. XIX. Fig. 1.

1) Ziehet die Endpunkte des Bogens AB mit einer geraden Linie zuſammen, und theilet ſolche in die drey gleichen Theile AC, CD und DB. 2) Erhöhet aus C die Perpendikuläre CE, und beſchreibet mit der Weite AC, aus A, den Bogen CF. 3) Ziehet mit der Weite AE, aus A, den Bogen EG, und theilet den Raum zwiſchen CG in die drey kleine gleiche Theile CH, HI und IG. 4) Reiſſet mit der Weite AI, aus A, den Bogen IK, und traget die Weite AK aus K in L: ſo wird der Bogen AB in drey gleiche Theile zerfället ſeyn.

§. 515.

Zur Hiſtorie der Bogentheilung gehöret unter andern, daß Johann Bernoulli in den Actis Erudit. von 1702. Seite 170. und ſqq. zwey allgemeine Gleichungen gegeben hat, dadurch die ganze Theilung des Bogens in verlangte gleiche Theile vorgeſtellet wird. Weil er aber nicht gezeiget, wie er darauf gekommen, ſo hat Hermann in eben den Actis Eruditor. von 1703. Seite 345 den Beweis oder vielmehr die Analyſin davon gegeben. Jacob Bernoulli hat hingegen in den Memoires de l'Academie Royale des Sciences noch eine andere Auflöſung eben dieſer allgemeinen Aufgabe Ao. 1702. Seite 364 und ſqq. und Johann Bernoulli noch eine ganz beſondere und vor andern ſinnreiche in den Actis Erudit. von 1702, Seite 274 und 329 einrücken laſſen. Aus Newtons Element. Algebr., welche Whiſton herausgegeben, ſiehet man, daß ſelbiger ſchon vor langer Zeit daran gedacht, und probl. 15. Seite 134 und ſqq. einen leichten Weg gezeiget, für jede Theilung eine Gleichung zu finden, welchen er auch in einem Schreiben an den Hrn. von Leibnitz Ao. 1676 eröfnet, wie aus dem dritten Theile der Walliſiſchen Oper. mathemat. Seite 633. zu erſehen iſt. Sonſten gehören annoch folgende Schriften hieher, als Geometr.

Carteſii, Lib. III. p. 91 und 92., ingleichen Sluſius in meſolabo P. I. prop. 10. p. 36; ingleichen Vietae Theoremata ad Sect. angul. mit *Alex Anderſoni* demonſtrat. Seite 288. ferner *Oughtreds* Tract. aiml. de Sect. angul. in ſeinen Opuſcul. mathemat. p. 295, und *Walliſii* Tract. de Sect angul. (Es ſind dieſe vorhergehenden hiſtoriſchen Nachrichten aus des Freyherrn von Wolf mathemat. Lexico entlehnet worden.)

Zweyter Anhang.
Zur Lehre von den Figuren.
Von den einſchreibbaren und uneinſchreibbaren Figuren.

§. 516.

Eine Figur heiſſet einſchreibbar, wenn ſie ſich dergeſtalt in einen Zirkel ſchreiben läſſet, daß ſie die Peripherie deſſelben aus allen Winkeln berühret; und uneinſchreibbar, wenn ſie nicht aus allen Winkeln die Peripherie eines Zirkels berühret, und alſo mehr als einen Mittelpunkt hat.

§. 517.

Unter den regulären Figuren giebet es keine uneinſchreibbare, ſondern lauter einſchreibbare Figuren. Die ſymmetriſchen und irregulären Figuren hingegen können entweder einſchreibbar oder uneinſchreibbar ſeyn. So ſind z. E. unter den ſymmetriſchen Figuren der gleichſchenklichte Triangel, das Oblongum, das iſoſceliſche Trapezium, und alle die nach der dritten Art der Conſtruction hervorgebrachte, ſowohl gerad- als ungeradeckigte Figuren einſchreibbar. Hingegen ſind nebſt dem Rhombus und dem Rhomboid, alle aus der erſten und zweyten Art der Conſtruction erzeugte ſymmetriſche Figuren, gerad- oder ungeradeckigte, uneinſchreibbare Figuren. So ſind ferner unter den irregulären Figuren alle ungleichſeitige Triangel einſchreibbare Figuren, und die orthogoniſchen, oxygoniſchen und amblygoniſchen Trapezien ſind uneinſchreibbare Figuren.

§. 518

§. 518.

Es ist aber leicht zu erfahren, ob sich eine Figur in einen Zirkel schreiben lässet oder nicht. Man darf nur drey beliebige Winkel in selbiger erwählen, und aus den dreyen Spitzen derselben einen Zirkel beschreiben. Z. E. es sey das rhombisch-rhomboidische Trapezoid ABCD und die beliebigen Winkel A, B und C. Tab. XXXVII. Fig. 3.

1) Machet aus A und B, mit willkührlicher Oefnung, unten und oben, die Durchschnitte G und H, und ziehet die Linie GH. 2) Machet aus B und C die Durchschnitte F und E, und ziehet die Linie FE, welche die Linie GH in dem Punkt I durchschneiden wird. 3) Beschreibet aus dem Durchschnitt I, mit der Weite IA oder ID, einen Zirkel: so wird derselbe alle Winkel der Figur berühren, und die gegebne Figur ist also einschreibbar.

Wenn man hingegen an den beyden rhombisch-rhomboidischen Trapezoiden bey Fig. 4 und 5. Tab. XXXVII. einen ähnlichen Versuch machet: so wird man finden, daß der Zirkel nicht alle ihre Winkel berühret, woraus denn folget, daß sie uneinschreibbar sind. Wir werden in der Folge sehen, warum es nöthig zu wissen ist, ob eine Figur sich in einen Zirkel schreiben lässet oder nicht.

Vierter Abschnitt.

Von der Entstehung eines eckigten Körpers.

§. 519.

Ein Körper, der von mehrern ebenen Figuren eingeschlossen ist, heisset ein eckigter Körper. Wie aber zur Hervorbringung einer eckigten Figur wenigstens drey gerade Linien erfordert werden: so gehören wenigstens vier ebene Figuren dazu, um einen eckigten Körper hervorzubringen. Es können nemlich weder zwey gerade Linien, noch drey ebene Figuren einen Raum einschliessen, son-

ſondern laſſen allezeit eine Oeffnung zurück. 1) Beſchreibet die Parallellinien AB und CD bey Fig. 7. Tab. XIII. ſo entſtehet keine Fläche, indem auf einer Seite der Hiatus AC, und auf der andern der Hiatus BD bleibet. 2) Ziehet gegen eine gerade Linie EF eine ſchräge EG bey Fig. 8. Tab. XIII. dergeſtalt, daß ſie in dem Punkt E zuſammenſtoſſen. Hier entſtehet zwar ein Winkel durch den Schluß der beyden Linien in E, aber keine Figur, ſondern nur ein Anfang zu ſolcher, indem bey FG ein Hiatus iſt.

Anmerkung.

Mit den krummen Linien, ingleichen mit der Zuſammenſetzung einer krummen und geraden, hat es in dieſem Punkt eine andere Bewandtniß, indem ihrer zwey hinlänglich ſind eine Figur zu bilden. 1) Man ſehe z. E. Fig. 9. Tab. XIII. wo die Concavitäten der beyden krummen Linien A und B zuſammenſtoſſen, und eine Figur geben. 2) Man ſehe Fig. 10. Tab. XIII. wo durch die Concavität der krummen Linie C, und durch die Convexität der krummen Linie D eine Fläche eingeſchloſſen wird. 3) Man ſehe Fig. 11. Tab. XIII. wo die gerade Linie GH und der Bogen F eine Figur machen. Ja eine einzige krumme Linie kann eine Figur bilden, wie die Zirkellinie.

§. 520.

Es iſt gezeiget worden, wie aus zwey geraden Linien keine geometriſche Figur hervorgebracht werden kann. Wenn nun wenigſtens vier ebene Figuren erfordert werden, um einen geometriſchen Körper zu zeugen, ſo kann man, um davon überführet zu werden, nach Anleitung von Fig. 12. Tab. XIII. drey gleiche reguläre Dreyecke aus Pappe dergeſtalt zuſammenſetzen, daß die Spitzen derſelben in einen körperlichen Winkel X zuſammenſtoſſen. Es wird ſich aber eine Lücke hervorthun; und alſo zwar der Anfang oder ein großer Theil eines Körpers, aber noch kein ganzer Körper vorhanden ſeyn, indem man nemlich die Lücke zuvörderſt ausfüllen muß; und dieſe Lücke wird juſt von der Größe eines der zuſammengeſetzten drey Triangel ſeyn. Wenn alſo ein vierter gleicher Triangel hinzugethan wird, ſo wird den drey erſtern eine Gränze geſetzet, und dadurch ein Körper erhalten werden. §. 521.

§. 521.

Wir wiſſen, wie viele ebene Figuren wenigſtens zur Hervorbringung eines Körpers gehören. Laſſet uns ſehen, wie ſelbige beſchaffen ſeyn müſſen, daß ſie bey der Zuſammenſetzung zum Körper aufſteigen können, und weder in der Ebene neben einander liegen bleiben, noch ſich unter einander verwickeln, ſich ſpannen, und über einander wegſteigen. Dieſes hänget von der Beſchaffenheit der zuſammenſtoſſenden Winkel ab, deren Summe allezeit unter 360 Grad ſeyn muß, wenn ein körperlicher Winkel entſtehen, und alſo ein gewiſſer Raum körperlich eingeſchloſſen werden ſoll. Enthalten die Winkel juſt die Summe von 360°, ſo bleiben die Figuren in der Ebene neben einander liegen, und enthalten ſie mehr als 360°, ſo verwickeln ſich die Figuren unter einander, und können nicht zuſammengepaſſet werden.

Anmerkung.

Ein körperlicher Winkel entſteht durch die Zuſammenſtoſſung drey oder mehrerer Flächen oder Figuren in einem Punkt Fig. 12. bey X. Tab. XIII; ein Flächenwinkel durch die Zuſammenſtoſſung zweyer Flächen, Fig. 12. bey Y; und ein Linienwinkel durch die Zuſammenſtoſſung zweyer Linien, Fig. 12. bey Z. Wenn man ſchlechtweg von einem Winkel redet, ſo verſtehet man einen Linienwinkel, und den andern beyden Winkeln werden die Wörter flach und körperlich allezeit hinzugeſetzet.

§. 522.

Es kömmt alſo darauf an, den Winkel der Figuren zu erforſchen. Dieſes kann in Anſehung der regulären Figuren durch den bloßen Calcul geſchehen, indem die Winkel in ſelbigen beſtimmt und beſtändig einerley ſind. Hingegen muß bey den ſymmetriſchen Figuren, in welchen die Winkel bald größer und bald kleiner ſeyn können, der Transporteur zu Hülfe genommen, und der Winkel ausgemeſſen werden. Bey dieſer unbeſtimmten Größe der Winkel in den ſymmetriſchen Figuren werden wir bloß die regulären Figuren hauptſachlich in Betracht nehmen, um ſo mehr, da bey

beyder

beyderley Arten von Figuren einerley Regel in Absicht auf die Beschaffenheit des körperlichen Winkels, zum Grunde lieget, und also, wenn man die Größe der Winkel einer symmetrischen Figur durch den Transporteur gefunden hat, man nur die Grade derselben zu summiren, und alsdenn dasjenige, was im §. 521. wegen der regulären Figuren gesaget worden, verhältnißmäßig anzuwenden brauchet.

§. 523.

Es werden aber die Winkel der regulären Figuren auf folgende Art durch den bloßen Calcul gefunden,

wenn man die Zahl 360 durch die Eckzahl der Figur theilet, und den Quotienten von der Zahl 180 abziehet.

Z. E. Wenn man für ein reguläres Achteck, die Zahl 360, durch 8 theilet, und den Quotienten 45 von 180 abziehet: so giebet der Rest 135 den verlangten Polygonwinkel eines regulären Achtecks. In folgender Tabelle wird man die Winkel aller regulären Figuren vom Dreyeck bis zum Zwölfeck finden.

Winkeltabelle.

Eckzahl.	Winkel.	Summe der Winkel.	Eckzahl.	Winkel.	Summe der Winkel.
III.	60	180	VIII.	135	1080
IV.	90	360	IX.	140	1260
V.	108	540	X.	144	1440
VI.	120	720	XI.	$147\frac{3}{11}$	1620
VII.	$128\frac{4}{7}$	900	XII.	150	1800

und so weiter.

§. 524.

Wir kommen nunmehro auf die Zusammensetzung der Figuren.

a) Es können drey, vier bis fünf gleiche reguläre Triangel mit ihren Spitzen zusammenstossen; aber nicht sechs und noch mehrere. Denn weil der Winkel eines jeden regulären Triangels 60° beträget, und

$6 \times 60°$

$6 \times 60° = 360°$: ſo können niemals ſechs reguläre Triangel einen körperlichen Winkel machen. Sie formiren nemlich eine bloſſe Ebene, und ſieben und mehrere reguläre Triangel erreichen ſich nicht mit ihren Spitzen, ſondern laſſen einen Hiatus in der Mitte.

Formiret aus Pappe ein reguläres Drey- Vier- Fünf- Sechs- und Siebeneck, und umgebet das Dreyeck mit drey gleichen Dreyecken; das Viereck mit vier regulären Dreyecken; das Fünfeck mit fünf, das Sechseck mit ſechs, und das Siebeneck mit ſieben; und die Seite jedes regulären Dreyecks der Seite jedes regulären Quadrats, Pentagons, Hexagons und Heptagons gleich ſeyn, nach Anleitung der Fig. 13. 14. 15. Tab. XIII. und Fig. 1. und 2, Tab. XIV. Wenn dieſe Figuren zuſammengeſetzet werden, ſo werden die Spitzen der Dreyecke in dem zum Grunde gelegten Drey- Vier- und Fünfeck in einem körperlichen Winkel zuſammenſtoſſen; in dem zum Grunde gelegten Hexagon in der Ebene neben einander liegen, und in dem Heptagon ſich nicht erreichen.

Hingegen iſt die Anzahl der zu einem körperlichen Winkel ſich vereinigenden **gleichſchenklichten Triangel** uneingeſchränkt, ſo lange die Schenkel nicht kleiner ſind, als der Halbmeſſer der Grundfläche, welche von den gleichſchenklichten Triangeln umgeben wird. Auf dieſe Weiſe werden die das reguläre Zwölfeck bey Fig. 8. Tab. XV. umgebenden zwölf gleichſchenklichten Triangel allezeit mit ihren Spitzen einen körperlichen Winkel formiren, und einen Körper, allhier eine Pyramide bilden, die aber bey Fig. 3. Tab. XIV. nicht, und alſo keinen Körper geben.

b) Es können ferner **drey reguläre Vierecke** mit ihren Ecken zuſammenſtoſſen, aber nicht mehrere. Denn weil der Winkel eines jeden Quadrats $90°$ hat, und $4 \times 90° = 360°$: ſo können niemals vier und auch nicht mehrere in einem körperlichen Winkel zuſammengebracht

gebracht werden. Die Erfahrung iſt ohne viele Mühe mit vier Quadraten aus Pappe zu machen, die ſich niemals zu einem Körper erheben, und entweder neben einander in der Ebene liegen bleiben, oder ſich einander verwickeln oder ſpannen werden.

Hingegen können nicht allein drey, ſondern auch vier iſoſceliſche Trapezien, und nicht nur drey und vier, ſondern ſogar fünf Rautenflächen in einem körperlichen Winkel zuſammengefüget werden, wenn, bey den Rautenflächen, die Zuſammenſetzung derſelben durch die ſcharfen Winkel geſchicht. Denn da jede Raute aus zweyerley Winkeln beſteht, einem ſcharfen und einem ſtumpfen: ſo geſchicht es, daß, wenn z. E. der ſcharfe Winkel einer Raute $\frac{3}{7}$ eines rechten Winkels ausmachet, der ſtumpfe $\frac{4}{7}$ ausmachen wird; und folglich daß, da ſowohl drey ſtumpfe als ſechs ſcharfe Winkel den Wehrt vier rechter Winkel machen, und vier rechte Winkel ſich nicht zum Körper erheben können, niemals ſechs Rauten körperlich verbunden werden können. Was die iſoſceliſchen Trapezien betrift, ſo müſſen die zuſammenſtoſſenden Winkel allezeit unter 90° ſeyn.

c) Es können ferner nicht mehr als drey reguläre Fünfecke aufs höchſte in einem körperlichen Winkel zuſammenkommen, indem der Winkel eines Fünfeckes 108° beträget, und drey zuſammenkommende Fünfecke nur annoch um 36° von 360° unterſchieden, und alſo vier Fünfecke um 72° gröſſer ſind.

d) Da der Winkel eines regulären Sechsecks 120° enthält, und alſo drey ſolcher Winkel 360° machen: ſo kann aus ſelbigem ſo wenig, als aus allen folgenden regulären Sieben- Acht- und Neunecken u. ſ. w. ein körperlicher Winkel formiret werden.

Fünf-

Fünfter Abſchnitt.

Eintheilung der geometriſchen Körper.

§. 525.

Die eckigten geometriſchen Körper können nach den vierley Hauptarten der runden Körper characteriſiret, und in eckigt-ſphäriſche, eckigt-coniſche, eckigt-cylindriſche und eckigt-ellipſoidiſche Körper eingetheilet werden. Es iſt aber α) die **Sphäre** oder **Kugel** ein runder Körper, welcher aus der Bewegung eines halben Zirkels um ſeinen Diameter hervorgebracht wird. Tab. XVI. Fig. 7. β) Der **Conus** oder **Kegel** iſt ein runder Körper, welcher entſteht, wenn ſich ein Triangel um eine ſeiner Seiten beweget. Tab. XVI. Fig. 8. γ) Der **Cylinder** oder die **Walze** iſt ein runder Körper, welcher entſteht, wenn ſich ein Zirkel an einer geraden Linie parallel beweget. Tab. XVI. Fig. 9. δ) Das **Ellipſoid** iſt eine Kugel, welche aus der Bewegung einer halben Ellipſis um ihren Diameter hervorgebracht wird. Wenn nun die Ellipſis zwey verſchiedne Diameter hat, einen größern und einen kleinern: ſo entſtehen dadurch zweyerley Arten von Ellipſoiden, ein länglichtes und ein dickes. Es iſt aber ein **länglichtes Ellipſoid** dasjenige, worinnen ſich eine halbe Ellipſis CBA um den größern Diameter BA beweget, wodurch der Körper länger als dick wird. Tab. XXXII. Fig. 8; und ein **dickes Ellipſoid**, wenn ſich eine halbe Ellipſis CBA um den kleinern Diameter BA beweget, wodurch der Körper dicker als lang wird. Tab. XXXII. Fig. 7. Das länglichte Ellipſoid, welches man durch **Langkugel** überſetzen kann, wird insgemein ſchlechtweg **Ellipſoid**, und das dicke Ellipſoid, welches man durch **Breit- oder Dickkugel** überſetzen kann, wird insgemein ein **Sphäroid** genennet. Nach dem vorhergehenden werden

α) Die eckigt ſphäriſchen Körper als ſolche eckigte Kugeln beſchrieben, deren Oberflächen nach allerhand Figuren ausgeſchnitten worden.

β) Die eckigt coniſchen Körper oder eckigte Kegeln, welche man mit ihrem beſondern Hauptnahmen Pyramiden oder eckigte Spitzſäulen nennet, werden als ſolche Körper beſchrieben, die zu ihrer Grundfläche eine geradlinigte Figur haben, welche in ſo viele Triangel eingeſchloßen iſt, als die Grundfläche Seiten hat, und deren Triangel oben in einen Punkt zuſammenlauffen.

γ) Die eckigt cylindriſchen Körper oder eckigte Walzen, welche man mit ihrem beſondern Hauptnahmen Priſmata oder eckigte Rundſäulen nennet, werden als ſolche Körper beſchrieben, welche zwey gleiche und ähnliche geradlinichte Grundflächen haben, die in ſo viele Vierecke eingeſchloßen ſind, als ſie Seiten haben.

δ) Die eckigt ellipſoidiſchen Körper werden als ſolche Lang- oder Dickkugeln beſchrieben, deren Oberflächen nach allerhand Figuren ausgeſchnitten worden.

Anmerkung.

In der höhern Mathematik werden die Ellipſoiden unter denjenigen runden Körpern mit begriffen, welche man durch den Hauptnahmen von Conoiden oder conoidiſchen Körpern (Afterkegeln) characteriſiret, und worunter man zuvörderſt alle diejenigen runden Körper verſteht, welche aus andern krummlinichten Figuren als aus dem Zirkel erzeuget werden, und hernach beſonders diejenigen, welche aus den drey coniſchen Sectionen, der Parabel, Ellipſis und Hyperbel entſtehen, und nach ihnen Paraboloiden, Ellipſoiden und Hyperboloiden genennet werden. Was ein Ellipſoid iſt, hat man vorhin geſehen. Ein Paraboloid hingegen entſteht, wenn eine halbe Parabel CBA ſich um die Axe AB herumdrehet. Tab. XXXII. Fig. 6. und ein Hyperboloid, wenn eine halbe Hyperbel BCA ſich um die Axe AB herum beweget. Tab. XXXII. Fig. 5. Von dieſen und mehrern krummlinichten Körpern können in der geradelinichten Meßkunſt keine andere als die beyden elliptiſchen, bequem nachgeahmet, und durch ſymmetriſche Abſchnitte zu eckigten Körpern ausgebildet werden. Es verliehret ſich nemlich bey den andern, durch den veränderlichen

chen Abschnitt, das Merkmal ihrer Linien, und daher kann man dergleichen eckigte Körper zwar überhaupt eckigte conoidische Körper nennen, ob man sie gleich nicht ohne Mühe nach einem gewissen Geschlecht ihrer Linie besonders characterisiren kann.

§. 526.

Ein eckigter geometrischer Körper heisset α) **regulär**, wenn alle Figuren gleich und ähnlich, und alle Winkel gleich sind; β) **symmetrisch**, wenn die eine Hälfte des Körpers der andern Hälfte desselben in Ansehung der Figuren gleich und ähnlich ist; γ) **irregulär**, wenn die eine Hälfte des Körpers der andern Hälfte desselben ungleich und unähnlich ist. Es giebet ferner Körper, die aus **einerley Figuren**, und andre die aus **verschiednen Figuren** bestehen. Ingleichen können einige Körper aus **lauter regulären Figuren**, andere aus **lauter symmetrischen**; andere wiederum aus regulären und symmetrischen Figuren bestehen, und so weiter.

Sechster Abschnitt.

Von den eckigt sphärischen Körpern.

§. 527.

Die eckigt sphärischen Körper bestehen entweder aus einerley oder mehrerley Figuren. α) Von denen aus einerley Figuren sind nicht mehr als sieben möglich; fünf die aus regulären, und zwey die aus symmetrischen Figuren bestehen. Alle diese sieben Körper sind Hauptkörper, obgleich nur die fünf ersten **regulär**, und die zwey leztern **symmetrisch** sind. β) Von den Körpern aus mehrerley Figuren sind in regulären Figuren nicht mehr als **dreyzehn** möglich, und diese stammen, vermittelst der Brechung, von den fünf regulären Körpern her, obgleich die Art der Brechung noch nicht genugsam von allen Körpern bekannt ist. In vermischten regulären und symmetrischen Figuren sind die eckigt sphäri-

ſchen Körper auf vielerley Art möglich, obgleich nur ein einziges Exempel von dergleichen Körpern allhier vorkommen wird. Wir können nach dem vorhergehenden viererley Claſſen eckigt ſphäriſcher Körper feſtſetzen; eine für die fünf regulären Hauptkörper; eine andere für die zwey ſymmetriſchen Hauptkörper, eine dritte für die aus mehrerley regulären Figuren beſtehenden dreyzehn gebrochnen Körper; und eine vierte für die aus vermiſchten regulären und ſymmetriſchen Figuren beſtehenden Körper.

§. 528.

Iſte Claſſe der eckigtſphäriſchen Körper. Dieſe Claſſe enthält

1) das Tetraeder, ein körperliches Viereck, welches aus vier gleichſeitigen Triangeln beſteht. Das Netz ſehe man bey Fig. 13. Tab. XIII. und auf eine andere Manier bey Fig. 16.

2) Das Hexaeder, oder der Cubus, d. i. Würfel, ein körperliches Sechseck, welches aus ſechs gleichen Quadraten beſteht. Fig. 4 und 5. Tab. XIV.

3) Das Octaeder, ein körperliches Achteck, welches aus acht gleichſeitigen Triangeln beſteht. Fig. 6. und 7. Tab. XIV.

4) Das pentagoniſche Dodekaeder, ein körperliches Zwölfeck, welches aus zwölf regulären Fünfecken beſteht. Fig. 8. Tab. XIV. Das Netz muß aber zweymal gemachet werden.

5) Das Ikoſaeder, ein körperliches Zwanzigeck, welches aus zwanzig gleichſeitigen Triangeln beſteht. Fig. 9. Tab. XIV.

Dieſe fünf vorhergehenden Körper ſind bereits vom Euklides beſchrieben worden. Die beyden folgenden der zweyten Claſſe ſind von neuerm Dato.

IIte Claſſe der eckigt ſphäriſchen Körper. Dieſe Claſſe enthält

1) das

1) das rhombische Dodekaeder, ein körperliches Zwölfeck, welches aus zwölf gleichen Rautenflächen von bestimmten Winkeln besteht. Fig. 10. Tab. XIV.

2) Das Triakontaeder, ein körperliches Dreyßigeck, welches aus dreyßig gleichen Rautenflächen von bestimmten Winkeln besteht. Fig. 1. Tab. XV. Das Netz muß zweymal gemachet werden.

α) Die Rautenfläche für das rhombische Dodekaeder zu beschreiben.

1) Beschreibet das reguläre Viereck ABCD, und in selbigem durch Halbirung der Seiten, das mittlere Viereck EFGH. Fig. 11. Tab. XIV.

2) Ziehet die blinden Linien EG und FH, und machet SI und IO jede gleich der halben Seite des mittlern Vierecks: so erscheinet die Rautenfläche EOGS.

3) Setzet solche, nach Anleitung des Musters bey Fig. 10. Tab. XIV. durch gehörige Uebertragung der Winkel, zwölfmal aneinander, so wird das Netz für das rhombische Dodekaeder beschrieben seyn. Man kann sich zu mehrerer Beschleunigung der Operation, auch eines dreyspitzigen Zirkels bedienen; oder man nehme drey Zirkel, öfne den einen für die Größe der Seite EO = OG; den andern für die Diagonale EG, welche die Länge der Figur giebet, und den dritten für die Diagonale SO, welche die Breite der Figur giebet.

β) Die Rautenfläche für das Triakontaeder zu beschreiben.

1) Beschreibet ein reguläres Fünfeck AEB, und ziehet die zwey Theile AE und EB durch die Linie AB zusammen. Fig. 2. Tab. XV.

2) Ziehet bey Fig. 3. Tab. XV. zwey in dem Punkt H rechtwinklicht sich einander durchschneidende Linien, und machet CD gleich der Linie AB, und FG gleich der Seite AE, so daß FH = HG: so kömmt die Rautenfläche CGDF.

3) Setzet ſolche, nach Anleitung des Muſters bey Fig. 1. Tab XV. funfzehnmal zuſammen: ſo kömmt die eine Hälfte des Netzes. Beſchreibet das Netz noch einmal: ſo kömmt die andere Hälfte.

IIIte Claſſe der eckigt ſphäriſchen Körper. Zu dieſer Claſſe gehören folgende dreyzehn Körper, als:

1) Ein gebrochnes Tetraeder, welches aus vier regulären Triangeln, und vier regulären Hexagonen beſteht. Fig. 4. Tab. XV.

2) Ein gebrochnes Hexaeder, welches aus ſechs regulären Achtecken und acht gleichſeitigen Triangeln beſteht. Fig. 5. Tab. XV.

3) Ein anders gebrochnes Hexaeder, welches aus ſechs regulären Quadraten, und acht gleichſeitigen Triangeln beſteht. Fig. 6. Tab. XV.

4) Ein gebrochnes Octaeder, welches aus ſechs regulären Quadraten, und acht regulären Sechsecken beſteht. Fig. 7. Tab. XV.

5) Ein Körper, welcher, nach ſeinem Erfinder, der archimediſche Körper genennet wird, und aus achtzehn regulären Quadraten, und acht gleichſeitigen Triangeln beſteht. Fig. 1. Tab. XVI.

6) Ein gebrochnes Dodekaeder, welches aus zwanzig gleichſeitigen Triangeln, und zwölf regulären Zehnecken beſteht. Fig. 2. Tab. XVI. Muß zweymal gemachet werden.

7) Ein Ikoſi-Dodekaeder, welches aus zwanzig gleichſeitigen Triangeln, und zwölf regulären Fünfecken beſteht. Fig. 3. Tab. XVI. Das Netz muß zweymal gemachet, und eine Hälfte mit der andern dergeſtalt verbunden werden, daß die Triangel und Fünfecke, und nicht Triangel und Triangel, über einander kommen.

8) Ein gebrochnes Ikoſaeder, welches aus zwölf regulären Fünfecken und zwanzig regulären Sechsecken beſteht. Fig. 4. Tab. XVI. Muß zweymal gemachet werden.

9) Ein

9) Ein **gebrochnes Afterhexaeder**, welches aus sechs regulären Quadraten, und zwey und dreyßig gleichseitigen Triangeln besteht. Fig. 5. Tab. XVI.

10) Ein **gebrochnes Afterdodekaeder**, welches aus zwölf regulären Fünfecken, und achtzig gleichseitigen Triangeln besteht. Fig. 6. Tab. XVI. Wird zweymal gemacht.

Vorhergehende zehn gebrochne Körper bestanden aus zweyerley regulären Figuren. Die folgenden drey bestehn aus dreyerley regulären Figuren.

11) Ein **gebrochnes Hexaedro-Octaeder**, welches aus sechs regulären Achtecken, acht regulären Sechsecken, und zwölf regulären Quadraten besteht. Fig. 1. Tab. XVII.

12) Ein **Rhombi-Ikosi-Dodekaeder**, welches aus zwanzig gleichseitigen Triangeln, dreyßig regulären Quadraten, und zwölf regulären Fünfecken besteht. Fig. 2. Tab. XVII. Wird zweymal gemacht, und das zweyte mal werden die mit Diagonalen durchzogenen Quadrate weggelassen.

13) Ein **gebrochenes Ikosi-Dodekaeder**, welches aus dreyßig regulären Quadraten, zwanzig regulären Hexagonen und zwölf regulären Dekagonen besteht. Fig. 3. Tab. XVII. Wird zweymal gemacht, und das zweyte mal werden die mit Diagonalen durchzogene Quadrate weggelassen.

IVte Classe der eckigt sphärischen Körper. Diese Classe besteht aus Körpern, die aus vermischten regulären und symmetrischen Figuren zusammengesetzet sind, und aus der Brechung der in vorhergehender dritten Classe enthaltnen Körper entspringen. Ich kenne nur einen einzigen hieher gehörigen Körper, ungeachtet sonst diese Classe nicht, wie die drey vorhergehenden, eingeschränket ist, und also für einen Speculanten einen reichen Stoff zu Erfindungen darbietet. Es ist aber der hieher gehörige Körper

ein gebrochnes Hexaeder, welches aus sechs regulären Zwölfecken, acht gleichseitigen und vier und zwanzig gleichschenklichten Triangeln besteht. Fig. 1. Tab. XVIII.

Anmerkung.

Ueber die Construction des vorhergehenden gebrochnen Hexaeders.

Aus dem bey Fig. 1. Tab. XVIII. befindlichen Netze zu diesem Körper ist zu sehen, daß einige Triangel über die Seiten der Dodekagone wegstreichen. Deswegen müssen sechs einzelne unverbundne Dodekagone mit den dazu gehörigen Triangeln verfertiget werden; ob man solche gleich, nach der Lage des Netzes, auf der umgekehrten Seite der Zeichnung, durch Kleister oder Leim hernach verbinden kann, um die Zusammensetzung des Körpers desto leichter zu machen. Die Triangel werden auf folgende Art erhalten.

1) Beschreibet mit drey Viertheil der Seite AB aus der Ecke B einen Bogen DE. Bey Fig. 2. Tab. XVIII. findet man die Seite AB in vier gleiche Theile unterschieden.

2) Traget die Weite AB aus A in D, und ziehet DB zusammen: so kömmt der gleichschenklichte Triangel ABD.

3) Beschreibet über DB den gleichseitigen Triangel DBE.

4) Beschreibet mit der Weite AB auf EB den gleichschenklichten Triangel EBG, und auf DE den gleichschenklichten Triangel DEF. Die ganze Operation giebet einen mit drey gleichschenklichten Triangeln umgebnen gleichseitigen Triangel. Verfahret auf ähnliche Art, nach Anleitung des Netzes, um die übrigen Triangel zu zeichnen.

§. 529.

Nicht allein die fünf regulären Körper der ersten Classe, sondern auch die dreyzehn symmetrischen Körper der dritten Classe, haben die Eigenschaft, **daß sie in einen Zirkel geschrieben werden können**, dergestalt daß ihre Durchschnitte die Peripherie desselben berühren; und folglich, daß wenn sie in eine hohle Kugel von gleichem Diameter eingeschlossen werden, alle ihre Ecken an die Fläche dieser Kugel stossen. Da dieses letzte Experiment etwas beschwerlich, und auch kostbar ist, so kann man sich durch ein anderes bequemers von jenen Eigenschaften überzeugen, wenn man nemlich den Diameter eines Körpers, aus zwey beliebigen

gegen

gegen einander über stehenden Ecken, mit einem Tasterzirkel abnimmt, und die gefundne Weite mit der Weite zwischen zwey andern gegen einander über stehenden Ecken vergleichet. Die beyden rhombischen Körper der zweyten Classe sind der Eigenschaft der Einschreibung in einen Zirkel, und folglich der Einschliessung in eine hohle Kugel, nur in Ansehung derjenigen gegen einander über stehenden Ecken fähig, die aus der Begegnung der scharfen, nicht aber der stumpfen Winkel entstehen.

§. 530.

Es ist oben gesaget worden, daß die eckigt sphärischen Körper, vermittelst der Brechung von den fünf regulären Körpern, abstammen, obgleich die Art der Brechung noch nicht genugsam von allen Körpern bekannt ist. Ich werde dieses durch einige Exempel erläutern. So entstehet nemlich

α) Das **gebrochne Tetraeder**, welches vier reguläre Sechsecke und eben so viele gleichseitige Triangel enthält, aus dem Tetraeder, wenn die Seiten desselben bis auf ein Drittheil seciret werden.

β) Das **gebrochne Hexaeder**, welches sechs reguläre Achtecke und acht gleichseitige Triangel enthält, wird erzeuget, wenn die Seiten eines Hexaeders bis auf ein Drittheil abgeschnitten werden.

γ) Das **gebrochne Hexaeder**, welches aus sechs regulären Quadraten und acht gleichseitigen Triangeln besteht, wird erzeuget, wenn die Seiten eines Hexaeders bis auf die Hälfte seciret werden.

δ) Das **gebrochne Octaeder**, welches aus sechs regulären Quadraten und acht regulären Sechsecken besteht, wird erzeuget, wenn die Seiten des Octaeders bis auf ein Drittheil abgeschnitten werden.

ε) Der **archimedische Körper**, welcher aus achtzehn Quadraten und acht gleichseitigen Triangeln besteht, wird erzeuget, wenn das gebrochne Hexaeder von γ), um die Hälfte der Seiten seciret wird.

ζ) Das gebrochne Dodekaeder, welches aus zwanzig gleichſeitigen Triangeln und zwölf regulären Zehnecken beſteht, wird erzeuget, wenn das pentagoniſche Dodekaeder bis auf ein Viertheil der Seiten abgeſchnitten wird.

η) Das Ikoſi-Dodekaeder, welches aus zwanzig gleichſeitigen Triangeln und zwölf regulären Fünfecken beſteht, wird erzeuget, wenn das pentagoniſche Dodekaeder bis auf die Hälfte der Seiten abgeſchnitten wird.

θ) Das gebrochne Ikoſaeder, welches aus zwanzig regulären Sechsecken und zwölf regulären Fünfecken beſteht, wird erzeuget, wenn das reguläre Ikoſaeder bis auf ein Drittheil der Seiten abgeſchnitten wird.

§. 531.

Unter allen möglichen eckigt ſphäriſchen Körpern ſind die fünf der erſten Claſſe die einzigen regulären Körper, indem ſie mit der Gleichheit und Aehnlichkeit der Figuren die Gleichheit der Winkel verbinden; und aus demjenigen, was im IVten Abſchnitt von der Entſtehung der Körper §. 524. über die Zuſammenſetzung der Figuren geſaget worden iſt, kann man ſehen, daß nicht mehr als fünf reguläre Körper möglich ſind. Denn

α) Da die gleichſeitigen Triangel auf nicht mehr als dreyerley Art höchſtens körperlich zuſammenſtoſſen können: ſo können nicht mehr als drey reguläre Körper von ihnen entſtehen, und dieſe ſind 1) das Tetraeder, in welchem ſich drey Triangel körperlich zuſammenfügen; 2) das Oktaeder, worinnen vier Triangel, und 3) das Ikoſaeder, worinnen fünf Triangel zuſammenſtoſſen.

β) Da die regulären Quadrate auf nicht mehr als eine Art körperlich zuſammenſtoſſen können: ſo kann nicht mehr als ein einziger regulärer Körper, nemlich der Cubus oder das Hexaeder von ihnen entſtehen.

γ) Da

7) Da die regulären Fünfecke auf nicht mehr als eine Art körperlich zusammenstossen können: so kann nicht mehr als ein einziger regulärer Körper, nemlich das pentagonische Dodekaeder von ihnen entstehen.

§. 532.

Die zwey rhombischen Körper der zweyten Classe, nemlich das rhombische Dodekaeder und das Triakontaeder sind, ungeachtet sie ebenfalls wie die vorhergehenden, nur aus einerley Figuren, nemlich aus Rhomben bestehen, symmetrische Körper; und daß ebenfalls, in der Classe der eckigt sphärischen Körper, nicht mehr als zweyerley rhombische Körper möglich sind, ist daraus klar, weil die Rhomben nur in vier oder fünf Winkeln aufs höchste körperlich zusammenstossen können; ihr Zusammenstoß aber in einer geringern Anzahl von Winkeln, keinen eckigt sphärischen Körper giebet.

§. 533.

Die dreyzehn Körper der dritten Classe sind ebenfalls so viele symmetrische Körper; und da Kepler in seiner Harmonik der Welt weitläuftig gezeiget hat, daß, in regulären Figuren, nicht mehr als dreyzehn Körper, für die Classe der eckigt sphärischen Körper, möglich sind: so ist die Anzahl aller möglichen eckigt sphärischen Körper in regulären Figuren, in der Zahl achtzehn, nemlich in fünf von einerley und in dreyzehn von mehrerley regulären Figuren; in symmetrischen Figuren aber in der Zahl zwey, nemlich in den zwey rhombischen Körpern der zweyten Classe eingeschlossen. Dagegen aber sind in der vierten Classe der aus vermischten regulären und symmetrischen Figuren bestehenden eckigt sphärischen Körper, aus welcher sich allhier nur ein einziges Exempel befindet, weit mehrere möglich.

§. 534.

Ein geometrischer Körper, der aus gleichen und ähnlichen Figuren besteht, wird überhaupt ein Polyeder, das ist ein vielständiger Körper genennet. Daher kommen die

die besondern Nahmen für die Körper der ersten und zweyten Classe der eckigten sphärischen Körper:

1) Tetraeder, d. i. vierständiger Körper. 2) Hexaeder, d. i. sechsständiger Körper. 3) Octaeder, d. i. achtständiger Körper; 4) Dodekaeder, d. i. zwölfständiger Körper. 5) Ikosaeder, d. i. zwanzigständiger Körper, und 6) Triakontaeder, d. i. dreyßigständiger Körper.

Diese Benennungen gründen sich darauf, daß jede Fläche dieser Körper eine eigentliche Grund- oder Ruhefläche derselben abgeben kann; wiewohl sonsten, wenn sich die Körper gut ausnehmen und deutlich gesehen werden sollen, sie auf eine ihrer Spitzen, über einen Säulenfuß, gestellet werden müssen; es wäre denn, daß man sie aus der Mitte ihrer Flächen von gleicher Höhe verlangete, in welchem Falle sie natürlicherweise auf ihrer platten Fläche ruhen müssen, ob sie gleich auch alsdenn auf etwas erhabenes gestellet werden können.

§. 535.

Die eckigt sphärischen Körper können auf verschiedene Art einander gleich gemachet werden, als

1) im Perimeter. Hierdurch entstehen Körper von gleichem Umfang in Ansehung der Länge der Linien, in welche die Figuren der Körper eingeschlossen sind. Man nennet sie isoperimetrische Körper.

2) im Flächeninhalt. Hierdurch entspringen Körper von gleichem Umfang in Ansehung der Länge und Breite der Figuren, woraus die Körper bestehen. Diese Körper werden auch von gleicher Schwere seyn, wenn die Materien, woraus man sie verfertiget, einerley und von gleicher Dicke sind.

3) in der Höhe aus der Mitte der Flächen. Die daher entspringenden Körper müssen auf ihre platte Flächen, zwischen zwey parallel liegenden Flächen, gestellet werden.

4) Im

4) In der Höhe aus den Ecken. Hierdurch entſpringen Körper von gleichem Diameter, welche auf eine ihrer Ecken geſtellet werden müſſen.

5) In dem cubiſchen Inhalt. Hierdurch entſpringen Körper, welche ihrem innern Raume nach gleich viel enthalten. Die Probe kann mit Sand, oder wenn es die Materie des Körpers erlaubet, mit Waſſer gemachet werden.

Der erſte Gleichheitsfall kann ohne viele Schwürigkeit, an allen Körpern der drey erſten Claſſen ausgeführet werden. Die übrigen Gleichheitsfälle ſind weitläuftigen Berechnungen unterworfen, und wir werden ſolche nicht weiter, als auf die fünf regulären Körper erſtrecken; den zweyten Gleichheitsfall ausgenommen, welchen wir auch an den dreyzehn Körpern der dritten Claſſe verſuchen werden.

Siebenter Abſchnitt.

Die eckigt ſphäriſchen Körper der erſten und dritten Claſſe im Perimeter der Figuren gleich zu machen.

§. 536.

Man verſtehet durch den Perimeter einer Figur die Summe der Seitenlängen einer Figur, und wenn zwey oder mehrere Figuren einen gleichen Perimeter haben, ſo werden ſie iſoperimetriſche Figuren genennet. Wenn z. E. jede Seite eines gleichſeitigen Triangels vier Zoll miſſet, und $4+4+4=12$: ſo iſt die Zahl 12 der Perimeter dieſes Triangels. Wenn ferner jede Seite eines regulären Quadrats drey Zoll miſſet, und $3+3+3+3=12$: ſo iſt die Zahl 12 der Perimeter von dieſem Quadrate, und ſelbiges iſt mit dem vorhergehenden Triangel iſoperimetriſch.

§. 537.

§. 537.

(I.) Eine Figur mit einer andern, z. E. ein Drey- Vier- und Fünfeck, iſoperimetriſch zu machen.

1) Ziehet eine gerade Linie von beliebiger Länge, z. E. die Linie AB bey Figur 1. Tab. XXI. theilet ſolche in die drey gleichen Theile AD, DC und CD, und ſetzet ſie bey Fig. 4. Tab. XXI. in einen gleichſeitigen Triangel LMN zuſammen. Wenn man nun die Linie AB, und die Seiten des Triangels LMN mit ebendemſelben Maaßſtabe ausmiſſet, und die Linie zu 60 annimmt: ſo wird jede Seite des Triangels = 20, und der Perimeter deſſelben 3 X 20 = 60 ſeyn.

2) Theilet die bey Fig. 2. Tab. XXI verſetzte Linie AB in die vier gleichen Theile AE, ED, DC und CB, und ſetzet ſolche bey Fig. 5 Tab. XXI in ein reguläres Quadrat OPQR zuſammen. Wenn nun, nach vorigem Maaßſtabe, jede Seite = 15: ſo wird der Perimeter des Quadrats ſeyn 4 X 15 = 60.

3) Theilet die bey Fig. 3. Tab. XXI verſetzte Linie AB in die fünf gleichen Theile AF, FE, ED, DC und CB, und ſetzet ſolche bey Fig. 6. Tab. XXI. in ein reguläres Fünfeck STVWX zuſammen. Wenn nun nach vorigem Maaß, jede Seite von 12 ſeyn wird: ſo wird der Perimeter des Fünfecks ſeyn 5 X 12 = 60.

Auf ähnliche Art verfähret man, ein Sechs-, Sieben- oder Achteck aus der Linie AB hervorzubringen, und alle dieſe Figuren werden iſoperimetriſch ſeyn.

Anmerkung.

Obgleich der Perimeter einer Figur mit ihrem quadratiſchen Inhalt nicht zu vermengen iſt: ſo kann es doch geſchehen, daß zwey Figuren in beyden Eigenſchaften übereinkommen, z. E. die beyden verſchiednen Triangel bey Fig 7 und 8. Tab. XXI. jeder Schenkel des erſtern iſt = 37 und die Baſis

fis = 24. Sein Perimeter ist also 98 = 37 + 37 + 24. Jeder Schenkel des zweyten ist = 29, und seine Basis = 40. Sein Perimeter ist also auch 98 = 29 + 29 + 40; und folglich sind beyde Triangel isoperimetrisch. Wenn nun die Höhe des ersten Triangels = 35 mit $\frac{1}{2}$ = 12 als der halben Basis multipliciret wird: so kömmt 420 für seinen quadratischen Inhalt; und soviel kömmt auch für den zweyten Triangel, indem das Product aus der Höhe 21 in $\frac{1}{2}$ = 20 als die halbe Höhe, auch 420 ist.

Um gegentheils zu zeigen, wie verschieden zwey Figuren in Absicht auf den Perimeter und ihren quadratischen Inhalt seyn können, wollen wir ein Quadrat und ein Oblongum erwählen, welches erstere, wenn es mit dem leztern einerley Perimeter hat, nach dem quadratischen Inhalt um das Quadrat der halben Differenz der oblongischen Seitenlängen größer als das Oblongum seyn wird. Es sey bey Fig 9 Tab. XXI. das Oblongum A, dessen größere Seite wir = 12 und die kleinere = 6 annehmen wollen, und dessen Perimeter also 36 = 12 + 12 + 6 + 6 seyn wird. Es sey ferner bey Fig. 10. Tab. XXI. das Quadrat B, dessen Perimeter ebenfalls 36 misset, weil 9 + 9 + 9 + 9. Beyde Figuren sind also isoperimetrisch. Wenn solche aber nach dem quadratischen Inhalt ausgemessen werden: so ist das Oblongum = 72 aus 6 × 12, und das Quadrat = 81, aus 9 × 9. Die Figuren differiren also um 9, und diese 9 ist das Quadrat der halben Differenz der kleinern und grössern Seite des länglichten Vierecks, wie man aus folgender Vorstellung siehet:

12 die größere Seite, oder die Länge.
6 die kleinere Seite, oder die Breite.
6 Differenz.
2) 3 halbe Differenz.
3
9 Quadrat der halben Differenz.

§. 538.

Wenn in einem Körper alle Figuren zusammengenommen werden, und die Summen ihrer Längen der Summe der Längen aller zusammengenommnen Figuren eines andern Körpers gleich ist: so sind diese Körper isoperimetrisch oder von gleichem Perimeter.

Anmer-

Anmerkung.

Zur Isoperimetrie der Körper wird nemlich nicht erfordert, daß die Figuren, woraus sie bestehen, unter sich isoperimetrisch sind.

(II.) Einen Körper mit einem andern isoperimetrisch zu machen, oder die Größe der Seite für einen Körper zu dieser Absicht zu finden. §. 539.

1) Multiplicirt die Anzahl der Figuren eines Körpers durch ihre Eckzahl, und halbiret das Product.

2) Dividiret mit dem Quotienten in die für den Perimeter der Körper festgesetzte Zahl. Der Quotient giebet die Größe einer Seite für die Figuren. Es sey z. E. die für den Perimeter festgesetzte Zahl = 3600, und man will einen Cubus mit einem Dodekaeder isoperimetrisch machen. Stehet also:

Für den Cubus.		Für das Dodekaeder.	
Anzahl der Figuren	6	Anzahl der Figuren	12
Eckzahl	4	Eckzahl	5
	2) 24		2) 60
	12		30

Die perimetrische Zahl 12) 3600 (300 gefundne Seite einer Figur, die allhier ein Quadrat ist.

30) 3600 (120 gefundne Seite einer Figur, die allhier ein Fünfeck ist.

Der Cubus wird also mit dem Dodekaeder isoperimetrisch seyn, wenn dort die Seite 300, und hier 120 messen wird.

§. 540.

Wenn ein Körper aus mehrerley Figuren besteht, so 1) multiplicirt die Anzahl jeder Art der Figuren mit ihrer Eckzahl für sich; 2) halbiret die summirten verschiednen Producte, und alsdenn 3) dividiret mit dem Quotienten in die angenommne perimetrische Zahl, als:

(III.) Das

(III.) Das gebrochne Heraeder aus 6 Achtecken und 8 Triangeln mit dem vorhin berechneten Cubus und Dodekaeder isoperimetrisch zu machen. §. 541.

Anzahl der Achtecke 6
Eckzahl 8
48

Anzahl der Triangel 8
Eckzahl 3
24
+ 48
72
2) 36

3600 : 36 = 100 die gefundne Seite des gebrochnen Heraeders.

(IV.) Aus der gegebnen Seite einer Figur den Perimeter eines Körpers zu finden. §. 542.

1) Multiplicirt die Seite mit der Eckzahl der Figuren, und das Product mit der Anzahl der Figuren. 2) Halbirt das zweyte Product. Z. E. wenn die Seite eines Cubus = 300, so ist

300 Seite
4 Eckzahl
1200
6 Anzahl der Figuren
2) 7200
3600 der gefundne Perimeter.

§. 543.

Wenn ein Körper aus mehrerley Figuren bestehe, so 1) multiplicirt die Seite mit der Eckzahl jeder Art von Figuren und deren Anzahl besonders. 2) Halbirt die summirten Produkte, als:

(V.) Die Seite eines gebrochnen Heraeders aus 6 Achtecken und 8 Triangeln sey = 100 Den perimetrischen Inhalt des Körpers zu finden.

100	Seite	100	Seite	4800		
8	Eckzahl	3	Eckzahl	2400		
800		300		7200		
6	Anzahl der	8	Anzahl der	2)3600	Die gefundne perimetriſche Zahl.	
4800	Figuren	2400	Figuren			

§. 544.

Wir wollen die Zahl 3600 für den perimetriſchen Inhalt eines jeden der 20 Körper aus der erſten, zweyten und dritten Claſſe beybehalten, und alsdenn wird die Größe ihrer Seiten ſeyn, wie folget:

α) Die fünf Körper der erſten Claſſe.

1)	Das Tetraeder	600
2)	Das Hexaeder	300
3)	Das Octaeder	300
4)	Das pentagoniſche Dodekaeder	120
5)	Das Ikoſaeder	120

β) Die zwey Körper der zweyten Claſſe.

1)	Das rhombiſche Dodekaeder	150
2)	Das Triakontaeder	60

γ) Die dreyzehn Körper der dritten Claſſe.

1)	Das gebrochne Tetraeder aus 4 Triangeln und 4 Hexagonen	200
2)	Das gebrochne Hexaeder aus 6 Octogon. und 8 Triangeln	100
3)	Das gebrochne Hexaeder aus 6 Quadr. und 8 Triangeln	150
4)	Das gebrochne Octaeder aus 6 Quadr. und 8 Hexagonen	100
5)	Der archimediſche Körper	75
6)	Das gebrochne Dodekaeder aus 20 Triang. und 12 Dekagonen	40
7)	Das Ikoſi-Dodekaeder aus 20 Triang. und 12 Pentagonen	60

8) Das

8) Das gebrochne Ikoſaeder aus 12 Pentagon. und 20 Hexagonen — — 40
9) Das gebrochne Afterhexaeder aus 6 Quadr. und 32 Triangeln — — 60
10) Das gebrochne Afterdodekaeder aus 12 Pentag. und 80 Triangeln — — 24
11) Das gebrochne Hexaedro-Dodekaeder aus 6 Octog. 8 Hexag. und 12 Quadraten 50
12) Das Rhombi-Ikoſi-Dodekaeder aus 20 Triangeln 30 Quadr. und 12 Pentagonen 30
13) Das gebrochne Ikoſi-Dodekaeder aus 30 Quadr. 20 Hexag. und 12 Dekagonen — 20

§. 545.

Wenn man den Perimeter in kleinern Zahlen verlanget, ſo können die vorhergehenden Zahlen als **Proportionalzahlen** gebrauchet, und die Seiten nach folgender Anleitung gefunden werden. Z. E. der Perimeter ſoll nicht gröſſer als 30 ſeyn. Was wird alsdenn die Seite eines **Tetraeders**, wozu vorhin 600 erfordert wurden, meſſen? Stehet alſo: 3600: 600 = 30: 5 die gefundne Zahl.

Achter Abſchnitt.

Die fünf regulären Körper im Flächeninhalt einander gleich zu machen.

§. 546.

Der **Flächeninhalt** wird auch ſonſten der **Superficialinhalt**, ingleichen der **quadratiſche Inhalt**, (oder auch der **Perimeter des Körpers**) genennet, und beſtehet in der ſummirten Anzahl der Quadrate, die jede Figur enthält, es mögen Ruthen, Schuhe oder Zolle ꝛc. zum Maaß der Quadrate genommen werden. Z. E. ein Cubus beſtehet aus 6 regulären Quadratflächen. Wenn eine Seite dieſer Flächen 3 Zoll lang iſt, ſo miſſet jede Fläche 9 Quadratzolle, weil 3 × 3 = 9, und der Flächeninhalt einer Fi-

gur des gegebnen Cubus ist also = 9. Nun aber besteht der Cubus aus 6 solcher Flächen. Also heisset es 9 × 6 = 54, und die Zahl 54 ist der Flächeninhalt des ganzen Cubus. Wenn nun ein andrer Körper, z. E. ein Tetraeder, ebenfalls 54 zu seinem Flächeninhalt hat: so sind beyde Körper in Absicht auf den Flächeninhalt einander gleich.

§. 547.

Es giebet zweyerley Wege, die fünf regulären Körper im Flächeninhalt einander gleich zu machen; einen durch die geometrische Construction, und einen andern durch den Calcul.

Artikel (A).

Die fünf regulären Körper durch die geometrische Construction im Flächeninhalt einander gleich zu machen.

§. 548.

Die Sache kömmt darauf an, 1) ein zum Grunde gelegtes Netz eines der fünf Körper, vermittelst der Addition seiner Flächen, in eine einzige Figur, z. E. in ein Oblongum zu bringen; 2) diese Figur mit der Flächenzahl der andern Körper successive zu theilen, und 3) einen der gekommenen Theile, nach den Regeln der Verwandlung der Figuren, in diejenige Figur umzuformen, mit welcher die durch die Addition, nach dem ersten Proceß, hervorgebrachte Figur nach Vorschrift des zweyten Processes, getheilet worden ist. Die umgeformte Figur giebet das Maaß der Figur zu dem verlangten Körper. Es werde z. E. das Netz eines Cubus zum Grunde geleget. Wenn die sechs Quadratflächen desselben in ein Oblongum z. E. in eines 3 lang und 2 breit, gebracht worden sind: so werden die Flächengrößen für die vier übrigen regulären Körper auf folgende Art gefunden, als

1) Für das Tetraeder, welches aus vier regulären Triangeln besteht. Theilet das Oblongum in vier gleiche

gleiche Theile, und verwandelt einen davon in einen regulären Triangel von gleichem quadratischen Inhalt. Der gefundne Triangel ist das Maaß für die vier Triangulärflächen des Tetraeders.

2) **Für das Octaeder, welches aus acht regulären Triangeln besteht.** Theilet das Oblongum in acht gleiche Theile, und verwandelt einen davon in einen regulären Triangel von gleichem quadratischen Inhalt: so habt ihr das Maaß für jeden der acht Triangel des Octaeders.

3) **Für das Dodekaeder, welches aus zwölf regulären Fünfecken besteht.** Theilet das Oblongum in zwölf gleiche Theile, und verwandelt einen davon in ein reguläres Fünfeck von gleichem quadratischen Inhalt: so kömmt das Maaß für die zwölf Pentagonalflächen des Dodekaeders.

4) **Für das Ikosaeder, welches aus zwanzig regulären Triangeln besteht.** Theilet das Oblongum in zwanzig gleiche Theile, und verwandelt einen davon in einen regulären Triangel von gleichem quadratischen Inhalt: so erscheinet das Maaß für die zwanzig Triangel des Ikosaeders.

§. 549.

Vorhergehende Operationen sind nun sehr leicht, wenn man die Regeln, eine Figur in die andere zu verwandeln, bey der Hand hat. Es ist aber in diesem Theile der Geometrie annoch eine große Lücke, indem entweder zu vielen Fällen keine Regel existiret, oder indem man, in Ansehung anderer, einen ermüdenden Umweg nehmen muß, (wodurch denn die Genauigkeit zum öftern verfehlet werden kann,) ehe man zu seinem Zwecke kömmt. Wir wollen bey unsern Versuchen hieselbst das **Dodekaeder** zum Grunde legen, und die zur Verwandlung desselben nöthigen Operationen sogleich mit beybringen.

Es wird aber 1) eines von den Fünfecken des Dodekaeders in einen Triangel von gleichem quadratiſchen Inhalt verwandelt.

2) Da das Dodekaeder aus 12 Fünfecken beſtehe, ſo werden 12 Triangel von der gefundnen Art dergeſtalt an einander geſetzet, daß ſie einen Rhombus formiren.

3) Dieſer Rhombus wird in ein Oblongum verwandelt, welches für das Tetraeder in 4 gleiche Theile getheilet wird; für das Hexaeder in 6; für das Octaeder in 8, und für das Ikoſaeder in 20.

Die zum Behuf dieſer Operationen nöthigen Aufgaben ſind:

α) Ein reguläres Fünfeck in einen Triangel zu verwandeln;

β) einen Rhombus in ein Oblongum zu verwandeln;

γ) ein Oblongum in ein reguläres Quadrat zu verwandeln;

δ) ein Quadrat in einen gleichſchenklichten, und

ε) einen gleichſchenklichten Triangel in einen gleichſeitigen zu verwandeln.

Die leztern Aufgaben werden erfordert, um die aus der Theilung des größern Oblongi entſtehenden kleinern Oblonga in die gehörigen Figuren umzuſchaffen.

§. 550.

Es ſey das Fünfeck ABCDE bey Fig. 11. Tab. XXI. eines der zwölf Fünfecke, woraus ein Dodekaeder verfertiget werden ſoll, und dieſem Dodekaeder ſollen die vier andern regulären Körper im quadratiſchen Inhalt gleich gemachet werden.

Erſte Operation.

Aufgabe.

Das Fünfeck ABCDE bey Fig. 11. Tab. XXI. in einen regulären Triangel von gleichem Inhalt zu verwandeln.

1) Ziehet aus der Spitze D nach der Baſi herunter die beyden Linien DA und DB.

2) Ver-

2) Verlängert die Basin AB auf beyden Seiten unbestimmt, und ziehet aus E in F, ingleichen aus C in G die Linien EF und CG, dergestalt, daß die Linie EF mit DA, und CG mit DB parallel laufft.

3) Hänget F mit D, und G mit D zusammen: so entstehet der gleichschenklichte Triangel FGD von gleichem Inhalt mit dem Fünfeck ABCDE.

Zweyte Operation.

Setzet, nach Anleitung der Fig. 12. Tab. XXI. zwölf gleichschenklichte Triangel von vorhergehender Größe zusammen: so entstehet der Rhombus ABCD.

Dritte Operation.

Den vorhergehenden Rhombus in ein Oblongum zu verwandeln. Fig. 13. Tab. XXI.

1) Theilet die Basin AE des gleichschenklichten Triangels AED in F in zwey gleiche Theile, und ziehet die Perpendikuläre FDH, so daß DH = FD.

2) Erhebet auf C die Perpendikuläre CG = DG, und ziehet G und H zusammen, so entstehet das Oblongum CGHD von gleichem Inhalt mit dem Rhombus ABCD.

Vierte Operation.

Den sechsten Theil CGIK des gefundnen Oblongi CGHD bey Fig. 13. Tab. XXI. in ein reguläres Quadrat von gleichem Inhalt zu verwandeln.

Der sechste Theil CGIK des Oblongi ist bey Fig. 14. Tab. XXI. versetzet und durch ABCD ausgedrücket worden. Solchen in ein Quadrat von gleichem Inhalt zu verwandeln, muß zwischen der Länge AB des Oblongi, und der Breite BC eine Mittelproportionale gesuchet werden, welche die Seite zu einem Quadrat gebe. Dieses geschicht auf folgende Art.

1) Verlängert mit der Breite AD die Länge CD bis in E.

2) Halbiret die Linie CE in F, und beſchreibet mit der Weite FC aus F den Halbzirkel CGE.

3) Verlängert die Linie AD bis an den Halbzirkel, ſo kömmt die Mittelproportionale DG, welche eine Seite des Quadrats DIHG zur Verfertigung des Cubus giebet.

Fünfte Operation.

Den achten Theil des gefundnen Oblongi in ein Quadrat; das Quadrat in einen gleichſchenklichten Triangel und den gleichſchenklichten in einen gleichſeitigen zu verwandeln, welcher die Gröſſe des Triangels für das Octaeder geben wird.

α) Die Verwandlung des achten Theils des Oblongi in ein Quadrat geſchicht nach vorhergehender Aufgabe, mit gehöriger Anwendung derſelben. Man ſehe Fig. 15. Tab. XXI, wo das Oblongum durch ABCD, und das Quadrat durch DIHG ausgedrücket iſt.

β) Vorhergehendes Quadrat DIHG in einen gleichſchenklichten Triangel zu verwandeln. Fig. 16. Tab. XXI. wo ABCD=DIHG, Fig. 15. 1) Traget die Gröſſe der Seite AB aus B in E, wodurch AB noch einmal ſo lang wird, als vorher. 2) Ziehet A mit C, und C mit E zuſammen: ſo ſtellet ſich der gleichſchenklichte Triangel ACE dar, von gleichem Inhalt mit dem Quadrat ABCD,

γ) Den gefundnen gleichſchenklichten Triangel ACE bey Fig. 16. in einen gleichſeitigen zu verwandeln. Fig. 17. Tab. XXI. 1) Beſchreibet mit der Baſi AE des gleichſchenklichten △ ACE von Fig. 16. den gleichſeitigen Triangel ABD bey Fig. 17. 2) Halbiret BD in E, und ziehet aus E mit ED den Bogen BFD. 3) Reiſſet zu AB durch C die Parallele HCG, welche die Linie BD in H durchſchneidet. 4) Erhöhet auf dem Durchſchnittspunkt H die Linie HF, winkelrecht mit DB. 5) Ziehet die Linie FB, welche die Baſin zu dem gleichſeitigen Triangel FBI, gleiches Inhalts mit dem gleichſchenklichten ACE, geben wird.

Sechſte

Sechste und siebente Operation.

Wenn mit dem vierten und hernach mit dem zwanzigsten Theil des bewußten Oblongi auf ähnliche Art, wie in der vorhergehenden Vten Operation, verfahren wird: so werden die regulären Triangel für das Tetraeder, und hernach für das Ikosaeder gefunden werden.

Artikel (B.)

Die fünf regulären Körper, durch Hülfe des Calculs, im Flächeninhalt einander gleich zu machen.

§. 551.

Dieses zu thun,

1) setzet eine Zahl für den Flächeninhalt der fünf Körper fest;
2) theilet den festgesetzten Inhalt mit der Flächenzahl jedes Körpers. Die Quotienten geben den Flächeninhalt jeder einzelnen Figur dieser Körper.
3) Berechnet aus dem Quotienten die Seitengröße jeder einzelnen Figur. Dieses zu verrichten,
   muß α) das Verhältniß zwischen dem Flächeninhalt der Figuren, und dem Quadrat ihrer Seite gesuchet werden;
   β) muß das gefundne Verhältniß mit dem, nach der zweyten Operation, gefundnen Quotienten, in die Regel detri gestellet, und die vierte Proportionalzahl gesuchet, und endlich
   γ) aus der gefundnen vierten Proportionale die Quadratwurzel gezogen werden.

§. 552.

Es sey die festgesetzte Zahl für den Flächeninhalt eines jeden der fünf Körper = 6000000. Wenn diese Zahl mit den Flächenzahlen der fünf regulären Körper, das ist, mit 4, 6, 8, 12 und 20, nach und nach getheilet wird: so bekömmt man für den Flächeninhalt α) eines gleichseitigen

Triangels des Tetraeders die Zahl 1500000; β) einer Quadratfläche des Hexaeders oder Cubus die Zahl 1000000; γ) eines gleichseitigen Triangels des Oktaeders die Zahl 750000; δ) eines regulären Fünfecks des Dodekaeders die Zahl 500000, und ε) eines gleichseitigen Triangels des Ikosaeders 300000.

§. 553.

Die erste und zweyte Operation ist vollzogen. Nun soll nach der dritten berechnet werden, wieviel jeder einzelnen Seite eines Triangels, Quadrats und Fünfecks von jenen gefundnen Quotienten, das ist, von der Zahl des ganzen Inhalts der Figur zukömmt. Wir haben zu diesem Ende das Verhältniß zwischen dem Flächeninhalt der Figuren und dem Quadrat ihrer Seiten zu suchen. Wie dieses gefunden werde, soll in der Folge (§. 555. folgg.) gezeiget werden, und wir wollen, um den Lauff der Operationen nicht zu unterbrechen, die Zahlen desselben als bereits berechnet sofort hieher setzen. Es sind selbige folgende:

	Flächeninhalt.		Quadrat der Seite
im Triangel	433013	:	1000000
im Quadrat	1000000	:	1000000
im Fünfeck	1720477	:	1000000

Diese Verhältnisse müssen nach §. 551. β) mit den aus der zweyten Operation gefundnen Quotienten, das ist, mit $\frac{1}{4}$ Flächeninhalt des Tetraeders = 1500000; mit $\frac{1}{6}$ Flächeninhalt des Cubus = 1000000; mit $\frac{1}{8}$ Flächeninhalt des Octaeders = 750000; mit $\frac{1}{12}$ Flächeninhalt des Dodekaeders = 500000, und endlich mit $\frac{1}{20}$ Flächeninhalt des Ikosaeders, = 300000 in die Regel de tri gestellet werden, und wenn alsdenn nach §. 551. γ) aus der gefundnen vierten Proportionale die Quadratwurzel gezogen wird: so giebet solche die Seitengröße jeder Figur, als:

433013 : 1000000 = 1500000 : 3464099 Tetr.
1000000 : 1000000 = 1000000 : 1000000 Hex.
433013 : 1000000 = 750000 : 1732049 Octaedr.
1720477 : 1000000 = 500000 : 290617 Dodek.
433013 : 1000000 = 300000 : 692819 Ikoſ.

Wenn nun $\sqrt{3464099} = 1861$
$\sqrt{1000000} = 1000$
$\sqrt{1732049} = 1316$
$\sqrt{290617} = 539$
$\sqrt{692819} = 832$

ſo ſind die Zahlen der Seitengrößen für die Gleichheit des Flächeninhalts der fünf regulären Körper, bey dem auf 6000000 Theile angenommnen gemeinſchaftlichen Flächeninhalt, wie folget:

im Tetraeder	1861
Hexaeder	1000
Octaeder	1316
Dodekaeder	539
Ikoſaeder	832

Erſter Anhang zum achten Abſchnitt.

Das Verhältniß des Flächeninhalts der regulären Figuren zu dem Quadrat ihrer Seiten zu finden.

§. 554.

Jede reguläre Figur kann in ſo viele gleiche Triangel zergliedert werden, als ſie Ecken hat. Auf ſolche Weiſe kann ein Fünfeck in 5, ein Sechseck in 6, und ein Siebeneck in 7 gleiche Triangel zergliedert werden, und da dieſe Triangel aus dem Center nach den Ecken gezogen werden, ſo werden ſie Centertriangel genennet. Dieſe Triangel ſind in jeder Figur gleichſchenklicht, außer im Sechseck, wo ſie alle regulär oder gleichſeitig ſind.

§. 555.

§. 555.

Da die Centertriangel der Figuren einander gleich ſind, ſo brauchet man nur den Inhalt eines einzigen ſolcher Triangel zu berechnen, und ihn mit der Eckzahl der Figur zu multipliciren, um den ganzen Inhalt der Figur zu bekommen. Es iſt alſo die Frage, wie der Inhalt eines Triangels berechnet wird, und dieſes kann auf dreyerley Art geſchehen, 1) entweder durch die Multiplication der Höhe mit der Grundlinie, und der Halbirung des Products; oder 2) durch die Multiplication der halben Höhe mit der ganzen Grundlinie, oder 3) durch die Multiplication der halben Grundlinie mit der ganzen Höhe. Setzet, die Grundlinie von irgend einem Triangel wäre $=6$ und die Höhe $=8$: ſo iſt $6 \times 8 = 48$, und $\frac{48}{2} = 24$; ingleichen iſt $\frac{8}{2} = 4$ und $4 \times 6 = 24$, und $\frac{6}{2} = 3$ und $3 \times 8 = 24$. (Es iſt gut, zur Vermeidung der hin und wieder vorkommenden Brüche, alle drey verſchiedne Methoden zu wiſſen, ob wir uns gleich allhier nur der lezten bey 3) bedienen werden.) Zur Erläuterung unſerer Operationen wollen wir das Fünfeck A bey Fig. 6. Tab. XXVI berechnen, und den Centertriangel BDE zum Grunde legen. Die halbe Grundlinie dieſes Triangels iſt die Linie BC, und ſeine Höhe die Perpendikuläre CE. Wenn wir nun der ganzen Grundlinie BD, als der Seite des Fünfecks die Zahl 1000 zueignen wollen: ſo iſt das Quadrat derſelben $=1000000$, und die halbe Grundlinie $BC = 500$.

§. 556.

Die Größe der halben Grundlinie BC des Triangels BDE iſt alſo bekannt. Wenn wir den Winkel B oder EBD unterſuchen, ſo findet es ſich, daß, da er juſt die Hälfte des Polygonwinkels FBD von 108° des Fünfecks A machet, er 54° enthält, und daß, wenn die Linie BC für den Sinus totus angenommen wird, die Perpendikuläre CE ſeine Tangente iſt. Wir haben alſo Data genug, um einen trigonometriſchen Calcul zu formiren, und ſelbiger wird ſeyn:

Wie

Wie der Sinus totus zur bekannten Linie BC von 500: ſo die Tangente des halben Polygonwinkels 54° zur unbekannten Linie CE.

Die für die Linie CE kommende Zahl giebet uns die Höhe. Dieſe mit der halben Grundlinie BC multipliciret, giebet den Inhalt des Centertriangels BDE, und dieſer Inhalt mit der Eckzahl, allhier 5, multipliciret giebet den ganzen Flächeninhalt des Fünfecks A. Hier iſt die ganze Ausarbeitung nach einander, in welcher wir aber der Bequemlichkeit wegen von den beyden erſten Gliedern zwey Nullen weglaſſen wollen, als:

Sin.tot. HalbeGrundl. Tangente54°
1000000ββ: 5ββ = 13763819

5

68819095 die Höhe CE des △BDE.
5ββ Halbe Grundlinie.

344095475 Inhalt des △BDE.
5 Eckzahl.

1720477375 gefundner Flächeninhalt des Fünfecks A.

Die quadrirte Seite eines regulären Fünfecks gegen den Inhalt deſſelben verhält ſich alſo nach dem vorhergehenden wie 1000000 : 1720477, indem die anhängenden Decimalen abgeſchnitten werden können, und auf ähnliche Art kann ein jedes reguläres Vieleck, deſſen quadrirte Seite bekannt iſt, oder gegeben worden, berechnet und das Verhältniß des Quadrats ſeiner Seite zu ſeinem Flächeninhalt gefunden werden.

§. 557.

Der Augenſchein giebt es, daß vermittelſt voriger Art von Rechnung dreyerley Facta nach einander entwickelt worden, als

1) die Perpendikuläre oder Höhe eines Centertriangels;
2) der Flächeninhalt eines Centertriangels und
3) der Flächeninhalt einer ganzen regulären Figur.

Wir wollen alſo, nach Anleitung dieſer Rechnungsart, dreyerley Proportionaltabellen zuſammen ſuchen, als

1) eine

1) eine für das Verhältniß des Quadrats der Seite einer regulären Figur gegen ihren Flächeninhalt; 2) eine andere für das Verhältniß des Quadrats der Seite einer regulären Figur gegen den Inhalt eines ihrer Centertriangel, und 3) eine dritte für das Verhältniß der Grundlinie eines Centertriangels gegen ſeine Perpendikuläre oder Höhe.

Anmerkung.

Da man oben im §. 487. bey Ausrechnung des Verhältniſſes zwiſchen dem Diameter eines Zirkels, und der Seite einer in dieſen Zirkel beſchriebnen regulären Figur, den halben Centerwinkelder Figuren gebrauchte: ſo gebrauchet man hier den halben Polygonwinkel, welcher bekanntermaßen gefunden wird, wenn der Centerwinkel von 180 abgezogen und der Reſt mit 2 getheilet wird. Z. E. den halben Polygonwinkel des regulären Fünfecks zu finden.

Eckzahl 5 — $\frac{360}{5}$ = 72 Centerwinkel.

180 — 72

2) 108 Polygonwinkel.

54 halber Polygonwintel.

Wie die den Winkeln anhängenden Secunden geſuchet werden, iſt in einem Anhang zum trigonometriſchen Calcul §. 154. gezeigt worden.

Erſte Proportionaltabelle §. 558.

über das Verhältniß der quadrirten Seite einer regulären Figur gegen den Flächeninhalt dieſer Figur.

Satz. Wenn das Quadrat der Seite einer regulären Figur = 10000,00 iſt: ſo iſt der Inhalt dieſer Figur, wie folget:

im 3 Eck:	4330,13	im 8 Eck:	48284,27
4 Eck:	10000,00	9 Eck:	61818,24
5 Eck:	17204,77	10 Eck:	76942,09
6 Eck:	25980,76	11 Eck:	93656,40
7 Eck:	36339,13	12 Eck:	111961,52

und ſo weiter.

Gebrauch der Tabelle.

(I.) Die Seite eines regulären Triangels iſt = 12, und folglich das □ der Seite = 144. Den Inhalt dieſes Triangels zu finden. Saget nach der Tabelle:

□ der Seite eines Triangels: Inhalt =
1000000: 433013 = 144 (aus 12 × 12): 62,353872
Der gefundne Inhalt.

(II.) Der Inhalt eines regulären Triangels iſt = 62,353872. Die Seite des Triangels zu finden. Saget nach der Tabelle:

Inhalt □ der Seite
433013: 1000000 = 62,353872: 144 Quadrat der Seite, und √144 = 12 die gefundne Seite.

Zweyte Proportionaltabelle §. 559.

über das Verhältniß der quadrirten Grundlinie eines Centertriangels gegen ſeinen Flächeninhalt.

Satz. Wenn die quadrirte Grundlinie des Centertriangels einer regulären Figur = 10000,00 iſt: ſo iſt der Flächeninhalt deſſelben, wie folget:

im 3 Eck:	1443,38	im 8 Eck:	6035,53
— 4 Eck:	2500,00	— 9 Eck:	6868,69
— 5 Eck:	3440,95	— 10 Eck:	7694,21
— 6 Eck:	4330,13	— 11 Eck:	8514,22
— 7 Eck:	5191,30	— 12 Eck:	9330,13

und ſo weiter.

Gebrauch der Tabelle

(I.) In einem Fünfeck iſt die Grundlinie eines ſeiner 5 Centertriangel = 20, und folglich das Quadrat derſelben = 400. Den Inhalt dieſes Centertriangels zu finden. Saget nach der Tabelle: 1000000

1000000: 344095 = 400 (Quadr. 20) : 137, 638 der gefundne Flächeninhalt.

(II.) Der Inhalt eines der 5 Centertriangels eines Fünfecks ist = 137, 638. Die Grundlinie dieses Triangels, die eine Seite des Fünfecks ist, zu finden. Saget nach der Tabelle:

344095 : 1000000 = 137,638 : 400 Quadrat der Grundlinie, und √400 = 20 die gefundne Grundlinie des Centers selbst.

Dritte Proportionaltabelle §. 560.

über das Verhältniß der Grundlinie eines Centertriangels gegen seine Höhe.

Satz. Wenn die Grundlinie eines regulären Vielecks = 1000,00, so ist die Höhe oder Perpendikuläre desselben, wie folgt:

im 3 Eck:	288,67	im 8 Eck:	1207,10
— 4 Eck:	500,00	— 9 Eck:	1373,74
— 5 Eck:	688,19	— 10 Eck:	1538,84
— 6 Eck:	866,03	— 11 Eck:	1702,84
— 7 Eck:	1038,26	— 12 Eck:	1866,02

und so weiter.

Gebrauch der Tabelle.

(I.) Ein reguläres Dreyeck wird in seine 3 Centertriangel zerfället, und die Grundlinie des Triangels ist = 12. Die Höhe eines der drey Centertriangel zu finden. Saget nach der Tabelle:

100000: 28867 = 12: 3,46404, also beynahe 3½. Die gefundne Höhe.

(II.) Die Höhe eines Centertriangels aus einem regulären Dreyeck ist 3,46404. Die Grundlinie des Centertriangels, und mithin

die

die Seite des regulären Dreyecks zu finden.
Saget nach der Tabelle:

28867: 100000 = 3,4641 : 12 die gesuchte Zahl.

Erste Anmerkung.

Das Verhältniß 10000: 86603 der Grundlinie des Centertriangels eines regulären Sechsecks gegen die Höhe dieses Triangels kann, weil der Centertriangel eines solchen Sechsecks ein reguläres Dreyeck ist, zur Ausmessung der Perpendikuläre eines jeden regulären Dreyecks gebrauchet, und deswegen vorzüglich angemerket werden. Z. E. es sey die Seite eines regulären Dreyecks = 12. Die Perpendikuläre dieses Dreyecks zu finden. Saget nach der Tabelle:

100000: 86603 = 12: 10,39236, also beynahe 10½. Gesuchte Perpendikuläre.

oder umgekehrt: Aus der Perpendikuläre 10,39236 die Seite eines regulären Triangels zu finden. Saget:
86603: 100000 = 10,39236: 12 die gesuchte Seite.

Zweyte Anmerkung.

Ich will bey dieser Gelegenheit zeigen, wie die Perpendikuläre aus der Seite eines regulären Triangels sonst auf andere Art gefunden wird, als:

Ziehet das □ der halben Seite von dem □ der ganzen ab, und ziehet aus dem Rest die Quadratwurzel. Z. E. wenn die Seite = 12, so ist

$12^2 = 144$
$6^2 = 36$
$108\ (00000000)$
$\sqrt{\ }$ 10,3923 Die gesuchte Perpendikuläre.

Zweyter Anhang zum 8ten Abschnitt.

Das Verhältniß des quadrirten Diameters eines Zirkels gegen den Inhalt einer in diesem Zirkel beschriebnen regulären Figur zu finden.

§. 561.

Es ist in dem ersten Abschnitt (dieses vierten Buchs) von den regulären Figuren, das Verhältniß des Diameters

eines Zirkels gegen die Seiten einer in diesen Zirkel beschriebenen regulären Figur berechnet worden. Wir werden die durch diese Berechnung gefundnen Zahlen bey der Auflösung gegenwärtigen Problems, zum Grunde legen, und uns übrigens eben der Methode, nach welcher im vorhergehenden ersten Anhang das Verhältniß des Inhalts einer regulären Figur zu dem Quadrat ihrer Seiten gefunden worden, bedienen. Hier ist ein Exempel vom Fünfeck. Wenn der Diameter eines Zirkels zu 10000000 angenommen wird, so ist die Seite eines regulären Fünfecks, wie oben gezeiget worden, in Sinuszahlen = 5877852. Diese Zahl halbirt, kömmt 2938926. Wenn solche nun mit dem Sinus totus und der Tangente des halben Polygonwinkels 54° des Fünfecks in die Regel detri gesetzet wird: so kömmt die Höhe des Centertriangels des Fünfecks. Wenn die Höhe mit der halben Seite multipliciret wird: so kömmt der Inhalt des Centertriangels, und wenn dieser Inhalt mit der Eckzahl, alhier 5, multipliciret wird: so ergiebet sich der ganze Inhalt des Fünfecks mit 5944104. Das Quadrat des Diameters eines Zirkels zu dem Inhalt eines in diesem Zirkel beschriebnen regulären Fünfecks verhält sich also, wie 10000000 : 5944104.

Anmerkung.

So wie in dem vorhergehenden ersten Anhang, aus der daselbst vorkommenden Verhältnißberechnung eine dreyfache Proportionaltabelle, als eine für den Inhalt der ganzen Figur; eine andere für den Inhalt eines ihrer Centertriangel, und eine dritte für die Höhe eines solchen Triangels, extrahiret worden: so kann solches auch allhier geschehen.

§. 562.

Wenn der Inhalt der Figuren auf vorhin beschriebne Art vom Drey- bis zum Zwölfeck gesuchet, und das Quadrat des Diameters zu 10000000 angenommen wird: so kömmt folgende

Pro-

Proportionaltabelle.

Satz: Wenn der quadrirte Diameter eines Zirkels ist = 1000,0000: so ist der Inhalt der Figuren, wie folget,

im 3 Eck:	3247,595	im 8 Eck:	7071,067
— 4 Eck:	5000,000	— 9 Eck:	7231,359
— 5 Eck:	5944,104	— 10 Eck:	7347,316
— 6 Eck:	6495,191	— 11 Eck:	7433,814
— 7 Eck:	6841,028	— 12 Eck:	7499,997

und so weiter.

Gebrauch der Tabelle.

(I.) Aus dem Quadrat des Diameters eines Zirkels den Inhalt eines in diesem Zirkel beschriebnen regulären Vielecks zu finden.

Z. E. Es sey der Diameter eines Zirkels = 30, dessen Quadrat = 900. In diesem Zirkel ist ein reguläres Dreyeck beschrieben. Den Inhalt des Dreyecks zu finden.

Saget nach der Tabelle:

□ Diam. Inhalt

10000000: 3247595 = 900 (aus 30 × 30): 292,28 gefundner Inhalt des Dreyecks.

(II.) Aus dem Inhalt eines regulären Vielecks den Diameter eines um selbigen geschriebnen Zirkels zu finden.

Z. E. es sey der Inhalt eines Vierecks = 625. Den Diameter zu dem Zirkel dieses Vierecks zu finden.

Saget nach der Tabelle:

Inhalt □ Diam.

5000000: 10000000 = 625: 1250 gefundnes Quadrat des Diameters, und $\sqrt{1250} = 35,3553 = 35,36$ der gefundne Diameter selbst.

Dritter Anhang zum 8ten Abschnitt.

Das Verhältniß der Seite einer regulären Figur gegen die Seite einer andern von gleichem Inhalt, aber verschiedner Anzahl von Ecken zu finden; oder eine Verwandlungstabelle der regulären Figuren zu berechnen.

§. 563.

Die Auflösung des vorhabenden Problems beruhet darauf, zu dem Verhältniß des Inhalts einer regulären Figur gegen das Quadrat ihrer Seite, und zu einer willkührlichen Zahl, welche für den gemeinschaftlichen Inhalt der zu vermandelnden regulären Figur angenommen wird, und welche allhier = 100000000000 seyn mag, die vierte Proportionale zu finden, und aus selbiger die Quadratwurzel zu ziehen. Wenn z. E. das Verhältniß des Inhalts eines Dreyecks gegen das Quadrat seiner Seite, vermöge der im ersten Anhang berechneten Tabelle, wie 433013: 1000000, und das Verhältniß eines Siebenecks, wie 3633913: 1000000: so wird der Calcul folgendergestalt geordnet:

Für das Dreyeck.

Inhalt	□ der Seite	Angenommner Inhalt	Gefundn. □ der Seite
433013:	1000000 =	100000000000:	230940482 01

$\sqrt{}$ 151967 Die gefundne Seite selbst.

Für das Siebeneck.

Inhalt	□ der Seite	Angenommner Inhalt	Gefundn. □ der Seite
3633913:	1000000 =	100000000000:	27518555 00

$\sqrt{}$ 52458 Die gefundne Seite selbst.

§. 564.

§. 564.

Um ſich das Geſchäft der Verwandlung einer Figur in die andere noch mehr zu erleichtern, können auch die Radien für die Zirkel dieſer Figuren geſuchet werden, und dieſes wird geſchehen, wenn man die, nach Anleitung vorhergehender Berechnung, gefundnen Seiten der Figuren mit den Verhältnißzahlen des Diameters eines Zirkels und der Seite einer in dieſem Zirkel beſchriebnen regulären Figur, (ſo wie ſolche in dem zehnten Artikel des erſten Abſchnitts dieſer Lehre von der Conſtruction der Körper, §. 484. in Sinuszahlen dargeleget werden,) auf folgende Art in die Regel de tri ſtellet, und den gefundnen Diameter halbiret. Z. E.

Für das Dreyeck.

Seite	Diamet.	Gefundne Seite	Gefundn. Diamet.
8660254:	10000000 =	151967:	2) 175476 / 87738 gefundner Radius.

Für das Siebeneck.

Seite	Diamet.	Gefundne Seite	Gefundn. Diam.
4338838:	10000000 =	52458:	2) 120904 / 60452 gefundner Radius.

§. 565.

Wenn nun, nach Anweiſung dieſer Vorſchrift, ſowohl die Seiten der regulären Figuren, als die zur Beſchreibung der Zirkel für dieſe Figuren, gehörigen Radien, berechnet werden: ſo kömmt folgende

Verwandlungstabelle
für die regulären Figuren.

Satz. Wenn der Inhalt einer Figur = 1000000,0, ſo ſind ihre Seiten und die Radien ihrer Zirkel, vom Drey- bis zum Zwölfeck, wie folget:

	Seite	Radius	(Diameter.)
im 3 Eck:	1519,7	877,4	1754,8
— 4 Eck:	1000,0	707,1	1414,2
— 5 Eck:	762,4	648,5	1297,0
— 6 Eck:	620,4	620,4	1240,8
— 7 Eck:	524,6	604,5	1209,0
— 8 Eck:	455,1	594,6	1189,2
— 9 Eck:	402,2	588,0	1176,0
— 10 Eck:	360,5	583,3	1166,6
— 11 Eck:	326,8	588,0	1160,0
— 12 Eck:	298,9	577,3	1154,7

Gebrauch der Tabelle.

(I.) Es wird ein reguläres Viereck gegeben, deſſen Seite = 50. Den Radius eines Zirkels für ein reguläres Sechseck von gleichem Inhalt zu finden. Saget nach der Tabelle: §. 566.

Wie die Seite 10000 eines Vierecks zu dem Radius 6204 eines Zirkels zu einem Sechseck von gleichem Inhalt: ſo die gegebne Seite 50 eines Vierecks zu dem kommenden Radius für einen Zirkel zum Sechseck von gleichem Inhalt, als:

10000: 6204 = 50: 31,02 = $31\frac{2}{100}$ die gefundne Zahl für den Radius.

(II.) Die Seite eines regulären Triangels iſt = 20. Die Seite eines regulären Quadrats, von gleichem Inhalt mit dem Triangel, zu finden. Saget nach der Tabelle: §. 567.

Wie die Seite 15197 eines Triangels zur Seite 10000 eines Quadrats von gleichem Inhalt: ſo die gegebne Seite 20 eines Triangels zur kommenden Seite eines Quadrats von gleichem Inhalt, als:

15197: 10000 = 20: 13,16. Die gefundne Zahl für die Seite des Quadrats.

Anmer-

Anmerkung.

Man wird aus dem Gebrauch vorhergehender Tabelle ſehen, daß ſolche bey der Lehre von der Verwandlung regulärer Figuren mit Nutzen gebrauchet werden kann, indem alle dahin gehörigen Aufgaben, für welche keine geometriſche Auflöſung vorhanden iſt, durch ſelbige arithmetiſch aufgelöſet werden können.

Neunter Abſchnitt.

Die dreyzehn eckigtſphäriſchen Körper der dritten Claſſe im Flächeninhalt einander gleich zu machen.

§. 568.

Es iſt im erſten Anhange des achten Abſchnitts, §. 558. eine Tabelle über das Verhältniß der quadrirten Seite einer regulären Figur gegen den Flächeninhalt dieſer Figur dargeleget worden. Wir werden uns, zur Auflöſung der hieher gehörigen Aufgaben, dieſer Tabelle bedienen, und die Operationen der Auflöſung beſtehen darinnen,

1) daß wir mit der Anzahl jeder Figuren von einerley Art den in der Tabelle befindlichen Flächeninhalt ſolcher Figuren multipliciren, und die verſchiednen Producte ſummiren;

2) daß wir ſchlieſſen: wie die Summe dieſer Producte zu dem in der Tabelle befindlichen Quadrat der Seite: ſo die für den Flächeninhalt der Körper angenommne Zahl zu der kommenden vierten Proportionale, welche das Quadrat der Seiten geben wird; und endlich

3) daß wir aus dieſem Quadrate die Quadratwurzel ziehen, wodurch wir die Seiten der Körper erhalten werden.

§. 169.

Ich gebe ein Exempel. Es sey das aus vier Triangeln und vier Sechsecken bestehende gebrochne Tetraeder. Der Inhalt eines regulären Triangels ist, in der angeführten Tabelle, mit verkürzten Zahlen = 4330, und eines Hexagons = 25980, in sofern die Seite zu 100 angenommen wird, und das Quadrat der Seite also 10000 ist. Also nach der ersten Operation:

Inhalt des Triangels 4330 | 25980 Inhalt des Sechsecks
Anzahl der Triangel 4 | 4 Anzahl der Sechseck

17320 | 103920

+ 17320

121240 Summe der Producte.

Wenn wir nun für den gemeinschaftlichen Flächeninhalt unserer gegenwärtigen Körper, die Zahl 6000000 annehmen, so wie solches in Ansehung der fünf regulären Körper geschehen: so heisset es itzo nach der 2ten und 3ten Operation:

Summe der Producte.	Quadrat der Seiten.	Die angenommene Flächenzahl.	Die 4te Proportionale.
121240 :	10000,00 =	6000000 :	494886,17

und die Quadratwurzel aus der vierten Proportionale wird seyn 703,4.

Die gefundne Seite für obiges gebrochne Tetraeder, dessen Flächeninhalt auf 6000000 festgesetzet worden, ist also 703,4. Wenn man alle 13 Körper der dritten Classe auf ähnliche Art berechnet, so wird die Seitengröße derselben seyn, wie folget:

1) Im gebrochnen Tetraeder aus 4 △ und 4 Hexagonen — — 703,4
2) Im gebrochnen Hexaeder aus 6 Achtecken und 8 △ = — — 430,1
3) Im gebrochnen Hexaeder aus 6 □ und 8 △ 796,2
4) Im gebrochnen Oktaeder aus 6 □ und 8 Sechsecken — — 473,3

5) Im

5) Im archimediſchen Körper	—	529
6) Im gebrochnen Dodekaeder aus 20 △ und 12 Zehnecken	—	243,7
7) Im Ikoſi-Dodekaeder	—	452,3
8) Im gebrochnen Ikoſaeder aus 12 Fünfecken und 20 Sechsecken	—	289,8
9) Im gebrochnen Afterhexaeder	—	550
10) Im gebrochnen Afterdodekaeder	—	329,4
11) Im gebrochnen Hexaedro-Oktaeder	—	311,7
12) Im Rhombi-Ikoſidodekaeder	—	318,1
13) Im gebrochnen Ikoſi-Dodekaeder	—	185,5

Zehnter Abſchnitt.

Die fünf regulären Körper in der Höhe aus der Mitte der Flächen einander gleich zu machen.

§. 570.

Die Gleichheit der Höhe der fünf regulären Körper aus der Mitte ihrer Flächen beſtehet darinnen, daß ſie auf eine ihrer Flächen zwiſchen zwey parallelliegenden Flächen geſtellet werden können. Wenn bey Verfertigung dieſer Körper, zumal aus dicker Pappe, einer von dem andern in Anſehung der Höhe, die überall gleich ſeyn ſoll, um etwas differiret: ſo rühret dieſe Ungleichheit von der Zuſammenfügung der Flächen, und von der Materie her, woraus ſolche fabriciret worden, nach deren Beſchaffenheit die Differenz allezeit etwas mehr oder weniger betragen wird. Den evidenteſten Beweis davon hat man an einem Cubus, der allezeit um etliche Linien höher ſeyn wird, als eine ſeiner Flächen, und wegen der ungleichen Zuſammenfügung derſelben auf einer Seite höher ſeyn wird, als auf einer andern. Wenn man die Körper in Abſicht auf die hier verlangte Höhe ganz genau haben wollte, ſo müßten ſolche entweder von der

Kugel abgeschnitten werden; oder man müßte, wenn man sie aus einzelnen Stücken zusammensetzet, den einzufugenden Flächen soviel von ihrer Größe abnehmen, als die Dicke der Materie zu den Körpern beträget, welches aber bey einigen Körpern die Zusammensetzung etwas schwer machen würde.

§. 571.

Wir wollen zuvörderst das Verhältniß der Höhe gegen die Seiten der Körper an sich untersuchen, ehe wir für die Höhe eine gewisse Zahl festsetzen, und dieses geschicht auf dem Papier, am bequemsten auf folgende Art.

(I.) Es sey der Triangel ABC einer der vier regulären Triangulärflächen eines Tetraeders. Die Höhe des Tetraeders zu finden. Tab. XXII. Fig. 1. §. 572.

1) Theilet AB durch D in zwey gleiche Theile, und ziehet die Perpendikuläre CD. Theilet eben so BC in E und ziehet die Perpendikuläre EA. Der Punkt F, wo die beyden Linien einander durchschneiden, ist das Center des Triangels. 2) Es sey die Linie FC die Basis eines rechtwinklichten Triangels. Ziehet aus dem Center F, winkelrecht mit FC, eine unbestimmte Linie FG, und zerschneidet solche mit der Seite CB des Tetraeders aus C in G.

Der Proceß bringet einen rechtwinklichten Triangel CFG, dessen Cathetus FG die Höhe des Tetraeders giebt. Wie sich nun FG zu AB verhält: so verhält sich die Höhe des Tetraeders zu einer Seite desselben, und dieses Verhältniß ist, wenn die Linien auf dem Maaßstabe gemessen werden, wie 49 : 60.

Anmerkung.

Im XIIIten Buche, 13 Propos. der euklidischen Geometrie, wo die Einschreibung des Tetraeders in eine Sphäre gelehret wird, kömmt der Satz vor: daß der quadrirte Diameter einer Kugel sich gegen die quadrirte Seite eines in der Sphäre beschriebnen Tetraeders verhält, wie 2 : 3. Nach Anleitung dieses Verhältnisses kann die Höhe des Tetraeders, (welche

(welche Höhe im Tetraeder mit dem Diameter einerley iſt,) auch auf folgende Art arithmetiſch gefunden werden:

Wenn die quadrirte Seite des Tetraeders mit 3 getheilet, das Product mit 2 multiplicirt, und aus dem gefundenen Quotienten die Quadratwurzel gezogen wird.

Z. E. Wenn die Seite = 60, ſo iſt

$$60^2 = \frac{3600}{3} = \frac{1200}{2} = \sqrt{\frac{2400}{49}}$$ die gefundne Zahl der Höhe.

(II.) Es ſey der Triangel IKL eine der acht regulären Triangulärflächen eines Oktaeders. Die Höhe des Oktaeders zu finden.

Tab. XXII. Fig. 2. §. 573.

Hänget an die Grundlinie KL das reguläre Quadrat KLMN, und ziehet in ſelbigem die beyden Diagonalen KM und LN. Eine halbe Diagonale, z. E. KO iſt der Semidiameter des Oktaeders, oder die Höhe einer der beyden viereckigten Pyramiden, in welche dieſer Körper aufgelöſet werden kann. 2) Suchet das Center X des Triangels IKL durch die beyden Perpendikulären PK und IQ. 3) Ziehet durch das Center X des Triangels eine unbeſtimmte Linie RS, parallel mit der Grundlinie KL, und zerſchneidet ſolche mit der halben Diagonale KO des Quadrats, aus der Spitze I des Triangels, auf beyden Seiten in T und U.

Der Proceß bringet zwey zuſammengeſetzte rechtwinklichte Triangel TIX und IXU, deren Catheten TU die Höhe des Oktaeders geben. Das Verhältniß dieſer Höhe TU gegen die Seite KL des Oktaeders wird ſeyn wie 145 : 176.

(III.) Es ſey das Fünfeck ABCDE eines der fünf regulären Fünfecke eines Dodekaeders. Die Höhe des Dodekaeders zu finden.

Tab. XXII. Fig. 3. §. 574.

Halbiret ein Fünftheil von dem Zirkel, in welchem das Fünfeck ABCDE beſchrieben worden, z. E. EA in F, und reiſſet

treffet aus dem Punkt F ein zweytes Fünfeck FGHIK, welches mit ſeinen Ecken auf die Mitte der Seiten des erſten trift. 2) Ziehet aus der Spitze I durch das Center N, nach der Spitze A die Linie INA. 3) Beſchreibet bey Fig. 4. Tab. XXII. eine abgeſonderte Linie PQ; mit der Höhe LA eines der beyden Fünfecke. 4) Verlängert die Linie PQ, aus Q in R, mit dem Radius NA der Fünfecke. 5) Ziehet aus dem Center N die lange Linie NX, winkelrecht gegen NA, und beſtimmet ſolche durch die abgeſonderte ganze Linie PR, aus A in O.

Der Proceß bringet einen rechtwinklichten Triangel NOA, deſſen Cathetus NO die Höhe des Dodekaeders giebet. Das Verhältniß dieſer Höhe NO gegen die Seite DC des Dodekaeders wird ſeyn wie 197:88.

(IV.) Es ſey der Triangel ABC einer der zwanzig regulären Triangel eines Ikoſaeders. Die Höhe des Ikoſaeders zu finden. Tab. XXII. Fig. 5. §. 575.

1) Halbiret ein Drittheil von dem Zirkel, in welchem der Triangel ABC beſchrieben worden, z. E. AC in D, und beſchreibet aus dem Punkt D einen zweyten Triangel DEF, welcher mit ſeinen Ecken auf die Mitte der Seiten des erſten trift. 2) Ziehet aus der Spitze B, durch das Center N, die Linie BNG, und aus G die Linie GF. 3) Beſchreibet eine abgeſonderte Linie LM bey Fig. 6. Tab. XXII, mit der Höhe AH eines der beyden Triangel. 4) Verlängert die Linie LM durch die Linie GF, (welche aus der halbirten Seite eines Triangels nach der Spitze des andern gezogen worden,) aus L in K. 5) Ziehet aus dem Center N die lange Linie NI, winkelrecht mit NA, und ſchneidet ſie ab durch die abgeſonderte ganze Linie KM, indem ihr ſolche aus A in I traget.

Der Proceß bringet einen rechtwinklichten Triangel NIA, deſſen Cathetus NI die Höhe des Ikoſaeders giebet. Das Verhältniß dieſer Höhe NI gegen die Seite BC des Ikoſaeders wird ſeyn wie 38:25.

§ 576.

§. 576.

Wenn wir nun die Höhe eines jeden regulären Körpers = 1000 annehmen, und die gefundnen Verhältniße darauf anwenden, ſo kann dieſer Calcul mit Hülfe der Regel de tri vollzogen werden, und die Höhe und Seite jeden Körpers werden ſeyn, wie folget:

	Höhe.	Seite.	Höhe.	Seite.
im Tetraeder	49 :	60 =	1000 :	1225
im Oktaeder	145 :	176 =	1000 :	1214
im Dodekaeder	197 :	88 =	1000 :	446
im Ikoſaeder	38 :	25 =	1000 :	658
und im Hexaeder	1 :	1 =	1000 :	1000, indem

wegen ſeiner Conſtruction, Höhe und Seite einander gleich ſind.

Will man die Zahlen der Höhe und der Seiten nicht in der vorigen Größe haben, ſo nehme man 100 anſtatt 1000 zur Höhe, und rechne:

49 : 60 = 100 . . .
145 : 176 = 100 . . .
197 : 88 = 100 . . .
38 : 25 = 100 . . .
1 : 1 = 100 . . .

§. 577.

Wir wollen die vorhin gefundnen Seiten durch einen trigonometriſchen Calcul zu prüfen ſuchen.

(A) Tetraeder.

Aus der Hypotenuſe G C = 60, und dem ihr anliegenden Winkel G C F 55°, die Grundlinie G F zu finden. Tab. XXII. Fig. 1. Saget:

Sinus 90° : Hypoten. G C 60 = Sin. Wink. 55°
Logar. 10,0000000 — 1,7781512 = 9,9133645
1,7781512
11,6915157
10,0000000
1,6915157. Va-

lor 49 Größe der Grundlinie G F.

(B) Okta-

(B) Oktaeder.

Aus der Hypotenuse TI = 124 und dem ihr anliegenden Winkel TIX 35°, 50′ die Grundlinie TX zu finden. Tab. XXII. Fig. 2. Saget: §. 578.

Sin. 90° Hypot. TI 124 Sin. Wink. 35°, 50′

Log. 10,0000000 — 2,0934217 = 9,7674746

2,0934217

11,8608963

10,0000000

1,8608963 *Valor*

72½ beynahe.

Wenn nun 72½ verdoppelt wird: so kömmt 145 für die Höhe des Oktaeders.

(C) Dodekaeder.

Aus der Hypotenuse AO = 211 und dem ihr anliegenden Winkel O 20°, 55′ die Grundlinie NO zu finden. Tab. XXII. Fig. 3. Saget: §. 579.

Sin. 90° Hypot. AO 211 Sin. Wink. 69°, 5′

Log. 10,0000000 — 2,3242193 = 9,9703937

2,3242824

12,2946761

10,0000000

2,2946761 *Valor*

197. Größe der Grundlinie NO.

(D) Ikosaeder.

Aus der Hypotenuse AI = 41 und dem ihr anhängenden Winkel I 20°, 55′ die Grundlinie NI zu finden. Tab. XXII. Fig. 5. Saget: §. 580.

Sin. 90°

Sin. 90°	Hypot. Al 41	Sin. Wink. 69°,5′
Log. 10,0000000	1,6127839	9,9703937
		1,6127839
		11,5831776
		10,0000000
		1,5831776 *Valor* 38.

Größe der Grundlinie NL.

Eilfter Abschnitt.

Die fünf regulären Körper in der Höhe aus den Ecken gleich zu machen.

§. 581.

Die fünf regulären Körper werden in der Höhe aus den Ecken einander gleich seyn, wenn ihr Diameter gleich ist. Weil aber nur vier Körper, als das Hexaeder, Octaeder, Dodekaeder und Ikosaeder gegen einander über stehende Ecken haben, und das Tetraeder mit den Ecken auf die Mitte der Flächen stosset: so kann dieser Gleichheitsfall auch nur an den vier gedachten Körpern im eigentlichen Verstande executiret werden; und man muß beym Tetraeder, unter einer seiner Flächen, in der Mitte einen Fuß anbringen, um dadurch den Diameter zu ergänzen. Wir wollen, um desto genauer zu rechnen, die Zahl 100000 zum Diameter annehmen, und das Verhältniß der Seitengrößen der Körper dazu wird auf folgende Art gefunden.

(I.) Die Seite des Tetraeders zu finden. §. 582.

1) Quadriret den Diameter 100000; kömmt 10000000000. 2) Theilet das Quadrat mit 3, und duplirt den Quotienten; kömmt $6666666666\frac{2}{3}$. 3) Ziehet aus dem Product die Quadratwurzel 81649, welche die Seite des Tetraeders geben wird.

Anmer-

Anmerkung.

In den Wolfiſchen Elem. Anal. Cap. III. wird, nach dem Hertgonius, die Seitengröſſe des Tetraeders, ſtatt 81649 zu 81149 angegeben, welches ohne Zweifel ein unbemerkter Druckfehler iſt.

(II.) Die Seite des Cubus zu finden. §. 583.

Suchet die Mittelproportionale zwiſchen der Seite 81649 des Tetraeders und deren Hälfte 40825; kömmt 57735, welches die Seite des Cubus ſeyn wird.

Oder, quadriret den Diameter 100000; kömmt 10000000000; theilet das Quadrat mit 3, kömmt $3333333333\frac{1}{3}$, und ziehet aus dem Quotienten die Quadratwurzel 57735 für die Seite des Cubus.

(III.) Die Seite des Octaeders zu finden. §. 584.

Theilet das Quadrat des Diameters = 10000000000 mit 2; kömmt 5000000000, und ziehet daraus die Quadratwurzel; kömmt 70710 für die Seite des Octaeders.

Oder, 1) quadriret die Seite 57735 des Cubus, kömmt 3333330225; quadriret auch die halbirte Seite des Tetraeders, das iſt 40824, kömmt 1666598976. 2) Addiret die beyden Quadrate, und extrahiret die Quadratwurzel 70710 für die Seite des Octaeders.

(IV.) Die Seite des Dodekaeders zu finden. §. 585.

1) Multipliciret das Quadrat des Diameters = 10000000000 mit 5; theilet das Product mit 3; extrahiret die Quadratwurzel aus dem Quotienten; halbiret die Quadratwurzel und behaltet die gefundne Zahl. 2) Theilet das Quadrat des Diameters = 10000000000 durch 3, und ziehet aus dem Quotienten die Quadratwurzel. Halbiret die Quadratwurzel, und behaltet die gefundne Zahl. 3) Ziehet die gefundne Zahl der zweyten Operation von der gefundnen Zahl der erſten ab. Der Reſt giebet mit 35682 die Seite des Dodekaeders. Hier iſt die Berechnung.

Erſte

Erſte Operation.

Log. 5, 0000000 Valor 100000.

2

10, 0000000 Quadrat. Diam. in Logar.
0, 6989700 Valor 5.
10, 6989700
0, 4771213 Valor 3.
2) 10, 2258487
5, 1129243 Valor 129100
2) 64550 Die halbirte Quadratwurzel.

Zweyte Operation.

Log. 10, 0000000 Quadr. Diam. in Logar.
0, 4771213 Valor 3
2) 9, 5228787
4, 7614393 Quadratwurzel in Logar.
0, 3010300 wird halbiret durch 2.
4, 4604093 Valor 28868. Die halbirte Quadratwurzel der 2ten Operation.

Dritte Operation.

64550
—28868
35682 Gefundne Zahl für die Seite des Dodekaeders.

(V.) Die Seite des Ikoſaeders zu finden. §. 586.

1) Theilet das Quadrat des Diameters = 10000000000 mit 5, und extrahiret die Quadratwurzel; iſt 44721. 2) Multipliciret die Quadratwurzel mit dem halben Diametre 50000; kömmt zum Product 2236050000. 3) Ziehet das Product 2236050000 von dem halben Quadrat des Diameters = 5000000000 ab, und ziehet aus dem Reſt die Quadratwurzel 52573, welche die Seite des Ikoſaeders geben wird.

Die für die Seiten der fünf regulären Körper gefundnen Zahlen ſind alſo, für einen Diameter von 1000,00, wie folget:

im Tetraeder:	816,49	im Dodekaeder:	356,82
im Hexaeder oder Cubus	577,35	im Ikoſaeder:	525,73
im Octaeder:	707,10		

Dieſe Zahlen können auf folgende Art verkürzt, als Proportionalzahlen gebrauchet werden, z. E.

(I.) Das Verhältniß der Seite eines Cubus zu einem Diameter von 15 zu finden. Saget nach der Tabelle. §. 587.

Diam. Cub. Diam. Cub.
1000: 577 = 15: 8,655 beynahe 9. Die gefundne Zahl der Seite eines Cubus.

(II.) Das Verhältniß des Diameters zu einem Cubus zu finden, deſſen Seite = 9. Saget nach der Tabelle: §. 588.

Cub. Diam. Cub. Diam.
577: 1000 = 9: 15 Die gefundne Zahl des Diameters.

Zwölfter Abſchnitt.

Die fünf regulären Körper in dem cubiſchen Inhalt einander gleich zu machen, und eine Kugel von gleichem cubiſchen Inhalt zu berechnen.

§. 589.

Wir wollen die für die Seite eines Cubus angenommne Zahl 1000 beybehalten.

(I.) Die

(I.) Die Seite des Tetraeders zu finden. §. 590.

1) Suchet die Mittelproportionale zwiſchen der gegebnen Seite 1000 des Cubus, und deren Dupło 2000; kömmt 1414.

2) Suchet zwiſchen der gefundnen Mittelproportionale 1414 und deren Triplo 4242 zwey Mittelproportionale. Die erſte derſelben wird mit 2040 die verlangte Seite des Tetraeders geben.

Anmerkung.

Die Mittelproportionale zwiſchen 1000 und 2000 wird gefunden, wenn die beyden Zahlen unter einander multipliciret werden, und aus dem Product die Quadratwurzel gezogen wird. — Um zwiſchen 1414 und 4242 die erſte der begehrten zwey Mittelproportionalen zu finden, quadriret die erſte Zahl 1414; multipliciret ſelbige mit 4242, und ziehet aus dem Produkt die Cubikwurzel 2040. (§. 80.)

(II.) Die Seite des Oktaeders zu finden. §. 591.

1) Quadriret die halbe Seite 1020 des Tetraeders, kömmt 1040400. 2) Multipliciret das Quadrat 1040400 mit der ganzen Seite des Tetraeders 2040, kömmt 2122416000. 3) Ziehet aus dem Product die Cubikwurzel, welche mit 1285 die Seite des Oktaeders geben wird.

(III.) Die Seite des Ikoſaeders zu finden. §. 592.

1) Suchet zwiſchen der halben Seite des Cubus = 500, und der halben Seite des Tetraeders = 1020, die Mittelproportionale; kömmt 714.

2) Suchet zwiſchen der halben Seite des Tetraeders = 1020, und zwiſchen der halben Seite des Oktaeders = 643 die Mittelproportionale; kömmt 810.

3) Aequiret die Produkte der beyden vorigen Operationen, 714 und 810; kömmt 762 für das erſte Factum.

Die Produkte werden äquiret, wenn 714 zu 810 addiret, und das Collect 1524 halbiret wird.

4) Quadriret die halbe Seite des Oktaeders = 643; kömmt 413449. Multipliciret das Quadrat mit

der halben Seite des Tetraeders = 1020; kömmt 421717980, und ziehet daraus die Cubikwurzel; iſt 750.

5) Acquiret das vorige Produkt = 750, und das Produkt der zweyten Operation = 810; kömmt 780 für das zweyte Factum.

6) Acquiret das erſte und zweyte Factum, das iſt 762 und 780; kömmt 771 für die verlangte Seite des Ikoſaeders.

§. 593.

(IV.) Die Seite des Dodekaeders zu finden.

Aus der im §. 486. Seite 455. beygebrachten Verhältnißtabelle zwiſchen den Sinuszahlen und den Seiten der regulären Eckfiguren, haben wir geſehen, daß, wenn der Radius eines Zirkels zu 1000 angenommen wird, die Seite eines in dieſen Zirkel geſchriebnen regulären Triangels, 1732 und die Seite eines regulären Fünfecks 1176 beträget. Der Centerwinkel eines Fünfecks iſt 72, deſſen Sinus 951 und das Duplum ſeines Sinus 1902. Nach dieſen vorausgeſetzten Zahlen wird die Seite des Dodekaeders aus der Seite des Ikoſaeders, welche = 77, auf folgende Art gefunden.

1) Saget:

(a) 1732 : 771 = 1176 : 523. Erſtes Factum. Das heißt, wie ſich die Seite eines regulären Triangels 1732 zur Seite 771 des Ikoſaeders verhält: ſo verhält ſich die Seite des Fünfecks 1176 zu 523.

Ferner,

(b) 1732 : 771 = 1902 : 846. Zweytes Factum.

und endlich

(c) 846 : 771 = 523 : 476. drittes Factum.

2) Suchet zwiſchen dem erſten und dritten Facto, d. i. zwiſchen 523 und 476 zwey Mittelproportionale, deren erſtes mit 506 die Seite des Dodekaeders geben wird.

(V.) Den Diameter einer Kugel von gleichem cubiſchen Inhalt mit den vorhergehenden fünf Körpern zu finden. §. 594.

1) Nehmet das archimediſche Verhältniß eines Zirkels zu dem Quadrat ſeines Diameters, und ſaget:

11 : 14 = 1000000 : 1272727.

D. i. wie ſich 11 gegen 14 verhält: ſo verhält ſich das Quadrat 1000000 der angenommnen Seite 1000 des Cubus zu der kommenden vierten Proportionale 1272727.

2) Ziehet aus dem Facto 1272727 die Quadratwurzel 1128, und ſuchet zwiſchen derſelben und ihrem Triplo 3384 die Mittelproportionale 1954.

3) Setzet ein Viertheil von 1954, das iſt 488; ingleichen die ſupponirte Seite des Cubus = 1000, und hernach die Hälfte von 1954, das iſt 977, in die Regel de tri, und ſaget:

488 : 10000 = 977 : 2000.

4) Suchet zwiſchen 977 und 2000, zwey Mittelproportionale, deren erſte mit 1240 der verlangte Diameter der Kugel ſeyn wird.

§. 595.

Die gefundnen Zahlen für die Seiten der fünf regulären Körper, von welchen die Seite 1000 für den Cubus ſupponiret worden, nebſt dem Diameter einer Kugel von gleichem körperlichen Inhalt, ſind alſo

für das Tetraeder	= 2040	für das Dodekaeder	= 506
für den Cubus	= 1000	für das Ikoſaeder	= 771
für das Oktaeder	= 1285	für den Diameter der Kugel	= 1240

Wenn man die Seiten der Körper in andern Zahlen haben, und z. E. die Verhältniſſe ihrer Gleichheit dergeſtalt berechnen will, daß, wie dort für den Cubus 1000 Theile angenommen wurden, alſo nunmehro für jeden andern dieſer

Körper die Zahl 1000 angenommen werde: ſo bedienet man ſich zu dieſer Abſicht der Regel de tri, und verfähret, wie folget.

(I.) Es ſey die Seite des Tetraeders = 1000. Das Verhältniß der Seiten der andern regulären Körper zu finden. Saget: §. 596.

α)	Tetraëdr.		Cub.		Tetraëdr.		Cub.
	2040	:	1000	=	1000	:	490.
β)	Cub.		Octaëdr.		Cub.		Octaëdr.
	1000	:	1285	=	490	:	630.
γ)	Cub.		Dodekaëdr.		Cub.		Dodekaëdr.
	1000	:	506	=	490	:	248.
δ)	Cub.		Ikoſaëdr.		Cub.		Ikoſaëdr.
	1000	:	771	=	490	:	378.
ε)	Cub.		Diametr.		Cub.		Diametr.
	1000	:	1240	=	490	:	608.

(II.) Es ſey die Seite des Oktaeders = 1000. Das Verhältniß der Seiten der andern regulären Körper zu finden. §. 597.

α)	Octaëdr.		Cub.		Octaëdr.		Cub.
	1285	:	1000	=	1000	:	778.
β)	Cub.		Tetraëdr.		Cub.		Tetraëdr.
	1000	:	2040	=	778	:	1587.
γ)	Cub.		Dodekaëdr.		Cub.		Dodekaëdr.
	1000	:	506	=	778	:	394.
δ)	Cub.		Ikoſaëdr.		Cub.		Ikoſaëdr.
	1000	:	771	=	778	:	600.
ε)	Cub.		Diam.		Cub.		Diam.
	1000	:	1240	=	778	:	965.

(III.) Es ſey die Seite des Dodekaeders = 1000. Das Verhältniß der Seiten der andern regulären Körper zu finden. §. 598.

α)	Dodek.		Cub.		Dodek.		Cub.
	506	:	1000	=	1000	:	1976.
β)	Cub.		Tetraëdr.		Cub.		Tetraëdr.
	1000	:	2040	=	1976	:	4031.

γ) Cub.

γ) Cub. Octaëdr. Cub. Octaëdr.
1000 : 1285 = 1976 : 2539.
δ) Cub. Ikoſaëdr. Cub. Ikoſaëdr.
1000 : 771 = 1976 : 1524.
ε) Cub. Diam. Cub. Diam.
1000 : 1240 = 1976 : 2450.

(IV.) Es ſey die Seite des Ikoſaeders = 1000. Das Verhältniß der Seiten der andern regulären Körper zu finden. §. 599.

α) Ikoſaëdr. Cub. Ikoſaëdr. Cub.
771 : 1000 = 1000 : 1297.
β) Cub. Tetraëdr. Cub. Tetraëdr.
1000 : 2040 = 1297 : 2646.
γ) Cub. Octaëdr. Cub. Octaëdr.
1000 : 1285 = 1297 : 1667.
δ) Cub. Dodekaëdr. Cub. Dodekaëdr.
1000 : 506 = 1297 : 656.
ε) Cub. Diam. Cub. Diam.
1000 : 1240 = 1297 : 1608.

(V.) Es ſey der Diameter einer Kugel = 1000. Die Seitengrößen der fünf regulären Körper von gleichem cubiſchen Inhalt zu finden. §. 600.

α) Diam. Cub. Diam. Cub.
1240 : 1000 = 1000 : 807.
β) Cub. Tetraëdr. Cub. Tetraëdr.
1000 : 2040 = 807 : 1646.
γ) Cub. Octaëdr. Cub. Octaëdr.
1000 : 1285 = 807 : 1037.
δ) Cub. Dodekaëdr. Cub. Dodekaëdr.
1000 : 506 = 807 : 408.
ε) Cub. Ikoſaëdr. Cub. Ikoſaëdr.
1000 : 771 = 807 : 622.

§. 601.

Wenn man die durch vorhergehende Berechnungen gefundne Zahlen der Seiten und des Diameters, in einer Ta-

belle beyeinander haben will, so kann solche am bequemsten auf folgende Art construiret werden.

	Tetraed.	Hexaedr.	Octaedr.	Dodekaedr.	Ikosaedr.	Diamet.
I. Claſſ.	1000	490	630	248	378	608
II. Claſſ.	2040	1000	1285	506	771	1240
III. Claſſ.	1587	778	1000	394	600	965
IV. Claſſ.	4031	1976	2539	1000	1524	2450
V. Claſſ.	2646	1297	1667	656	1000	1608
VI. Claſſ.	1646	807	1037	408	622	1000

Das heiſſet, z. E. wenn die Seite eines Tetraeders = 1000 iſt, so iſt die Seite eines Hexaeders oder Cubus von gleichem cubiſchen Inhalt = 490; eines Octaeders = 630, u. ſ. w. Ferner, wenn die Seite eines Hexaeders = 1000 iſt, so iſt die Seite eines Tetraeders von gleichem cubiſchen Inhalt = 2040; eines Oktaeders 1285, u. ſ. w. Ferner, wenn die Seite eines Octaeders = 1000, so iſt die Seite eines Tetraeders von gleichem cubiſchen Inhalt 1587; eines Hexaeders 778, u. ſ. w.

§. 602.

Man hat eine dem berühmten **Adrian Metius**, ohne Zweifel mit Unrecht, zugeeignete Tabelle, um die fünf regulären Körper im cubiſchen Inhalt einander gleich zu machen. Dieſe Tabelle iſt unrichtig, indem einige Zahlen viel zu hoch und andere viel zu niedrig angegeben worden. Ich will ſie herſetzen, damit man ſie mit der vorhergehenden vergleichen könne.

	Tetraëdr.	Hexaëdr.	Oktaëdr.	Dodekaed.	Ikoſaëdr.
I. Claſſ.	1000	490	630	249	378
II. Claſſ.	2040	1000	1285	507	770
III. Claſſ.	1587	778	1000	388	590
IV. Claſſ.	4088	2003	2575	1000	1521
V. Claſſ.	2689	1318	1694	658	1000

§. 603.

§. 603.

Um das Maaß zu den Seiten der Flächen für die fünf regulären Körper, und eine Kugel von gleichem körperlichen Inhalt in kleinern Zahlen zu haben, brauchet man nur mit 10, 20, 100, oder einer andern Zahl in die Zahlen der Tabelle zu dividiren. Der Quotient wird eine kleinere Zahl bringen. Wie die Tabelle übrigens hauptſächlich auf dreyerley Art genutzet werden könne, als 1) zur Verwandlung eines regulären Körpers in einen andern von gleichem Inhalt; 2) zur Berechnung des cubiſchen Inhalts der Körper, und 3) um aus dem bekannten cubiſchen Inhalt eines Körpers die Seiten ſeiner Flächen zu finden, wird aus folgenden Aufgaben zu erſehen ſeyn.

(I.) Einen regulären Körper in einen andern von gleichem körperlichen Inhalt zu verwandeln. §. 604.

Zum Exempel. Die Seite eines Ikoſaeders ſey 15. Dieſes Ikoſaeder in ein Oktaeder von gleichem körperlichen Inhalt zu verwandeln. Saget:

Ikoſaed. Octaed. Ikoſaed. Oct.
1000. : 1667 = 15 : 25,005.

§. 605.

(II.) Aus der bekannten Seite eines regulären Körpers den cubiſchen Inhalt deſſelben zu berechnen.

Zum Exempel. Die Seite eines Oktaeders ſey 12. Den cubiſchen Inhalt des Oktaeders zu finden. Saget:

Octaedr. Cub. Octaed. Cub.
1000 : 778 = 12 : 9,336.

Cubiret die gefundne Zahl 9,336; kömmt 813°734'125''056(''''ᶜ. für den körperlichen Inhalt.

(III.) Aus dem bekannten cubischen Inhalt eines Körpers die Seiten seiner Flächen zu finden. §. 606.

Zum Exempel. Der cubische Inhalt eines Octaeders sey = 5000. Ziehet aus 5000 die Cubikwurzel 17, und saget: Cub. Octaeder. Cub. Octaeder.

1000 : 1285 = 17 : 21 die gefundne Seitengröße.

(IV.) Zu einer Kugel von bekanntem Diameter einen regulären Körper von gleichem cubischen Inhalt zu finden; oder aus dem Diameter eines regulären Körpers die Seitengröße dieses Körpers zu finden. §. 607.

Zum Exempel. Der Diameter der Kugel sey = 15; und der zu findende Körper sey ein Ikosaeder. Wie groß wird die Seite des Ikosaeders seyn müssen? Saget:

Diam. Ikosaed. Diam. Ikosaed.

1000 : 622 = 15 : 9,33.

(V.) Zu einem regulären Körper, dessen Seite bekannt ist, eine Kugel von gleichem cubischen Inhalt zu finden; oder aus der Seitengröße eines regulären Körpers seinen Diameter zu finden. §. 608.

Zum Exempel. Der zu findende Körper sey ein Octaeder, und dessen Seite = 15. Saget:

Octaed. Diam. Octaed. Diam.

1000 : 965 = 15 : 14,475.

(VI.) Aus dem Diameter eines Körpers den cubischen Inhalt desselben zu finden. §. 609.

Der Diameter eines Tetraeders sey = 20.

1) Saget nach Aufgabe *IV.*

Diam. Tetr. Diam. Tetr.

1000 : 1646 = 20 : 32.

2) Nach

2) Nach Aufgabe *II.*

Tetr. Cub. Tetr. Cub.

1000 : 490 = 32 : 15.

3) Cubiret die gefundne Zahl 15; kömmt 3375 für den cubischen Inhalt des Tetraeders.

(VI.) Aus dem cubischen Inhalt eines Körpers seinen Diameter zu finden. §. 610.

Zum Exempel. Der cubische Inhalt eines Octaeders sey = 5000.

1) Suchet nach Aufgabe *III.* die Seitengröße der Flächen; kömmt 21.

2) Setzet die Operationen nach Aufgabe *V.* fort, und saget: Octaed. Diam. Octaed. Diam.

1000 : 965 = 21 : 20. die gefundne Zahl.

Dreyzehnter Abschnitt.

Von den eckigt conischen Körpern, oder von den Pyramiden.

§. 611.

Eine Pyramide ist, wie bereits §. 525. bey β) gesaget worden, ein Körper, welcher eine geradlinichte Figur zu seiner Grundfläche hat, die in so viele Triangel eingeschlossen wird, als die Grundfläche Seiten hat, und deren Triangel oben in einen Punkt zusammenlauffen. Dieser Körper ist auf unzählliche Art möglich, weil die Grundfläche nicht allein drey, vier, fünf und mehreckigt seyn, sondern auch jede Art von Figur, reguläre, symmetrische und irreguläre, zu einer Grundfläche gemachet werden kann. Doch müssen die symmetrischen und irregulären Grundflächen einschreibbare Figuren seyn, weil bey den uneinschreibbaren die Triangel nicht in eine Spitze zusammengehen, sondern einen Hiatus lassen. Nach der Beschaffenheit der Grund-

Grundflächen können übrigens die Pyramiden in reguläre, symmetrische und irreguläre unterschieden werden; mit der Bemerkung, daß das Unterscheidungswort regulär nicht weiter als auf einen Theil der Pyramide, nemlich auf ihre Grundfläche, und nicht auf den ganzen Körper ausgedehnet wird, indem in Absicht auf das Ganze nur fünf reguläre Körper möglich sind, wie bekannt ist. Wenn man schlechtweg von einer Pyramide spricht, so verstehet man allezeit eine reguläre. Da das Tetraeder eine dreyeckigte Pyramide ist, und sowohl eine reguläre Grundfläche als reguläre Seitenflächen hat, so pfleget solches dieserwegen eine regulär-reguläre Pyramide zum Unterscheid genennet zu werden.

§. 612.

Die Seitenflächen der Pyramiden sind entweder reguläre oder gleichschenklichte Triangel, deren Basis sich überall nach den einzelnen Seitengrößen der Grundfläche richten, welche dadurch eingeschlossen werden soll; und die Schenkel müssen in allen Triangeln, die zu eben derselben Pyramide gehören, gleich groß seyn.

Doch finden die regulären Triangel nicht weiter als bis zum Fünfeck inclusive statt, indem, nach dem Unterrichte vom §. 524. Seite 478. niemals mehr als fünf reguläre Triangel in einen körperlichen Winkel zusammenstossen können, und ihrer sechs in einer ebenen Fläche neben einander zu liegen kommen.

§. 613.

Die Netze der Pyramide können auf zweyerley Art beschrieben werden, indem man 1) entweder die zum Grunde liegende Fläche ringsherum mit so vielen Triangeln von gleicher Höhe einfaßet, als die Grundfläche Ecken hat, oder 2) indem man einen blinden Bogen reisset, und in selbigem aus dem Centro so viele Triangel beschreibet, als die Pyramide Ecken haben soll, und hernach die Grundfläche an die Basin eines dieser Triangel hänget. Exempel von der ersten

ſten Art ſehe man bey Fig. 4. 5. 6 7. Tab. XVII Fig. 1. 2. 3. Tab. XLIV. ingleichen Fig. 7. Tab. XLII. und Fig. 3. Tab. XXXIX. und von der andern bey Fig. 8. 9. 10. Tab. XVII.

Die leztere Art das Neß einer Pyramide zu reiſſen, iſt die bequemſte für alle reguläre, und die erſtere für alle ſymmetriſche und irreguläre Pyramiden.

Vierzehnter Abſchnitt.

Die Pyramiden in gewiſſen Verhältniſſen einander gleich zu machen.

§. 614.

Damit die Pyramiden in Abſicht auf ihre Größe ein gewiſſes Verhältniß unter ſich bekommen: ſo kann man ſolche auf verſchiedne Art einander gleich machen, als:

(A) Die Pyramiden im Perimeter einander gleich zu machen.

1) Nehmet für die Grundfläche der Pyramide eine gewiſſe Zahl an, z. E. 120, und dividiret ſolche durch die Eckzahl der Grundfläche. Der Quotient giebet die Größe der Seite für die Grundfläche; z. E.

für eine 3 eckigte Pyramide.	für eine 4 eckigte;	für eine 5 eckigte;	für eine 6 eckigte.
3) $\frac{120}{40}$ Seite der Grundfl.	4) $\frac{120}{30}$ Seite der Grundfl.	5) $\frac{120}{24}$ Seite der Grundfl.	6) $\frac{120}{20}$ Seite der Grundfl.

2) Nehmet auch für die Summe der Seitenflächen eine gewiſſe Zahl an, z. E. 600; dividiret ſolche durch die Eckzahl der Grundfläche, und ziehet die nach der erſten Operation gefundne Seitengröße der Grundfläche davon ab. Theilet den Reſt mit 2: ſo giebet der Quotient die Seitengröße der Triangel, z. E.

für

für die 3 eckigte Pyramide.	für die 4 eckigte Pyramide.	für die 5 eckigte Pyramide.	für die 6 eckigte Pyramide.
3) 600	4) 600	5) 600	6) 600
200	150	120	100
40	30	24	20
2) 160	2) 120	2) 96	2) 80
80 Seite der Triangel.	60 Seite der Triangel.	48 Seite der Triangel.	40 Seite der Triangel.

3) Dupliret die Seitengröße der Triangel; addiret die Basin derselben, welche = der Seitengröße der Grundfläche; vervielfältiget das Collect mit der Eckzahl der Pyramide, und addiret den Perimeter der Grundfläche der Pyramide. Das Collect giebet den ganzen Perimeter der Pyramide, als:

für die 3 eckigte Pyramide.	für die 4 eckigte.	für die 5 eckigte.	für die 6 eckigte.
80	60	48	40
2	2	2	2
160	120	96	80
40	30	24	20
200	150	120	100
3	4	5	6
600	600	600	600
120	120	120	120
720 =	720 =	720 =	720

Der Perimeter einer jeden dieser vier Pyramiden ist also = 720, und es werden die Pyramiden, von der dreyeckigten bis zur sechseckigten, nach dem Verhältniß ihres Perimeters allezeit in der Höhe ab-, und in der Corpulenz zunehmen.

§. 615.

(B) **Die Pyramiden sowohl in Ansehung der Höhe, als der Länge ihrer Seitenflächen einander gleich zu machen.**

Die Solution dieser Aufgabe beruhet darauf, daß die Grundflächen dieser Pyramiden in Zirkeln von gleichem Diame-

Diameter beschrieben werden, und es können sowohl irreguläre, als symmetrische und reguläre Figuren in einem Zirkel von gleichem Diameter beschrieben werden.

Es sey der Zirkel Z bey Fig. 1. Tab. XXV.

1) Beschreibet in dem Zirkel Z das reguläre Dreyeck ABC, bey Fig. 2. Tab. XXV, das reguläre Viereck ABCD, Fig. 3. Tab. XXV; das reguläre Fünfeck ABCDE, Fig. 1. Tab. XXVI. und das reguläre Sechseck ABCDEF, Fig. 2. Tab. XXVI. Sind vier Grundflächen zu Pyramiden.

2) Machet die Triangel, womit bey Verfertigung der Netze für die Pyramiden, die gefundnen Grundflächen derselben umgeben werden sollen, von gleicher Länge der Schenkel, z. E. allhier von der Größe AD, Fig. 2. Tab. XXV, = AE Fig. 3. Tab. XXV, = AF, Fig. 1. Tab. XXVI, und = AG Fig. 2. Tab. XXVI. Die Triangel werden seyn wie bey Fig. 4. 5. 6 und 7, Tab. XXV zu sehen ist.

Alle diese Pyramiden werden von gleicher Höhe seyn, so wie sie vermittelst der Anlage von gleicher Länge der Seitenflächen sind; und den Beweis der gleichen Höhe wird man haben, wenn man aus ihren Spitzen bis auf die Mitte ihrer Grundflächen einen Tasterzirkel ausspannet. Es lässet sich aber diese Höhe auch auf dem Papiere finden, wenn man aus dem Center der Grundfläche, parallel mit selbiger, eine unbestimmte gerade Linie zieht, auf selbiger aus dem Center eine perpendikuläre bis an eine Ecke der Grundfläche erhöhet, und aus dieser Ecke die Länge der erstern geraden Linie mit einem Bogen = einem Schenkel der Pyramide, bestimmet, so wie solches an seinem Orte mit dem Tetraeder geschehen. Diese Operation bringet einen rechtwinklichten Triangel, dessen Cathetus allezeit der Höhe der Pyramide gleich ist.

Auf diese Weise ist in der dreyeckigten Pyramide bey Fig 2. Tab. XXV der Punkt E das Center der Grundfläche ABC, und die Linie EG die verlangte unbestimmte Parallele. Wenn nun auf die Linie EG die Perpendikuläre

läre EC gestellet, und die Länge des Schenkels AD, aus C in F, getragen wird: so giebet die Linie Ek, die Höhe dieser Pyramide. Auf ähnliche Art ist die Höhe der viereckigten Pyramide = FG, Fig. 3. Tab. XXV; die Höhe der fünfeckigten Pyramide = GH, Fig. 1. Tab. XXVI, und die Höhe der sechseckigten = HI, Fig. 2. Tab. XXVI. ausgemessen worden, und man wird selbige überall gleich finden.

§. 616.

(C) **Die Pyramiden sowohl in Ansehung der Höhe, als des körperlichen Inhalts, einander gleich zu machen.**

Der cubische oder körperliche Inhalt einer Pyramide wird gefunden, wenn der quadratische Inhalt ihrer Grundfläche mit einem Drittheil ihrer Höhe, oder umgekehrt, wenn ihre Höhe mit einem Drittheil des quadratischen Inhalts ihrer Grundfläche multipliciret wird. Es kömmt also darauf an, die Grundflächen der Pyramiden von gleichem quadratischen Inhalt, und die Pyramiden selbst von gleicher Höhe unter sich zu machen. Das erste kann nach den Regeln der Verwandlung der Figuren, oder da wo solche nicht hinreichen, durch den Gebrauch der im §. 563. sqq. beygebrachten Verwandlungstabelle bewirket werden; und das zweyte erfordert nichts weiter als die Kenntniß von der Ausmessung einer Pyramide nach ihrer Höhe, so wie solche bey (B) gezeiget worden ist. Folgende beyde Exempel werden die Art des Processes an den Tag legen.

Eine drey- und viereckigte Pyramide von gleicher Höhe und gleichem körperlichen Inhalt zu machen.

1) Es sey der reguläre Triangel LMN, von Fig. 4. Tab. XXVI, die Grundfläche einer dreyeckigten Pyramide, und die Linie OP die bestimmte Höhe der Pyramide.

2) Ver-

2) Verwandelt den regulären Triangel LMN in ein reguläres Quadrat. Dieſes geſchicht durch Hülfe des Rectangels auf folgende Art.

α) Verſetzet den Triangel LMN zu Fig. 3. Tab. XXVI, wo er durch ABC ausgedrücket iſt. Halbiret AB in D, und fället aus C die Perpendikuläre CD.

β) Theilet die Perpendikuläre CD in E; ziehet durch E, die mit AB parallel laufende Linie GF, und erhebet mit der Weite DE aus A die Perpendikuläre AG, und aus B die Perpendikuläre BF: ſo entſteht ein Rectangel ABFG von gleichem quadratiſchen Inhalt mit dem regulären Triangel ABC.

γ) Verwandelt nach den im §. 550 bey der IVten Operation beygebrachten Regeln, vorhergehendes Rectangel ABFG in das reguläre Quadrat FHIK.

3) Verſetzet das Quadrat FHIQ von Fig. 3 zu Fig. 5. Tab. XXVI. wo es durch QRST ausgedrücket iſt, und ziehet die beyden Diagonalen TR und SQ.

4) Traget die für die Höhe der dreyeckigten Pyramide bey Fig. 4. Tab. XXVI beſtimmte Größe OP, auf Fig. 5, aus V in W; und vollendet bey Fig. 4, den rechtwinklichten Triangel NOP, und bey Fig. 5, den rechtwinklichten Trinangel TVW.

Die Hypotenuſe NP giebet die Länge für einen Schenkel der dreyeckigten Pyramide, und die Hypotenuſe TW für einen Schenkel der viereckigten Pyramide. Beyde Pyramiden werden von gleichem körperlichen Inhalt und von gleicher Höhe ſeyn.

§. 617.

In einigen Anleitungen zur Geometrie wird zur Berechnung der Pyramiden, eine Art von perſpectiviſcher oder vielmehr geometriſcher Zeichnung zum Grunde

geleget, welche mir aber, ſo wie ſie gebraucht wird, von keinem weitern Nutzen zu ſeyn ſcheinet, als daß die Anzahl der Figuren damit vermehret wird. Man ſupponiret nemlich die Höhe der Pyramide, ohne daß gezeiget werde, wie ſolche durch Vermittelung der Zeichnung gefunden werden kann, und man brauchet von der ganzen Zeichnung nichts weiter als die Grundfläche, zu deren Vorſtellung keine Linien aus der Ecke nach den Höhen nöthig waren. Ich will mich durch ein Exempel erklären.

Es ſey eine auf dieſe Art entworfne viereckigte Pyramide ABCDE bey Fig. 15. Tab. XXV.

α) Eine Seite AB der viereckigten Grundfläche ABCD ſey = 5. Solche quadrirt, kömmt 25 für den quadratiſchen Inhalt dieſer Grundfläche.

β) Die Höhe der Pyramide ſey = 9; davon ein Drittheil iſt 3. Dieſe mit 25 Quadratfuß multipliciret, kömmt 75 Cubikfuß für den körperlichen Inhalt der Pyramide ABCDE.

§. 618.

Dieſes ganze Problem konnte, ſo wie es hier iſt, ohne Hülfe der geometriſchen Zeichnung aufgelöſet werden. Des Quadrats wegen war ſie nicht nöthig. Da die Höhe der Pyramide = 9 ſupponiret ward: ſo konnte auch die Seite des Quadrats ſupponiret, und mit beyden Suppoſitionen der ganze Zuſammenhang des Calculs erkläret werden. Der Autor ſollte aus dieſer Zeichnung ſo gut die Höhe der Pyramide, als die Seite des Quadrats finden laſſen, und da dieſes nicht geſchehen, und die Lehre von der Berechnung des quadratiſchen Inhalts einer Figur ſchon vorher in andern Abtheilungen des Buches dargeleget worden war, ſo iſt der ganze Riß unnütz geweſen. Wie hätte nun ſelbiger beſſer genutzet werden können? Wenn der Autor eine von den Linien, welche aus den äuſſerſten Ecken der Grundfläche nach der Trianguläreſpitze E gezogen worden, für

die

die Länge eines Schenkels aus den Seitenflächen der Pyramide angenommen, und mit Hülfe derſelben eine Ausmeſſung vorgenommen hätte. Wenigſtens hätte ſolches in einem Capitel geſchehen ſollen, wo ausdrücklich von der Ausrechnung und Ausmeſſung körperlicher Figuren auf dem Papier gehandelt wird. Wie vorhergehendes Deſiderium erfüllet werden könne, habe ich an den Figuren 2 und 3, Tab. XXV und Fig. 1 und 2. Tab. XXVI. im §. 615, Seite 543 unten, gezeiget, und ich unterwerfe dieſe Methode dem Urtheile der Meiſter der Kunſt.

§. 619.

Es iſt mir nicht bekannt, wodurch es geſchehen, daß viele der elementariſchen Geometrie Befliſſne, die Höhe eines Triangels aus einer Pyramide für Höhe der Pyramide ſelbſt halten. Obgleich ſolche in ſehr kleinen Figuren, ſo wie ſie auf den Kupfertafeln insgemein ausgedrücket werden, dem Auge nach nicht verſchieden zu ſeyn ſcheinen, ſo ſind ſie es doch, wenn man die Sache näher unterſuchet, und die Differenz iſt in groſſen Figuren ſehr ſichtbar. Daß gleichwohl ein gewiſſer geometriſcher Schriftſteller die Höhe eines Triangels mit der Höhe einer Pyramide für einerley Größe gehalten haben müſſe, kann ich nicht umhin, bey dieſer Gelegenheit anzuzeigen. Der Auctor berechnet den cubiſchen Inhalt eines Tetraeders, welches eine dreyeckigte regulär-reguläre Pyramide iſt, und nimmt die Seite der Grundfläche = 100, die Perpendikuläre aber = 86 an. Nachdem er, durch 100 X 86, oder 100 X 43, den quadratiſchen Inhalt der Grundfläche auf 4300 feſtgeſetzet, ſo ſaget er: „Nun muß dieſer Inhalt mit dem dritten Theile der Höhe, „nemlich mit 28⅔ multipliciret werden; kömmt 123266⅔ „für den körperlichen Inhalt des Tetraeders.“ Wenn nun die Zahl 28⅔ ein Drittheil von 86 iſt: ſo hat der Autor die Höhe oder Perpendikuläre des Triangels für die Höhe der Pyramide genommen, und dieſes iſt nun ungefähr nach Jacob Köbels Art verfahren, welcher, um den quadratiſchen In-

halt eines gleichſeitigen Triangels zu berechnen, eine ſeiner ganzen Seiten mit der Hälfte derſelben multipliciren ließ.

§. 620.

Um zu ſehen, wie ſehr der wahre cubiſche Inhalt des obigen Tetraeders von dem unrichtig angegebnen differire, kann man den Calcul folgendergeſtalt anſtellen.

Es ſey die Seite der Grundfläche, welche allhier einer der vier Triangel des Tetraeders ſelber iſt, = 100, ſo wie ſie angenommen worden.

1) Subtrahiret das Quadrat der halben Seite von dem Quadrat der ganzen Seite, und ziehet aus dem Reſt die Quadratwurzel, welche mit 86,6 die Größe der Perpendikuläre des Triangels geben wird.

2) Multipliciret die Perpendikuläre 86,6 mit der halben Seite = 50; kömmt 4330 für den quadratiſchen Inhalt der Grundfläche.

3) Berechnet die Höhe des Tetraeders. Dieſes kann entweder nach dem Maaßſtabe geſchehen, wenn das Tetraeder zu Papier gebracht iſt, wie im §. 571, Seite 522. oder durch Hülfe der oben im §. 576. Seite 525 beygebrachten Tabelle; nach welcher es heiſſet:

60: 49 = 100: beynahe 82.

4) Multipliciret den quadratiſchen Inhalt der Grundfläche = 4330 mit $\frac{1}{3}$ aus 82, das iſt mit $27\frac{1}{3}$; kömmt 118353 für den cubiſchen Inhalt des Tetraeders.

So wie nun von jenem Autor der quadratiſche Inhalt um 30 zu wenig angegeben worden, ſo iſt der cubiſche um 4913 zuviel angegeben, indem 4330 und 123266

$$\frac{4300}{30,} \qquad \frac{118353}{4913}$$

welches ohne Zweifel, beſonders wegen der unrichtig berechneten Höhe, eine Anmerkung verdienet, wenn man auch die, vermuthlich nur bloß mechaniſch ausgemeßne Perpendikuläre, dem Auctor nachſehen wollte.

Anmer-

Anmerkung.

Ich lege bey dieser Gelegenheit eine verkürzte Manier dar, einen gleichseitigen Triangel zu berechnen, deren sich Adrian Metius bedienet, und welche sehr nahe zutrift. Sie bestehet darinnen, daß man das Quadrat einer Seite mit 13 multipliciret, und das Product mit 30 dividiret. Z. E. wenn die Seite eines gleichseitigen $\triangle = 100$: so ist

$100^2 = 10000$, und $10000 \times 13 = 130000$,

und $\frac{130000}{30} = 4333$ Der gefundne Inhalt des gleichseitigen $\triangle$.

Funfzehnter Abschnitt.

Aus den Pyramiden andere Körper zu erfinden.

§. 621.

Dieses wird geschehen, zum Exempel,

I.) Wenn man zwey Pyramiden einerley Geschlechts zusammensetzet. Das Resultat ist eine Doppelpyramide, deren Standpunkt eine ihrer beyden Spitzen ist. Das Netz zu einer dreyeckigten Doppelpyramide kann entweder wie bey Fig. 3 oder 4. Tab. XVIII gerissen werden, und auf ähnliche Art lässet sich eine vier- fünf- oder mehreckigte Doppelpyramide verfertigen.

II.) Wenn man eine Pyramide stutzt oder abkürzet. Die Triangel verwandeln sich alsdenn in Trapezien, und es entstehen unten und oben zwey ähnliche, aber ungleiche Grundflächen. Das Netz zu einer dreyeckigten gestutzten Pyramide kann entweder wie bey Fig. 5 oder 6. Tab. XVIII gerissen werden. Die gestutzten Pyramiden müssen nicht mit den trapezischen Pyramiden, das ist mit solchen Pyramiden, bey welchen ein Trapezium zum Grunde lieget, und von welchen man bey Fig. 7. Tab. XIII. ein Exempel findet, vermischet werden. Die trapezischen Pyramiden sind selber der Stutzung fähig, wie man bey

Fig. 1. Tab. XLI stehet, und können alsdenn auch körperliche Trapezien genennet werden, indem nicht allein die Grund- sondern auch die Seitenflächen Trapezien sind.

III.) Wenn man eine Doppelpyramide nach der einen Spitze zu stutzet. Tab. XIX. Fig. 2.

IV.) Wenn man eine Doppelpyramide nach beyden Spitzen zu stutzet. Tab. XIX. Fig. 3. Diese Körper machen eine Art von eckigt ellipsoidischen Körpern, und unterscheiden sich von den übrigen Arten der ellipsoidischen Körper bloß dadurch, daß ihre Höhe allezeit willkührlich ist, indem die Triangel mehr oder weniger gestutzet werden können; in den übrigen Arten der Ellipsoiden aber, von welchen in der Folge gehandelt werden wird, entweder die Höhe durchaus oder doch mehr bestimmt ist, indem sie, so wie die eckigt sphärischen Körper, nach Beschaffenheit der Größe einer einzigen ihrer Figuren, ihre Höhe zum Theil mit sich führen, und so lange diese Größe einerley bleibet, nicht höher oder niedriger gemachet werden können.

V.) Wenn man zwey gestutzte einfache Pyramiden dergestalt zusammensetzet, daß die größern Grundflächen unten und oben kommen. Es entstehen dadurch gestutzte Doppelpyramiden mit einwärts springenden Flächen, und sie können entweder wie bey Fig. 4 oder 5. Tab. XIX. gerissen werden. Bey der Zusammensetzung des Netzes muß die Pappe da, wo sich die beyden Pyramiden in der Mitte zusammenfügen, auf der ungezeichneten Seite eingekerbet werden.

VI.) Wenn die Ecken einer Pyramide zwischen der Standfläche und den Triangeln eingeschnitten werden. Tab. XX. Fig. 1 und 2. Der erstere Körper bestehet aus einem regulären Sechseck, drey symmetrischen Fünfecken und drey gleichschenklichten Triangeln, und der letztere aus einem symmetrischen Achteck, vier symmetrischen Fünfecken und vier gleichschenklichten Triangeln. Die symmetrischen Fünfecke entspringen in beyden Figuren aus gleich-

gleichschenklichten Triangeln, deren Grundlinie in drey gleiche Theile zerfället wird, wie aus den hinzugefügten punktirten Linien zu ersehen ist. Diese Arten von Körpern heißen unächte Pyramiden (pyramides spuriae), und können auf eben die Art, als die ordentlichen Pyramiden, nach vorhergehender Anweisung bey No. I. II. III. IV und V verändert worden sind, behandelt werden. Dieses wird geschehen,

1) Wenn zwey unächte Pyramiden einerley Geschlechts zusammengesetzet werden. Tab. XXIV. Fig. 1. Die allhier befindliche unächte Doppelpyramide besteht aus acht symmetrischen Fünfecken, und acht gleichschenklichten Triangeln. Die Fünfecke sind aus vier großen gleichschenklichten Triangeln von gleicher Größe erfunden worden, wie aus den punktirten Linien erhellet, und die acht kleinen gleichschenklichten Triangel werden auf folgende Art gesuchet: Setzet die Grundlinie AB des größern △ ABC mit einer andern Linie von gleicher Größe bey Fig. 2. Tab. XXIV. winkelrecht zusammen; theilet jede Linie in drey gleiche Theile, und ziehet die Transversale NM. Die Größe NM giebet die Größe zur Grundlinie EF des kleinern gleichschenklichten Triangels EFG, dessen Schenkel aus dem Fünfecke genommen werden. Diesem gefundnen ersten gleichschenklichten Triangel werden nun alle sieben übrigen gleich gemachet.

2) Wenn eine unächte Pyramide gestutzet oder abgekürzet wird. Die symmetrischen Fünfecke verwandeln sich alsdenn entweder in vier- oder sechseckigte Figuren. Tab. XX. Fig. 3 und 4. Der Körper bey Fig. 3. besteht aus einem regulären Sechseck, drey Trapezien, drey gleichschenklichten Triangeln und einem gleichseitigen Triangel; der bey Fig. 4 aber aus einem regulären Sechseck, drey symmetrischen Sechsecken, drey gleichschenklichten und einem gleichseitigen Triangel.

3) Wenn eine unächte Doppelpyramide nach der einen Spitze zu gestutzet wird. Stutzet die vier obersten symmetrischen Fünfecke der unächten Doppelpyramide bey Fig. 1. Tab. XXIV, so verwandeln sich die Fünfecke in vier symmetrische Sechsecke, auf deren einem ein □ beschrieben wird. Der Körper wird alsdenn bestehen aus vier symmetrischen Sechsecken, vier symmetrischen Fünfecken, acht gleichschenklichten Triangeln und einem □.

4) Wenn eine unächte Doppelpyramide nach beyden Spitzen zu gestutzet wird. Verfahret mit Fig. 1. Tab. XXIV auf beyden Seiten, wie bey 3) auf der einen, so wird der Aufgabe genüget seyn, und der Körper bestehen aus acht symmetrischen Sechsecken, acht gleichschenklichten △, und zwey Quadraten.

5) Wenn zwey gestutzte unächte Pyramiden dergestalt zusammengesetzet werden, daß gegen die Mitte des Körpers die Flächen einwärts gehen. Tab. XXIII. Fig. 1 und 2. Der erste Körper besteht aus acht regulären Sechsecken und sechs regulären Triangeln. Der zweyte Körper besteht aus zwey regulären Sechsecken, sechs Rectangeln und sechs gleichschenklichten Triangeln. In der Mitte, wo sich die Figuren zusammenfügen, muß bey Zusammensetzung des Netzes, die Pappe auf der ungezeichneten Seite eingekerbet werden.

und so weiter.

§. 622.

Es ist oben im §. 611. gesaget worden, daß die uneinschreibbaren Figuren nicht zur Grundfläche einer Pyramide genommen werden können, indem zwischen den Triangeln eine Lücke entstehet. Die Probe kann man mit einem Rhombus machen. Wie die bey einem Rhombus entstehende Lücke ausgefüllet, und dadurch ein neuer Körper hervorgebracht werden könne, ist aus folgendem zu sehen.

1) Construiret bey Fig. 3. Tab. XXXII. aus zwey gleichseitigen Triangeln einen Rhombus ABCD, und setzet

auf

auf ſelbigen die gleichſchenklichten Triangel ADE, ABF, BCG, und CDH. 2) Reiſſet mit dem Schenkel eines dieſer Triangel aus dem Punkt A einen Bogen EF, und aus dem Punkt C einen Bogen HG. 3) Theilet eine Seite AB des Rhombus bey Fig. 4. Tab. XXXII. in zwölf gleiche Theile. Nehmet ſieben ſolcher Theile, ziehet damit aus F die Sehne FI und machet ſolche zur Grundlinie des △ FIA. 4) Verfahret eben ſo auf der andern Seite, und ziehet die Sehne HK, auf welche der △ HKC geſetzet wird.

Vermittelſt der beyden △ FIA und HKC wird der Hiatus ausgefüllet werden, und der Körper aus einem Rhombus, und ſechs gleichſchenklichten Triangeln, woran die vier gröſſern und die zwey kleinern einander gleich ſind, beſtehen.

Sechszehnter Abſchnitt.

Von den eckigt cylindriſchen, oder von den prismatiſchen Körpern.

§. 623.

Ein Prisma iſt, wie bereits oben geſaget worden, ein Körper, welcher aus zwey geradelinichten Grundflächen von einerley Geſchlecht, Art und Größe beſteht, die ringsherum in ſo viele viereckigte Figuren, als die Grundfläche Seiten hat, eingeſchloſſen ſind. Dieſer Körper läſſet alle nur mögliche Arten von Figuren, gleich- und ungleichſeitige, reguläre, ſymmetriſche und irreguläre, einſchreibbare und uneinſchreibbare, drey- vier- und mehreckigte zu Grundflächen zu, und die Seitenflächen können nicht allein reguläre, ſondern auch länglichte Vierecke ſeyn. Nach Beſchaffenheit der Grundflächen können die Prismata übrigens in reguläre, ſymmetriſche und irreguläre unterſchieden werden; mit der Bemerkung, daß das Unterſcheidungswort regulär nicht auf den ganzen Körper an ſich, ſondern nur auf einen Theil

deſſelben, nemlich auf die Grundfläche ausgedehnet wird, indem in Abſicht auf den ganzen Bau das Prisma nicht unter die regulären Körper, dergleichen nur fünf möglich ſind, gehöret, das regulär-reguläre viereckigte Prisma, welches ein Cubus und eines der fünf regulären Körper iſt, ausgenommen. Wenn man ſchlechtweg von einem Prismate ſpricht, ſo verſtehet man insgemein eines, welches auf einer regulären Figur conſtruiret iſt. Obgleich endlich die Grundflächen, wornach die Prismata characteriſiret und in 3, 4 und mehreckigte unterſchieden werden, die eigentlichen Stand- oder Ruheflächen derſelben ſind: ſo können ſie doch auch ebenfalls auf die Seitenflächen geſtellet werden.

§. 624.

Die Netze der prismatiſchen Körper laſſen ſich auf zweyerley Art beſchreiben, indem man entweder ſoviele viereckigte Figuren, als das Prisma Ecken haben ſoll, von gleicher Höhe unter ſich an einander hänget, und an eine dieſer Figuren unten und oben die Grundfläche des Prismatis ſetzet. Exempel von dieſer Art, welche für die regulären Grundflächen die bequemſte iſt, ſehe man bey Fig. 7. 8. 9. 10. Tab. XXII. Oder man umgiebet eine Grundfläche ringsherum mit viereckigten Figuren von gleicher Höhe unter ſich, und hänget an eine dieſer Figuren eine zweyte Grundfläche. Exempel von dieſer Art, welche für die ſymmetriſchen Grundflächen die bequemſte iſt, ob man ſie auch gleich für die regulären gebrauchen kann, ſehe man bey Fig. 11. Tab. XXII, wo ein reguläres Fünfeck zum Grunde lieget, und bey Fig. 12. 13. Tab. XXII, ingleichen Fig. 3 und 4. Tab. XLI, ingleichen Fig. 5. Tab. XXVII, ingleichen Fig. 6. Tab. XLII, Fig. 4. Tab. XLIII, und Fig. 4. Tab. XLIV, wo überall ſymmetriſche Figuren zum Grunde geleget ſind.

§. 625.

Jedes Prisma kann in Anſehung des Verhältniſſes zwiſchen der Seitengröße der Grundfläche, und zwiſchen der Höhe der Seitenflächen, auf dreyerley Art executiret werden; einmal, wenn die Seite der Grundfläche mit der Länge

und

und Breite der Seitenflächen von gleicher Größe ist. Dieses geschicht, wenn die Grundfläche in reguläre Quadrate eingeschlossen wird. Tab. XXII. Fig. 8. Ein andermal, wenn die Grundfläche in länglichte Vierecke eingeschlossen wird, deren Breite kleiner als die Seite der Grundfläche ist. Tab. XXII. Fig. 7, und ein drittesmal, wenn die Grundfläche in länglichte Vierecke eingeschlossen wird, deren Breite der Seite der Grundfläche gleich, die Länge aber größer ist. Tab. XXII. Fig. 9.

§. 626.

Wegen des viereckigten Prismatis ist zu merken, 1) daß, wenn ein reguläres Viereck zum Grunde geleget, und solches in Seitenflächen von gleicher Höhe mit der Seite der Grundfläche, und folglich in reguläre Vierecke eingeschlossen wird, der unter der Benennung eines Hexaeders oder Cubus uns bereits bekannt gewordene Körper zum Vorschein kömmt; 2) daß dasjenige viereckigte Prisma, welches man in Rectangel einschliesset, deren Breite kleiner als die Seite der Grundfläche ist, insgemein eine Plinthis genennet wird; Tab. XXII. Fig. 7. und 3) daß die viereckigten Prismata, in welchen die Seite der Grundfläche und die Höhe der Seitenflächen von ungleicher Größe sind, auf sechserley Art betrachtet werden können. In der Lehre von den figürlichen Zahlen, XII. Abschnitt, ist dieser Umstand mit Würfeln erkläret worden, und hier wollen wir solchen durch den verschiednen Aufriß der Netze erläutern. Da wir zwey verschiedne Größen brauchen, eine für die Seite der Grundfläche, und eine für die Höhe der länglichten Vierecke, indem die Seite und Höhe verschieden seyn sollen: so seyn unsre beyden Größen = 2 und 3, und zwar sey die Linie NO bey Fig. 3. Tab. XXIV, gleich der Zahl 2, und die Linie PQ ebendaselbst sey gleich der Zahl 3. Aus diesen beyden Größen entstehen zweyerley reguläre Vierecke, als eines von $2 \times 2 = 4$, Fig. 4. Tab. XXIV, und eines von $3 \times 3 = 9$, Fig. 5. Tab. XXIV; aber nur einerley Art von Rectangel, nemlich $2 \times 3 = 6$, welches

man

man auf der Tab. XXIV. bey Fig. 6 liegend, und bey Fig. 7. stehend findet. Wenn nun das Rectangel mit einem der regulären Vierecke zusammengesetzet wird, so entstehen zwar niemals mehr als zwey verschiedne viereckigte Prismata, als ein kleineres, dessen cubischer Inhalt von 12, und ein größeres, dessen cubischer Inhalt von 18 seyn wird. Hingegen können solche allezeit, wegen der Verwechselung der Länge, Breite und Höhe oder Tiefe unter einander, unter sechserley Gestalten betrachtet werden. Wir wollen die Länge überall durch AB, die Breite durch BC und die Tiefe durch AD bemerken, und da wird man finden

1) gleiche Länge und Tiefe mit kleinerer Breite bey Fig. 9. Tab. XXIV.
2) Gleiche Breite und Tiefe mit kleinerer Länge. Fig. 8. Tab. XXIV.

Das Prisma, welches allhier das größere ist, wird in beyden Fällen auf die länglichte Grundfläche, welche 3 lang und 2 breit ist, oder 2 lang und 3 breit gestellet.

3) Gleiche Breite und Tiefe mit größerer Länge, bey Fig. 10. Tab. XXIV.
4) Gleiche Länge und Tiefe mit größrer Breite, bey Fig. 11. Tab. XXIV.

Das Prisma, welches allhier das kleinere ist, wird in beyden Fällen auf die länglichte Grundfläche, welche 3 lang und 2 breit, oder 2 lang und 3 breit ist, gestellet.

5) Gleiche Länge und Breite mit kleinerer Tiefe bey Fig. 12. Tab. XXIV. Das größere Prisma wird allhier auf die regulär viereckigte Fläche $= 3 \times 3 = 9$ gestellet.
6) Gleiche Länge und Breite mit größerer Tiefe, bey Fig. 13. Tab. XXIV. Das kleinere Prisma wird allhier auf die regulär viereckigte Fläche $= 2 \times 2 = 4$ gestellet.

§. 627.

Unter den viereckigten Prismatibus ist annoch das sogenannte Parallelepipedum vorzüglich zu bemerken. Es ist

iſt daran kennbar, daß es aus ſechs länglichten Vierecken von dreyerley verſchiedner Größe, und von welchen die gegen einander überſtehenden allezeit gleich ſind, beſtehet. Wie das Parallelepipedum, wegen der Verwechſelung der Länge, Breite und Tiefe unter einander, unter ſechſerley verſchiednen Geſtalten betrachtet werden könne, iſt in der Lehre von den figürlichen Zahlen, XIII. Abſchnitt, mit Würfeln erkläret worden, und wir wollen allhier eine aus der verſchiednen Zeichnung des Netzes hergenommne Erläuterung darlegen. Da wir dreyerley verſchiedne Größen brauchen, und es einerley iſt, was für welche wir nehmen, indem allhier keine Urſachen zum Gegentheile vorhanden ſind, ſo ſeyn die unſrigen die Längen 2, 3 und 4, ſo wie man ſolche bey Fig. 8. Tab. XXV. ausgedrücket findet. Aus dieſen Längen entſtehen drey verſchiedne Rectangel, eines von $2 \times 3 = 6$, ein anderes von $2 \times 4 = 8$, und ein drittes von $3 \times 4 = 12$. Man ſehe Fig. 10. 12 und 13, wo man ſie liegend, und Fig. 9. 11. 14 wo man ſie ſtehend findet. Aus den verſchiednen Zuſammenſetzungen dieſer Rectangel entſpringet zwar nichts mehr als ein einziges Parallelepipedum. Es läſſet ſich ſolches aber, nach Anleitung folgender Erklärung, bey welcher die Länge durch AB, die Breite durch BC und die Höhe oder Tiefe durch AD allezeit ausgedrücket worden, auf ſechſerley Art betrachten, als:

1) Wenn die Länge größer als die Breite, und die Breite größer als die Tiefe iſt. Tab. XXVIII. Fig. 1.
2) Wenn die Breite größer als die Länge, und die Länge größer als die Tiefe iſt. Tab. XXVIII. Fig. 2.
Das Parallelepipedum wird in beyden vorigen Fällen auf die größte Grundfläche, welche 4 lang und 3 breit, oder 3 lang und 4 breit iſt, geſtellet.
3) Wenn die Länge größer als die Tiefe, und die Tiefe größer als die Breite iſt. Tab. XXVIII. Fig. 3.
4) Wenn die Breite größer als die Tiefe, und die Tiefe größer als die Länge iſt. Tab. XXVIII. Fig. 4.

Das

Das Parallelepipedum wird in beyden vorigen Fällen auf die mittlere Grundfläche, welche 4 lang und 2 breit, oder 2 lang und 4 breit ist, gestellet.

5) Wenn die Breite kleiner als die Länge, und die Länge kleiner als die Tiefe ist. Fig. 5. Tab. XXVIII.

6) Wenn die Länge kleiner als die Breite, und die Breite kleiner als die Tiefe ist. Fig. 6. Tab. XXVIII.

Das Parallelepipedum wird in beyden vorigen Fällen auf die kleinste Grundfläche, welche 3 lang und 2 breit, oder 2 lang und 3 breit ist, gestellet.

Erste Anmerkung.

Der Unterscheid zwischen einem viereckigten Prismate und zwischen einem Parallelepipedo ist also, daß jenes zweyerley Arten von Figuren, nemlich sowohl das reguläre als länglichte Viereck; dieses aber nur eine einzige Art von Figur, nemlich das länglichte Viereck, wiewohl von drey verschiednen Größen erfordert.

Zweyte Anmerkung.

Das Wort Parallelepipedum wird so wie das Wort Parallelogramm in weitläuftigem und engem Verstande gebrauchet. Es bezeichnet aber das Wort Parallelogramm im weitläuftigen Verstande jedes Viereck, dessen Seiten einander parallel lauffen, dergleichen das reguläre oder schlechtweg sogenannte Quadrat, das Rectangel oder länglichte Viereck, der Rhombus und das Rhomboid sind; im engen Verstande aber bezeichnet es das länglichte Viereck oder das Rectangel allein, in welcher Bedeutung es allezeit in diesem Buche genommen wird. Eben so bezeichnet das Wort Parallelepipedum in weitläuftigem Verstande alle Körper, die in sechs Parallelogrammen (der weitläuftigen Bedeutung nach,) eingeschlossen sind, von welchen die beyden einander gegen über stehenden gleich und parallel sind. Dergleichen z. E. sind das Hexaeder, das viereckigte Prisma, von welchem oben gehandelt worden, der körperliche Rhombus und das körperliche Rhomboid, ingleichen das rhombische Prisma, von welchen allen sogleich gehandelt werden wird. In engem Verstande hingegen bedeutet das Wort Parallelepipedum nichts anders als den aus 6 Rectangeln von dreyerley Größen bestehenden Körper, so wie solcher vorhin erkläret worden ist.

Dritte

Dritte Anmerkung.

Wenn in dem Wolfischen mathemat. Lexico die parallelepipedische Zahlen als solche Körperzahlen beschrieben werden, deren zwey Seiten gleich sind, die dritte aber entweder gröſſer oder kleiner ist: so passet diese Beschreibung weder auf die Parallelepipeda im weitläuftigen noch in engem Verstande, und die so beschaffnen Zahlen, z. E. die daselbst vorkommende 36, (aus $3\times3\times4$,) und 48 (aus $3\times4\times4$) geben nichts anders als Prismata, und sind also prismatische Zahlen. Sollen die Zahlen 36 und 48 parallelepipedische Zahlen werden, so muß jene aus $2\times3\times6=36$, und diese aus $2\times3\times8=48$, oder aus $2\times4\times6=48$, und also aus drey verschiednen Factoren entstehen, da dort allezeit ihrer zwey gleich sind.

§. 628.

In Ansehung des **Rhombus** und **Rhomboids** ist annoch zu merken,

1) daß, wenn der Rhombus mit regulär oder mit länglichten Vierecken umgeben wird, man den daher entstehenden Körper überhaupt ein **rhombisches Prisma**, und in dem ersten Falle einen verschobnen Cubus nennet. Tab. XXII. Fig. 12, und Tab. XLIII. Fig. 4.

2) Daß, wenn der Rhombus in vier gleiche Rhomboiden eingeschlossen wird, man den daher entstehenden Körper ein **rhombisch-rhomboidisches Prisma** nennet. Tab. XXVII. Fig. 6.

3) Daß, wenn der Rhombus in vier gleiche Rhomben eingeschlossen wird, man den daher entstehenden Körper einen **körperlichen Rhombus** nennet. Tab. XXVII. Fig. 7.

4) Daß, wenn ein Rhomboid in 2 reguläre und 2 längliche Vierecke eingeschlossen wird, man den daher entstehenden Körper ein **verschobnes Prisma** nennet. Tab. XXVII. Fig. 5.

5) Daß, wenn sechs Rhomboiden von dreyerley verschiedner Gröſſe, und von welchen die gegen einander über stehenden allezeit gleich und ähnlich sind, zusammengesetzet

geſetzet werden, man den daher entſtehenden Körper ein körperliches Rhomboid oder ein verſchobnes Parallelepipedum nennet. Tab. XXVIII. Fig. 9.

Siebenzehnter Abſchnitt.

Die Priſmata im körperlichen Inhalt einander gleich zu machen.

§. 629.

Der körperliche Inhalt eines Priſmatis wird gefunden, wenn der quadratiſche Inhalt einer der beyden Grundflächen mit der Höhe des Körpers multipliciret wird. Es kömmt alſo bey unſrer Abſicht darauf an, die Grundflächen der verſchiednen Priſmatum von gleichem quadratiſchen Inhalt, und die Priſmata von gleicher Höhe zu machen. Das erſte kann theils durch die geometriſche Conſtruction, vermittelſt der Verwandlung der Figuren, theils durch Hülfe der im §. 558 und andern Oertern beygebrachten Proportionaltabellen bewirket werden, und das andere iſt ſehr leicht, indem die Höhe der Seitenflächen die Höhe des Priſmatis ſelber iſt.

§. 630.

Es iſt hier die Gelegenheit, einen gewiſſen euklidiſchen Lehrſatz, vermöge deſſen eine Pyramide nur den dritten Theil eines Priſmatis von gleicher Höhe und gleichem quadratiſchen Inhalt der Grundfläche ausmachet, durch eine praktiſche Unterſuchung zu beſtätigen. 1) Verfertiget eine Pyramide, z. E. eine viereckigte, deren Grundfläche = 81, indem die Seite derſelben = 9, und machet die Pyramide 12 hoch. 2) Verfertiget auch ein viereckigtes Priſma, deſſen Grundfläche 81, indem die Seite derſelben = 9. Umgebet die Grundfläche mit vier länglichten Vierecken, deren jedes 12 lang und 9 breit ſey. Der cubiſche Inhalt der

Pyra-

Pyramide wird ſeyn = 324, indem die Grundfläche = 81, welche durch ein Drittheil der Höhe, das iſt durch 4 aus 12, multipliciret, ein Product von 324 giebet. Der cubiſche Inhalt des Priſmatis wird hingegen ſeyn = 972, indem die Grundfläche = 81, welche durch die Höhe 12 multipliciret, ein Produkt von 972 giebet. Wenn nun $\frac{972}{324} = 3$: ſo ſiehet man, daß das Priſma, dem cubiſchen Inhalt nach, dreymal ſo groß iſt als die Pyramide, wovon die Probe mit Sand gemachet werden kann. Sollen die beyden Körper alſo von gleichem körperlichen Inhalt ſeyn, ſo machet entweder die Pyramide dreymal gröſſer, oder das Priſma dreymal kleiner; das iſt, es muß entweder die Pyramide 36 hoch gemachet werden, und das Priſma unverändert bleiben, oder das Priſma muß 4 hoch gemachet werden, und die Pyramide unverändert bleiben.

Achtzehnter Abſchnitt.

Aus den Priſmatibus andere Körper zu erfinden.

§. 631.

Dieſes wird geſchehen, zum Exempel

I) wenn die Grundflächen eines Priſmatis, ſtatt der viereckigten Figuren, in zweymal ſo viel dreyeckigte eingeſchloſſen werden. Tab. XXVIII. Fig. 7 und 8. Bey Fig. 7 ſind die Triangel gleichſeitig, und bey Fig. 8. gleichſchenklicht.

Anmerkung.

Wenn ein reguläres Dreyeck zum Grunde geleget, und mit ſechs regulären Dreyecken umgeben wird, ſo entſtehet nichts neues, ſondern das uns bereits bekannten Octaeder.

II.) Wenn die Grund- und Seitenflächen der Priſmatum eingeſchnitten werden. Geſchehen die

Einschnitte nur auf einer Seite, wie bey Fig. 1. Tab. XXIX, so werden die viereckigten Seitenflächen zu sechseckigten Figuren, und geschehen sie auf beyden Seiten, wie bey Fig. 3. Tab. XXIX, so werden sie zu achteckigten.

α) Entwerfet bey Fig. 3. Tab. XXIX. ein blindes Netz zu einem dreyeckigten Prismate. β) Verändert die quadratischen Seitenflächen in reguläre Achtecke. Dieses geschicht, wenn die halbe Diagonale aus jeder Ecke in die Seiten getragen wird. Man sehe diesen Proceß bey Fig. 4 Tab. XXIX. γ) Theilet jede Seite der beyden Triangel auf eben die Art ein, als vorhin die Quadratseiten eingetheilet worden, (indem die halbe Diagonale des Quadrats aus jeder Ecke des △ einmal auf jede Seiten getragen wird,) und ziehet die Theilungspunkte durch Linien zusammen, so verwandelt sich jeder △ in ein symmetrisches Sechseck. δ) Setzet an jede kleinere Seite des Sechsecks, mit der Seite des Achtecks, einen gleichschenklichten △, der von der Größe des △ bey Fig. 5. Tab. XXIX seyn wird: so wird sich das Netz eines Körpers darlegen, welches aus 3 regulären Achtecken, 2 symmetrischen Sechsecken und 6 gleichschenklichten △ bestehen wird, wie man bey Fig. 3. Tab. XXIX sieht.

Anmerkung.

Bey Fig. 1. Tab. XXX. ist ein dreyeckigtes Prisma mit länglichten Seitenflächen zum Grunde eines Körpers von voriger Art geleget worden. Selbiger bestehet aus 3 symmetrischen Achtecken, 2 regulären Sechsecken und 6 gleichschenklichten △, deren Grundlinien aus den Seiten des Sechsecks, und die Schenkel aus den Seiten des Achtecks genommen worden, wie man bey Fig. 2. Tab. XXX. sehen kann.

Bey Fig. 3. Tab. XXX. ist das zum Grunde liegende dreyeckigte Prisma in einen Körper von 3 symmetrischen Achtecken, 2 regulären Sechsecken, und 6 gleichschenklichten △ verändert worden. Die Grundlinien der △ werden aus den Seiten des Sechsecks, und die Schenkel aus den größten Seiten des Achtecks genommen, wie bey Fig. 4. Tab. XXX. besonders gezeiget ist.

Bey Fig. 1. Tab. XXIX. ist das zum Grunde liegende fünfeckigte Prisma nur auf einer Seite eingeschnitten worden.

Das

Das Fünfeck wird in ein Zehneck verändert. Die Grundlinien der gleichschenklichten Triangel werden aus den Seiten des Zehnecks, und die Schenkel aus den Einschnitten in die Quadräte von einer Seite zur andern hergenommen, wie bey Fig. 2. Tab. XXIX. besonders bemerket worden. Der Körper besteht aus einem regulären Fünfeck, einem regulären Zehneck, 5 symmetrischen Sechsecken, und 5 gleichschenklichten △.

Wenn ein viereckigtes Prisma zum Grunde geleget wird, so werden die Grundflächen in Achtecke verändert; wenn ein sechseckigtes zum Grunde geleget wird, so werden die Grundflächen in Zwölfecke verändert, u. s. w.

III.) Wenn die aus länglichten Vierecken zusammengesetzten Seitenflächen eines Prismatis in Triangel und länglichte Sechsecke verändert werden. Z. E.

Es sey, bey Fig. 9, Tab. XLII. der △ ABC die Grundfläche eines dreyeckigten Prismatis, dessen länglichte Seitenflächen man bey Fig. 8. dieser Tabelle blind entworfen findet.

1) Halbiret die Seiten des △ von Fig. 9, und reisset den kleinern △ DEF. 2) Verwandele die länglichten Vierecke von Fig. 8. in symmetrische gleichseitige Sechsecke.

Der kleine gleichseitige Triangel DEF wird die Grundfläche des neuen Körpers, dessen gleichschenklichte Triangel aus der Seite des Triangels DEF, und aus den Seiten der symmetrischen Sechsecke zusammengesetzet werden, wie man bey Fig. 8. Tab. XLII. siehet. Der ganze Körper bestehet aus 2 regul. Dreyecken, 3 symmetr. gleichseitigen Sechsecken und 6 gleichschenklichten Dreyecken.

Auf ähnliche Art kann ein Quadrat zum Grunde eines viereckigten Prismatis geleget, und ein neuer Körper aus 2 regulären Vierecken, 4 symmetr. Sechsecken und 8 gleichschenkl. Triangeln hervorgebracht werden.

§. 632.

Folgende Körper sind besonders zu merken, als:

1) Der gebrochne körperliche Rhombus, welcher aus 2 Dreyecken, und 6 gleichen ſymmetriſchen Fünfecken beſteht. Tab. XXVIII. Fig. 10.

2) Das gebrochne rhombiſch-rhomboidiſche Prisma, welches aus vier Trapezien, 2 gleichſeitigen und 2 gleichſchenklichten Triangeln beſteht. Tab. XXX. Fig. 5.

3) Ein gebrochnes Parallelepipedum, welches aus 2 ſymmetriſchen Achtecken, 2 länglichten und 2 niedrigen ſymmetriſchen Sechsecken, und 8 gleichſeitigen Triangeln beſteht. Tab. XXXII. Fig. 1. Die zum Grunde liegenden länglichten Vierecke ſind blind geriſſen worden. Das größte derſelben iſt 3 breit, wie aus den Theilen CD, DE und EF zu erſehen iſt, und von zwey andern Rectangeln umgeben, deren jedes 2 breit iſt, wie man aus den Theilen AB, BC, FG und GH erſiehet. Aus der Größe eines dieſer Theile und der größern Seite des ſymmetriſchen Achtecks werden die niedrigen Sechsecke, z. E. das von EDONML formiret, und die Seiten der gleichſeitigen Triangel, z. E. des Triangels IBK werden ebenfalls aus den größern Seiten des Achtecks genommen.

§. 633.

Wenn über die Grundfläche eines Prismatis eine Pyramide geſetzet wird, ſo wird der daher entſtehende Körper ein Pyrgoidal- oder Thurmförmiger Körper genennet. Man ſehe Fig. 3 und 5. Tab. XXIII. zwey einfache, und bey Fig. 4 und 6. Tab. XXIII. zwey doppelte Pyrgoidalkörper, und bey Fig. 6 und 7. Tab. XXIX, ingleichen bey Fig. 6 und 7. Tab. XXX. zwey geſtutzte einfache und zwey geſtutzte doppelte Pyrgoidalkörper. Die geſtutzten doppelten Pyrgoidalkörper machen wie die geſtutzten Doppelpyramiden eine Art von eckigt ellipſoidiſchen Körpern.

Bey den Exempeln auf Tab. XLII. Fig. 1. 2. 3. 4 u. 5. liegen gebrochne Prismata, in welchen ſtatt der viereckigten Figuren, die Grundflächen in zweymal ſoviele dreyeckigte eingeſchloſſen werden, zum Grunde. Anmer-

Anmerkung.

Wenn anſtatt der gleichſchenklichten Triangel bey Fig. 1. Tab. XLII. reguläre Triangel genommen werden, ſo kömmt der unter der Benennung eines Ikoſaeders uns bereits bekannt gewordne Körper.

Wenn ein dreyeckigtes gebrochnes Prisma zum Grunde lieget, ſo können in dem ganzen Körper nur vier Dreyecke regulär ſeyn, und die andern Figuren ſind entweder gleichſchenklichte Triangel, wie bey Fig. 5. Tab. XLII, oder Rhomben, wie bey Fig. 2. Tab. XXXII.

Ich füge noch hinzu bey Fig. 10. Tab. XLII. einen doppelt Pyrgoidalkörper mit einſpringenden Flächen, welcher aus ſechs ſymmetriſchen Fünfecken, und drey gebrochnen Quadraten, welche ſechs gleichſchenklichte Dreyecke präſentiren, beſteht. Die Quadraten werden auf der ungezeichneten Seite eingekerbet, und das Netz wird zweymal gemacht, nur daß das leztemal die Quadrate weggelaſſen werden. Die ſymmetriſchen Fünfecke werden aus regulären Hexagonen formiret.

Neunzehnter Abſchnitt.

Von den eckigt ellipſoidiſchen Körpern.

§. 634.

Die eckigt ellipſoidiſchen Körper ſind ſowohl in bloßen regulären, als in vermiſchten regulären und ſymmetriſchen Figuren möglich. Sie haben niemals mehr als zwey Standflächen, und ſind an ihrem bauchigten Umfang ohne Mühe zu erkennen. In wie ferne die geſtuzten Doppelpyramiden und Doppelpyrgoidalkörper zu dieſen Körpern gerechnet werden können, iſt oben Seite 550, No. IV, und Seite 564 im §. 633. geſaget worden. Eigentliche eckigte Ellipſoiden ſowohl in auf einander folgenden oder zuſammenhängenden, als zerſtreueten Arten, ſind folgende. Ich nenne aber auf einander folgende Arten diejenigen, welche, ſo wie die Pyramiden und Prismata, ganze Suiten von allerhand Ecken in Abſicht auf ihre Stand- oder Grundfläche formiren, und zerſtreuet diejenigen, welche keine Suiten formiren, wenigſtens ſoviel mir zur Zeit davon bekannt iſt.

(I) Auf einander folgende Arten eckigter Ellipſoiden.

1) Leget zum Grunde, welche reguläre Figur ihr wollet; umgebet ſolche mit ſo vielen iſoſceliſchen Trapezien, als die Grundfläche Ecken hat, und hänget an jedes Trapezium einen gleichſeitigen Triangel. 2) Machet das Netz zweymal.

Auf dieſe Weiſe iſt bey Fig. 6. Tab. XLI über ein reguläres Dreyeck, und bey Fig. 7 dieſer Tabelle über ein reguläres Viereck ein eckigtes Ellipſoid conſtruiret worden. Sollen nun die Standflächen fünf- oder ſechseckigt ſeyn, ſo wird ein reguläres Fünf- oder Sechseck zum Grunde geleget, u. ſ. w.

(II) Auf

(II) Auf einander folgende Arten eckigter Ellipſoiden.

1) Umgebet eine zum Grunde gelegte reguläre Figur mit ſo vielen länglichten Vierecken, als die Grundfläche Ecken hat, und hänget an jedes derſelben einen gleichſeitigen Triangel. 2) Machet das Netz zweymal.

Auf dieſe Weiſe ſind die halben Netze zu den eckigten Ellipſoiden bey Fig. 2 und 3. Tab. XLIII beſchrieben worden. In dem erſtern lieget ein Dreyeck, und in dem leztern ein Viereck zum Grunde. Sollen die Grundflächen fünf- oder ſechseckigt ſeyn, ſo wird ein reguläres Fünf- oder Sechseck zum Grunde geleget, u. ſ. w.

(III) Auf einander folgende Arten eckigter Ellipſoiden.

1) Umgebet ein reguläres Fünfeck mit fünf gleichſeitigen Triangeln, hänget an jeden Triangel ein reguläres Viereck, an jedes Viereck wieder einen gleichſeitigen Triangel, und an einen dieſer Triangel ein gleichſeitiges reguläres Fünfeck, nach Anleitung des Netzes bey Fig. 2. Tab. XLI.

2) Umgebet ein reguläres Sechseck mit ſechs gleichſeitigen Triangeln, und hänget an jeden Triangel ein reguläres Viereck. Machet das Netz zweymal, ſo wird der ganze Körper beſtehen aus 2 regulären Sechsecken, 12 gleichſeitigen Triangeln und 12 regulären Vierecken, Fig. 8. Tab. XXXI.

Anmerkung.

Vorhergehende Suite habe ich nicht weiter als auf die beyden erklärten Körper verſuchet. Wenn ein reguläres Viereck zum Grunde geleget, mit vier gleichſeitigen Triangeln umgeben, an jeden Triangel ein reguläres Quadrat, an jedes Quadrat wieder ein gleichſeitiger Triangel, und an einen dieſer Triangel ein reguläres Quadrat angehänget wird: ſo kömmt kein eckigt ellipſoidiſcher, ſondern der unter der Benennung eines Cubo-Hexaeders uns bereits bekannte

eckigt sphärische Körper, welcher aus 8 gleichseitigen Triangeln und 6 regulären Vierecken bestehet.

(IV) Auf einander folgende Arten eckigter Ellipsoiden.

1) Beschreibet bey Fig. 1. Tab. XXVII ein reguläres Dreyeck CDE, und hänget an selbiges das reguläre Viereck ABCD. Halbiret die Seiten der Figuren, so entstehet der kleinere gleichseitige Triangel FGH, und das kleinere Quadrat IKLG.

Der Triangel FGH wird bey Fig. 2. Tab. XXVII die Grundfläche eines eckigten Ellipsoids. Es wird aber der gleichseitige Triangel mit drey gleichschenklichten Triangeln umgeben, deren Schenkel aus der Seite des gefundnen kleinern Quadrats IKLG genommen werden. An jeden gleichschenklichten Triangel wird ein Quadrat, an jedes Quadrat wieder ein gleichschenklichter Triangel, und an die Grundlinie eines derselben ein gleichseitiger Triangel gehänget, so wie dieser Proceß an dem Netze bey Fig. 2. Tab. XXVII dargeleget worden.

2) Beschreibet bey Fig. 3. Tab. XXVII ein reguläres Sechseck ABCDEF, und hänget an selbiges das reguläre Viereck CDON. Halbiret die Seiten der Figuren, so entstehet das kleinere reguläre Sechseck GHIKLM, und das kleinere reguläre Viereck PQRS.

Das Sechseck GHIKLM wird bey Fig. 4. Tab. XXVII die Grundfläche eines eckigten Ellipsoids. Es wird aber das Sechseck mit sechs gleichschenklichten Triangeln umgeben, deren Schenkel aus der Seite des gefundnen kleinern Quadrats PQRS genommen werden. An jeden gleichschenklichten Triangel wird ein Quadrat von der Größe des gefunden PQRS angehänget; an jedes Quadrat wieder ein gleichschenklichter Triangel, und an einen derselben ein zweytes Sechseck von der Größe des gefundnen GHIKLM gesetzet, so wie solches bey Fig. 4. Tab. XXVII gezeiget worden.

(V) Auf

(V) Auf einander folgende Arten eckigter Ellipsoiden.

Das erste hieher gehörige Ellipsoid besteht aus 2 regulären Sechsecken, (welche die Standflächen sind,) aus 6 symmetrischen Sechsecken, und 6 regulären Quadraten. Fig. 2. Tab. XXXI. Das Netz wird zweymal gemacht.

NB. Die symmetrischen Sechsecke werden sowohl hier als in den folgenden Körpern dieser Classe, aus regulären Fünfecken erfunden, nach der Art, wie im §. 495. nach Anleitung der Fig. 26. Tab. IX gezeiget worden ist.

Das zweyte Ellipsoid besteht aus 2 regulären Achtecken, (welche die Standflächen sind,) aus 8 symmetrischen Sechsecken, 8 regulären Quadraten und 4 regulären Sechsecken. Fig. 3. Tab. XXXI. Das Netz wird zweymal gemacht, nur daß die regulären Sechsecke das zweytemal ausgelassen werden.

Das dritte Ellipsoid besteht aus 2 regulären Zehnecken, (welche die beyden Standflächen sind,) aus 10 symmetrischen Sechsecken, 10 regulären Vierecken, und 10 isosceliſchen Trapezien, welche aus regulären Sechsecken, deren Seiten den Seiten der andern Figuren gleich sind, erzeuget werden, und deswegen 5 gebrochne Sechsecke bey Zusammenlegung der Figuren vorstellen. Man beschreibet nemlich reguläre Sechsecke, ziehet eine Diagonale durch die Mitte, und kerbet solche auf der Pappe ein. Fig. 1. Tab. XXXI. Das Netz wird zweymal gemacht, nur daß das zweytemal die zur Formirung der Trapezien dienenden Sechsecken wegbleiben.

Das vierte Ellipsoid besteht aus 2 regulären Zwölfecken, (welche die beyden Standflächen sind,) aus 12 symmetrischen Sechsecken, 12 regulären Quadraten und 12 regulären Hexagonen. Fig. 6. Tab. XXXI. Das Netz wird zweymal gemacht.

(VI) Zerſtreuete Arten eckigter Ellipſoiden.

Das erſte Ellipſoid beſteht aus 10 regulären Vierecken und 8 gleichſeitigen Triangeln. Die beyden Standflächen ſind Vierecke. Fig. 5. Tab. XXXI. Das Netz wird zweymal gemacht.

Das zweyte Ellipſoid beſteht aus 2 regulären Fünfecken, welche die Standflächen ſind, 10 regulären Vierecken und 10 gleichſeitigen Triangeln. Fig. 4. Tab. XXXI. Das Netz wird zweymal gemacht.

Das dritte Ellipſoid beſteht aus 2 regulären Sechsecken, welche die Standflächen ſind, 6 regulären Vierecken, und 6 iſoſcelichen Trapezien. Die Trapezien werden aus der Hälfte eines regulären Sechsecks erzeuget, und das Netz wird zweymal gemacht. Fig. 7. Tab. XXXI.

Das vierte Ellipſoid beſteht aus 2 regulären Achtecken, welche die Standflächen ſind, aus 16 gleichſeitigen Triangeln, 16 regulären Vierecken, 16 regulären Fünfecken, und 16 gleichſchenklichten Triangeln. Fig. 9. Tab. XXXI. Das Netz wird zweymal gemacht, nur daß das zweytemal die oberſten 8 gleichſchenklichten Triangel wegbleiben.

Das fünfte Ellipſoid beſteht aus 2 regulären Zehnecken, welche die Standflächen ſind, 15 regulären Vierecken, 10 regulären Sechsecken, und zehn gleichſeitigen Triangeln. Fig. 10. Tab. XXXI.

Fünftes Buch,

welches

die Anfangsgründe

des

Decimalcalculs

enthält.

Anfangsgründe des Decimalcalculs.

§. 635.

Man weiß, daß jede Ziffer einer zuſammengeſetzten Zahl *) auſſer ihrem allgemeinen Wehrt, vermöge weſſen eine 1 = 1, eine 2 = 2, u. ſ. w. einen beſondern Wehrt von der Stelle hat, den ſie im Schreiben einnimmt, und daß vermöge dieſes localen Wehrts jede erſte Ziffer einer Zahl, von der Rechten gegen die Linke gerechnet, einfache Einheiten oder Einer enthält, daß die folgende zweyte Ziffer ſo viele Zehner enthält, als die Ziffer vermöge ihres allgemeinen Wehrts bezeichnet; daß die dritte Ziffer ſo viele Hunderte enthält, als die Ziffer vermöge ihres allgemeinen Wehrts bezeichnet, u. ſ. w. und daß folglich der locale Wehrt einer jeden Ziffer in Ratione decupla wächſet. Z. E. in der Zahl 1234567 bedeutet die erſte Ziffer zur Rechten, welche eine 7 iſt, 7 Einer; die folgende zweyte Ziffer 6 bedeutet 6 Zehner, oder 6 × 10 Einer, das iſt, ſie beſteht aus Einheiten, deren jede 10 mal gröſſer iſt, als die Einheit der vorhergehenden Ziffer 7; die folgende

*) Einfache Zahlen ſind die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, wozu man auch die Null rechnen kann, und zuſammengeſetzt alle diejenigen welche gröſſer als 9 ſind.

folgende Ziffer 5 bedeutet 5 Hunderter, oder 5×100 Einer; die folgende Ziffer 4 bedeutet 4 Tauſender oder 4×1000 Einer, u. ſ. w. nach der bekannten Progreßion Eins, Zehn, Hundert, Tauſend, Zehntauſend, Hunderttauſend, Zehnmalhunderttauſend oder eine Million, (zehn Millionen, hundert Millionen, tauſend Millionen, zehntauſend Millionen, hunderttauſend Millionen, zehnmal hunderttauſend Millionen oder eine Billion u. ſ. w.)

§. 636.

Wie man ſich nun, nach vorhergehender Vorſtellung, von der Rechten gegen die Linke allezeit 10mal größere Einheiten denken, und alſo auf dieſer Seite eine Reihe Zahlen ins Unendliche fortführen kann: ſo verhindert uns nichts, dieſe Reihe von der Stelle der Einer an, nach jener allgemeinen Regel von der Linken gegen die Rechte zu erweitern, und alſo auch auf dieſer Seite die Reihe der Einheiten ins Unendliche fortzuſetzen, mit der Bemerkung, daß, ſo wie dort (von der Rechten gegen die Linke,) der locale Wehrt der Ziffern von einer Stelle zur andern in zehnfacher Ration zunahm, ſo derſelbe allhier (von der Linken gegen die Rechte,) in zehnfacher Ration abnimmt, und daß folglich jede auf einen Einer folgende zweyte Ziffer allezeit 10 mal kleinere Einheiten, als die Einheiten der vorhergehenden Ziffer enthält; daß die dritte Ziffer allezeit 10mal kleinere Einheiten, als die Einheiten der vorhergehenden zweyten Ziffer, oder 100 mal kleinere als die Einheiten der erſten Ziffer enthält, und ſo weiter.

§. 637.

Da alle Zahlen, welche kleiner als 1 ſind, Brüche geben, ſo ſiehet man leicht, daß wir durch voriges Syſtem nichts als Brüche und zwar Decimalbrüche erhalten, ob wir uns gleich der Mühe überheben können, ſie in Form der Brüche zu ſchreiben, indem ſie mit den ganzen Zahlen nach einerley Geſetz ihre Stellen einnehmen. Damit man aber gleichwohl den Ort der einfachen Einheiten, welche

wir

wir allhier Ganze nennen wollen, und welche gleichsam der Mittelpunkt der Reihe sind, wissen möge, so hat man die Vorsicht, von selbigen die folgenden Ziffern durch ein Comma (oder durch einen Punct, wenn sonst kein Misverstand zu besorgen ist,) abzusondern, z. E.

1, 234567

und dieses heißet ein Ganzes, 2 Zehntheile, (das vorhergehende oder zum Grunde liegende Ganze wird in 10 gleiche Theile zerfället,) 3 Hunderttheile, (jedes vorige Zehntheil wird in 10 kleinere gleiche Theile zerfället,) 4 Tausendtheile (jedes durch vorige Theilung erhaltene Hunderttheil wird wieder in 10 kleinere gleiche Theile zerfället,) u. s. w. nach folgender Vorstellung:

$1, + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{6}{100000} + \frac{7}{1000000}$

und die Schreibart 1, 234567 ist $= 1 + \frac{234567}{1000000}$, nur daß die auf lezere Art geschriebenen Brüche Decimalbrüche, und die nach dem System der fortlaufenden Zahlen geschriebenen Brüche Decimalzahlen genennet werden. Man bedienet sich auch in dem erstern Fall der Benennung von arithmetischen, und in den leztern von geometrischen Decimalbrüchen. Der Decimalcalcul beschäftiget sich mit beyden, wiewohl wir allhier hauptsächlich auf die Decimalzahlen unser Augenmerk richten werden.

§. 638.

Der Erfinder des Decimalcalculs ist Johannes Regiomontanus, welcher selbigen nach der Bemerkung des Johannes Wallisius *tacite & inobseruate* bey der Trigonometrie eingeführet hat. Simon Stevinus und Heinrich Brigge haben ihn zuerst bey der Geometrie gebrauchet, und Johannes Hartmann Beyer, ein Doctor der Medicin zu Frankfurt am Mayn, hat nach dem Zeugniß des Freyherrn von Wolf, im Jahre 1618 zuerst am ausführlichsten davon geschrieben.

Erstes

Erſter Artikel.

Von dem Decimalcalcul in ungezeichneten Decimalen.

(1) Einen reinen arithmetiſchen Decimalbruch in einen geometriſchen zu verwandeln. §. 639.

1) Zählet die Anzahl der Ziffern, welche in dem Nenner des gegebnen Bruchs enthalten ſind. Dieſe Ziffern ſind allezeit eine 1 mit angehängten Nullen, als 10, 100, 1000 u. ſ. w. So viele Ziffern in dem Nenner enthalten ſind, mit ſo vielen Ziffern muß die Decimale geſchrieben werden. Wenn alſo der Nenner eine 10 iſt, ſo gehören nicht mehr als zwey Ziffern dazu; iſt derſelbe 100, ſo werden drey Ziffern erfordert, u. ſ. w. Es werden dieſe Ziffern aber aus Nullen und dem Zähler des gegebnen Bruchs zuſammengeſetzet, indem der Nenner ausgelaſſen wird. 2) Schreibet ſo viele Nullen weniger die Anzahl der im Zähler enthaltnen Ziffern hin, als in dem Nenner Ziffern enthalten ſind, und ſetzet den Zähler hinter her, von der Linken nach der Rechten gerechnet. 3) Schneidet von der erſten Nulle linker Hand die folgenden Ziffern durch ein Comma, (oder durch einen Punkt,) ab. Dieſe abgeſchnittne Ziffern werden eigentlich Decimale, und die Plätze, die ſie einnehmen, Decimalſtellen genennet. Z. E. den reinen arithmetiſchen Decimalbruch $\frac{32}{1000}$ in einen geometriſchen zu verwandeln, oder ſchlechtweg, den reinen Decimalbruch $\frac{32}{1000}$ mit Decimalzahlen zu ſchreiben.

Da der Nenner 1000 aus vier Ziffern beſteht, ſo werden vier Ziffern erfordert. Zwey derſelben ſind da, nemlich die 3 und 2 aus dem Zähler 32; und wenn für die annoch fehlenden zwey Ziffern zwey Nullen genommen, und dieſe durch ein Comma von einander unterſchieden werden, ſo wird ſeyn

$0,032 = \frac{32}{1000}$, und $\frac{32}{1000} = \frac{0}{1},\frac{0}{10} + \frac{3}{100} + \frac{2}{1000}$.

Ich füge zur Erläuterung vorhergehender Aufgabe einige Exempel von gemeinen Decimalbrüchen mit ihrem Ausdruck in Decimalzahlen hinzu, als:

$0,5 =$

$0,5 = \frac{5}{10}$	$0,20 = \frac{20}{100}$	$0,301 = \frac{301}{1000}$
$0,05 = \frac{5}{100}$	$0,020 = \frac{20}{1000}$	$0,0301 = \frac{301}{10000}$
$0,005 = \frac{5}{1000}$	$0,0020 = \frac{20}{10000}$	$0,00301 = \frac{301}{100000}$

und so weiter.

(II.) Einen unreinen, d. i. mit Ganzen begleiteten, arithmetischen Decimalbruch in einen geometrischen zu verwandeln. §. 640.

Es ist hiermit wie mit der vorigen Aufgabe bewandt, nur daß, 1) da hier Ganze sind, der vor den Decimalstellen vorhergehende Platz mit solchen, statt einer Nulle, ausgefüllet werden muß; 2) daß die Ganzen, sie mögen aus einer oder mehrern Ziffern bestehen, in Absicht auf die zur Verzeichnung der Decimalzahlen nöthige Anzahl von Ziffern, nur für eine Ziffer gezählet werden, und 3) daß die Ziffern also allhier aus Ganzen, aus Nullen und aus dem Zähler des gegebenen Bruchs bestehen. Jedoch sind Fälle, wo bloß die Ganzen und der Zähler allein gebrauchet werden, wenn nemlich die erforderliche Anzahl von Ziffern durch die Ganzen und den Zähler allein voll wird, wie wir aus einigen folgender Exempel sehen werden. Es sey der unreine Decimalbruch $45\frac{32}{1000}$ mit Decimalzahlen zu schreiben.

Der Nenner 1000 besteht aus vier Ziffern, und mit eben so viel Ziffern soll der Bruch geometrisch geschrieben werden. Drey derselben sind bereits da, nemlich die beyden Ziffern 3 und 2 des Zählers 32, und die für nichts mehr als eine Ziffer gerechnete ganze Zahl 45. Wir brauchen also nur annoch eine, und diese ist eine Null, welche zwischen der ganzen Zahl 45 und dem Zähler 32 ihren Platz erhalten muß. Wir werden also die Schreibart 45,032 herausbringen, und es wird seyn

$$45,032 = 45\frac{32}{1000} = \frac{45}{1} + \frac{0}{10} + \frac{3}{100} + \frac{2}{1000}$$

Hier sind, zur Erläuterung der Aufgabe, einige Exempel von gleichgeltenden geometrischen und arithmetischen Decimalausdrücken.

$$2{,}5 = 2\tfrac{5}{10} \qquad 12{,}5 = 12\tfrac{5}{10} \qquad 304{,}5 = 304\tfrac{5}{10}$$
$$2{,}05 = 2\tfrac{5}{100} \qquad 12{,}05 = 12\tfrac{5}{100} \qquad 304{,}05 = 304\tfrac{5}{100}$$
$$2{,}005 = 2\tfrac{5}{1000} \qquad 12{,}005 = 12\tfrac{5}{1000} \qquad 304{,}005 = 304\tfrac{5}{1000}$$

und so weiter.

Ferner:

$$6{,}43 = 6\tfrac{43}{100} \qquad 57{,}89 = 57\tfrac{89}{100} \qquad 320{,}45 = 320\tfrac{45}{100}$$
$$6{,}043 = 6\tfrac{43}{1000} \qquad 57{,}089 = 57\tfrac{89}{1000} \qquad 320{,}045 = 320\tfrac{45}{1000}$$
$$6{,}0043 = 6\tfrac{43}{10000} \qquad 57{,}0089 = 57\tfrac{89}{10000} \qquad 320{,}0045 = 320\tfrac{45}{10000}$$

(III.) Decimalzahlen in arithmetische Decimalbrüche zu verwandeln, z. E. 0,03056 und 321,602. §. 641.

α) Schreibet einen dekadischen Nenner von soviel Ziffern hin, als in 0,03056 Ziffern enthalten sind. Solche sind allhier sechs, und also wird der Nenner seyn = 100000. Nehmet die bedeutenden Ziffern 3056 aus den Decimalzahlen heraus, und setzet sie über den gefundenen Nenner, so wird seyn

$$\tfrac{3056}{100000} = 0{,}03056 = \tfrac{0}{10} + \tfrac{3}{100} + \tfrac{0}{1000} + \tfrac{5}{10000} + \tfrac{6}{100000}$$

β) Schreibet einen dekadischen Nenner von soviel Ziffern hin, als Decimalstellen + 1, in 321,602 enthalten sind. Solche sind allhier drey, nemlich 6,0 und 2. Diese drey Decimale + 1, (wegen der nach dem obigen Unterricht nur für eine Ziffer gerechneten ganzen Zahl 321,) geben den Nenner 1000. Nehmet die Decimalen 602 aus den gegebenen Zahlen heraus,

aus, ſetzet ſie über den Nenner 1000, und ſchreibet die ganze Zahl 321 vorher, ſo wird ſeyn

$$321\frac{602}{1000} = 321,602 = \frac{321}{1} + \frac{6}{10} + \frac{0}{100} + \frac{2}{1000}$$

(IV) Einen Decimalbruch in einen andern von gleichem Wehrt zu verändern. §. 642.

Multiplicirt den Zähler und Nenner des Bruchs durch eine gleiche dekadiſche Zahl, wenn er in kleinern Sorten von Decimalen erſcheinen ſoll, und dividirt beyde durch eine gleiche dekadiſche Zahl, wenn der Bruch in gröſſern Sorten erſcheinen ſoll. Auf dieſe Weiſe wird $\frac{3}{10}$ in $\frac{30}{100}$ oder $\frac{300}{1000}$, und umgekehrt $\frac{300}{1000}$ in $\frac{30}{100}$ oder $\frac{3}{10}$ verwandelt werden, und es wird beſtändig ſeyn

$$\frac{3}{10} = \frac{30}{100} = \frac{300}{1000} \text{ u. ſ. w.}$$

Eben ſo verhält es ſich mit den Decimalzahlen 0,3 = 0,30 = 0,300 u. ſ. w.

(V) Einen gemeinen Bruch in Decimalzahlen zu überſetzen. §. 643.

1) Hänget dem Zähler ſo viele, durch ein Comma von ſelbigem abgeſonderte, Nullen an, bis der Nenner durch die Diviſion in ſelbigen aufgeht. 2) Schneidet von dem Quotienten ſo viele Decimalſtellen ab, als dem Zähler Nullen angehänget werden. Z. E.

Es ſey $\frac{3}{4}$ in eine Decimalzahl zu verwandeln.

Saget: 4) $\frac{3,00}{0,75} = \frac{75}{100}$

Die Zahlen 0,75 geben die Decimalzahl, und

$$0,75 = \frac{3}{4} = \frac{75}{100}$$

Es ſey $\frac{7}{8}$ in eine Decimalzahl zu verwandeln.

Saget: 8) $\frac{7,000}{0,875} = \frac{875}{1000}$

Die Zahlen 0,875 geben die Decimalzahl, und

$$0,875 = \frac{7}{8} = \frac{875}{1000}.$$

a) Wenn der Nenner nicht in den Zähler aufgehet, und der gemeine Bruch alſo nicht aufs genaueſte durch eine

Decimalzahl ausgedrücket werden kann, so lässet man es bey der Annäherung bewenden, und begnüget sich mit 1000 oder 10000 ꝛc. Decimaltheilen. Z. E.

Es sey $\frac{1}{3}$ in eine Decimalzahl zu verwandeln.

Saget: 3) $\frac{1,0000}{0,3333} = \frac{3333}{10000}$

Es sey $\frac{3}{11}$ in eine Decimalzahl zu verwandeln.

Saget: 11) $\frac{3,000}{0,272} = \frac{272}{1000}$

Da der Quotient 3333 des ersten Exempels mit einem Rest von $\frac{1}{3}$ kömmt, und allezeit ein Rest bleibet, man mag die Division mit 3 fortsetzen, so lange man will: so lässet sich der Bruch $\frac{1}{3}$ nicht vollkommen ausdrücken, ob man gleich der Wahrheit desto näher kömmt, je mehr Nullen dem Zähler angehänget werden.

β) Die hieher gehörigen Aufgaben können auch nach der Regel detri aufgelöset werden, wenn man saget, z. E. um $\frac{3}{4}$ in eine Decimalzahl zu verwandeln:

Wie der Nenner 4 zu dem Zähler 3: so der Nenner 10, oder 100, oder 1000 u. s. w. zu dem kommenden Zähler, als:

4: 3 = 10: $7\frac{1}{2}$ = $7\frac{1}{2}$. Ferner 4: 3 = 100: 75. Also $\frac{75}{100}$ = 0,75.

γ) Wenn eine ganze Zahl in einen gemeinen Bruch verwandelt werden soll, so setzet man bekanntermassen solche zum Zähler und die Einheit zum Nenner. Auf diese Art wird z. E. die Zahl 7 in den Bruch $\frac{7}{1}$ verwandelt. Soll dieser gemeine Bruch in einen Decimalbruch verwandelt werden, so hänget man dem Zähler und Nenner gleich viele Nullen an, und machet $\frac{7}{1}$ zu $\frac{70}{10}$ oder $\frac{7000}{1000}$, wie man aus der IVten Aufgabe des Decim. Calc. gesehen hat. In allen diesen Fällen lieget ein uneigentlicher Decimalbruch zum Grunde. Soll derselbe mit Decimalzahlen geschrieben werden, so ist $\frac{7}{1} = \frac{70}{10} = 7,0$. Man verwandelt dergleichen uneigentliche Decimalbrüche in eigentliche, indem man den Zähler durch den Nenner theilet, und z. E. $\frac{15}{10}$ in $1\frac{5}{10}$, und $\frac{41}{10}$ in $4\frac{1}{10}$ übersetzet, und alsdenn wird $\frac{15}{10} = 1\frac{5}{10} = 1,5$ und $\frac{41}{10} = 4\frac{1}{10} = 4,5$ seyn.

Anmer-

Anmerkung.

Wenn der Nenner keine 10 oder 100 ꝛc. und also der Bruch ein gemeiner Bruch iſt, ſo hänget man, wie gezeiget worden iſt, dem Zähler Nullen an, und dividiret mit dem Nenner in den Zähler. Z. E. $\frac{16}{5}$ in einen Decimalbruch zu verwandeln. Saget:

$$5)\frac{16,0}{3,2} = 3\frac{2}{10}$$

(VI) Ungezeichnete Decimalzahlen zu addiren und zu ſubtrahiren. §. 644.

Schreibet die Ganzen von der Rechten gegen die Linke, und die Decimalen von der Linken gegen die Rechte unter einander, dergeſtalt daß die Zehntheile unter Zehntheilen kommen, und die Hundertheile unter Hundertheilen, u. ſ. w. als:

0,4023	23,4	98,764	5,765
0,9312	1,0006	3,213	5,012
1,3335 Summe	7,03	Reſt 95,551	Reſt 0,753
	4,00405		
	35,43465 Summe		

a) Wenn zwey Zahlen von einander ſubtrahiret werden ſollen, und die eine mehr Decimale enthält, als andere, ſo hänget man der andern ſo viele Nullen an, als nöthig iſt, um die Anzahl der Ziffern in beyden Zahlen gleich zu machen, indem der Wehrt des Bruchs im geringſten nicht dadurch verändert wird. Z. E. wenn die Zahl 1,203456 von 5,34 oder wenn 1,2 von 52,346 abgezogen werden ſoll, ſo iſt

5,340000	52,346
1,203456	1,200
Reſt 4,136544	Reſt 51,146

β) Wenn gemeine Brüche durch Decimalzahlen vollkommen ausgedrücket werden können, ſo iſt die Addition

und Subtraction derſelben in Decimalzahlen allezeit bequemer, als in gemeinen Brüchen.

Es ſey zum Exempel $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{5}$ zu addiren.

In Decimalzahlen.

Es iſt $\frac{1}{2}=0,5$, und $\frac{3}{4}=0,75$, u. $\frac{4}{5}$ durch $\frac{40}{5}=0,8$.

Alſo 0,5
0,75
0,8
Summ. $2,05=2\frac{5}{100}=2\frac{1}{20}$

In gemeinen Brüchen.

Die Nenner ſind alſo 2, 4, 5 und die Zähler 1, 3, 4.

Alſo $2\times4\times5=$ $2)\frac{40}{20}$ $4)\frac{40}{10}$ $5)\frac{40}{8}$
$\times1$ $\times3$ $\times4$
$\frac{}{20}$ $\frac{}{30}$ $\frac{}{32}$

und $\frac{20}{40}+\frac{30}{40}+\frac{32}{40}=\frac{82}{40}=2\frac{2}{40}=2\frac{1}{20}$ Summe.

Es ſey zum Exempel $\frac{1}{2}$ von $1\frac{3}{4}$ zu ſubtrahiren.

In Decimalzahlen.

Es iſt $\frac{1}{2}=0,5$, und $1\frac{3}{4}=1,25$.

Alſo 1,25
0,5
$0,75=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$ Reſt oder Differenz.

In gemeinen Brüchen.

Da $1\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$, ſo ſind die Nenner 2 und 4, und die Zähler 1 u. 5.

Alſo $2\times4=$ $2)\frac{8}{4}$ $4)\frac{8}{2}$
$\times1$ $\times5$
$\frac{}{4}$ $\frac{}{10}$.

und $\frac{10}{8}-\frac{4}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ Reſt oder Differenz

(VII) Ungezeichnete Decimalzahlen zu multipliciren. §. 645.

1) Schreibet die Zahlen unter einander, und multiplicirt ſie wie bey der gewöhnlichen Multiplication, ohne auf die abgeſonderten oder Decimalzahlen Acht zu haben. 2) Schneidet, nach vollbrachter Multiplication, ſo viele Decimale von dem Producte ab, als in beyden Factoren (dem Multiplicanden und Multiplicator,) Decimale enthalten ſind. Wenn der eine Factor eine ganze Zahl iſt, ſo werden von dem Producte ſo viele Decimale abgeſondert, als in dem

dem andern Factor Decimale enthalten ſind. Z. E. 2,34 durch 5,6, ingleichen 6,4 durch 2 zu multipliciren. Ich füge zugleich von dem erſten Exempel eine Ausarbeitung in gemeinen Brüchen hinzu, um die Uebereinſtimmung des Products zu zeigen.

Geometriſch.

2,34
5,6
1404
1170
13,104 = $13\frac{104}{1000}$
Product.

Arithmetiſch.

Es iſt $2,34 = 2\frac{34}{100} = \frac{234}{100}$ und $5,6 = 5\frac{6}{10} = \frac{56}{10}$.
Alſo $\frac{234}{100} \times \frac{56}{10} = \frac{13104}{1000} = 13\frac{104}{1000}$ Product

ferner geometriſch.

6,4
2
12,8

Wenn das Product nicht ſo viele Decimale enthält, als von ſelbigem abgeſchnitten werden müſſen, ſo füget man linker Hand ſo viele Nullen hinzu, als Decimale fehlen, und ſchreibet eine Nulle davor, um dem Commati einen Ort zu verſchaffen. Z. E. Wenn 0,0067 durch 0,12 multipliciret werden ſoll, ſo iſt

0,0067
0,12
134
67
0,000804 Product.

Wenn der eine Factor ganze Zahlen mit einer Folge von Nullen hat, ſo iſt die Anzahl der Nullen entweder gröſſer oder kleiner, als die Anzahl der Decimalen des andern Factors. Bey dieſen Vorfällen wird folgendergeſtalt verfahren.

α) Wenn die Anzahl der Nullen gröſſer als die Anzahl der Decimalen iſt, ſo ziehet dieſe von jener ab, und ſetzet dem Product ſo viele Nullen zu, als der Reſt Einheiten enthält, indem bey der Multiplication auf die Nullen nicht Acht gegeben worden. Z. E. wenn

1,23 durch 650000, oder 650000 durch 1,23 multipliciret werden soll, so ist

1,23
650000
615
738
799500

Hier ist die Anzahl der Decimalen (23) um 2 kleiner als die Anzahl der Nullen (0000). Also werden 4—2 = 2 Nullen zum Product 7995 gesetzet.

β) Wenn die Anzahl der Nullen kleiner als die Anzahl der Decimalen ist, so ziehet jene von dieser ab, und schneidet von dem Producte, in welchem auf die Nullen nicht Acht gegeben worden, so viele Decimale ab, als der Rest Einheiten enthält. Z. E. wenn 1,2367 durch 65000 multipliciret werden soll, so ist

1,2367
65000
61835
74202
80385,5

Hier ist die Anzahl der Decimalen (2367) in dem einen Factor = 4, und die Anzahl der Nullen in dem andern = 3. Also muß man 4—3 = 1, oder eine Decimale von dem Producte absondern.

(VIII.) Ungezeichnete Decimalzahlen zu dividiren. §. 646.

Schreibet die Zahlen unter einander, wie bey der ordentlichen Division, und dividiret wie eben daselbst.

1) Wenn der Dividende aus mehreren Decimalen besteht wie der Divisor, so schneidet von dem Quotienten soviele Decimale ab, als der Dividende mehr wie der Divisor enthält. Z. E. 51,96 durch 1,23 zu dividiren. Ich füge zugleich eine Ausarbeitung des ersten Exempels in gemeinen Brüchen hinzu, um die Uebereinstimmung der Operationen in Absicht auf den Quotienten zu zeigen, als: geo-

geometriſch.

$\frac{51,96}{1,2} = 43,3 = 43\frac{3}{10}$

Ingleichen 5,196 durch 1,2 zu dividiren. Saget:

$\frac{5,196}{1,2} = 4,33 = 4\frac{33}{100}$

arithmetiſch.

Es iſt $51,96 = 51\frac{96}{100} = \frac{5196}{100}$

und $1,2 = 1\frac{2}{10} = \frac{12}{10}$

Alſo $\frac{5196}{100} \times \frac{12}{10} = \frac{51960}{1200} =$

$43\frac{36}{120} = 43\frac{3}{10} = 43,3.$

Wenn im vorigen und in den folgenden Fällen die Diviſion nicht aufgehet, ſo hänget man dem Dividenden ſoviele Nullen an, als nöthig iſt, entweder um den Reſt zu heben, oder um ſolchen nur ſo genau als möglich zu bekommen. Z. E.

Wenn 0,6 durch 0,04 getheilet werden ſoll, ſo iſt

$\frac{0,460}{0,04} = 11,5$

Hier wird der Reſt völlig gehoben.

Wenn 3,452 durch 1,2 getheilet werden ſoll, ſo iſt

$\frac{3,452000}{1,2} = 2,87666$

Hier bleibet beſtändig ein Reſt.

2) Wenn der Diviſor aus eben ſoviel Decimalen beſteht, als der Dividende, und der Quotient keinen Reſt mit ſich führet, ſo wird von dem Quotienten keine Decimale abgeſondert, indem er ein Ganzes macht. Z. E. wenn 519,6 durch 1,2 oder 0,12 durch 0,04 getheilet werden ſoll, ſo iſt

$\frac{519,6}{1,2} = 433 \qquad \frac{0,12}{0,04} = 3$

3) Wenn der Diviſor aus mehr Decimalen beſteht, als der Dividende, ſo hänget man dem Dividenden ſoviele Nullen an, als Stellen fehlen, um die Diviſion nach dem vorhergehenden bey 1) oder 2) gehörig zu vollziehen. Z. E.

Wenn 8,4 durch 1,12 getheilet werden ſoll, ſo iſt

$\frac{8,400}{1,12} = 7,5 = 7\frac{5}{10}$

Wenn 64,92 durch 0,0012 getheilet werden ſollen, ſo iſt

$\frac{64,9200}{0,0012} = 54100$

4) Wenn der Diviſor eine ganze Zahl iſt, und der Dividende allein Decimale hat, ſo ſondert von dem Quotienten ſoviele Ziffern ab, als Decimale im Dividenden enthalten ſind. Z. E.

Wenn 130,2 durch 42 getheilet werden ſoll, ſo iſt

$$\frac{130,2}{42} = 3,1$$

Wenn 6,492 durch 12 getheilet werden ſoll, ſo iſt

$$\frac{6,492}{12} = 0,541.$$

5) Wenn der Diviſor rechter Hand zugleich Nullen hat, ſo verlängert den Dividenden mit ſoviel Nullen als nöthig iſt, um die Diviſion zu vollziehen. Z. E. wenn 6,492 durch 120 dividiret werden ſoll, ſo ſaget $\frac{6,4920}{120} = 5,41.$

6) Wenn der Dividende eine ganze Zahl iſt, und der Diviſor allein Decimale hat, ſo füget dem Dividenden ſoviele Nullen hinzu, als Decimale im Diviſor enthalten ſind, und ſehet den Diviſor als eine ganze Zahl an. Z. E.

Wenn 6492 durch 0,12 dividiret werden ſoll, ſo iſt

$$\frac{6492}{0,12} = \frac{649200}{12} = 54100.$$

7) Wenn der Diviſor linker Hand Nullen hat, und der Dividende keine, ſo dividiret bloß mit den bedeutenden Zahlen, ohne auf die Nullen Acht zu haben. Z. E. wenn 6,492 durch 0,12 dividiret werden ſoll, ſo dividiret 6,492 durch 12, und der Quotient wird ſeyn = 54,1 gleich dem Quotienten von $\frac{6,492}{0,12}$.

8) Wenn der Dividende linker Hand Nullen hat, und der Diviſor keine, ſo dividiret, wie vorhin, mit den bedeutenden Zahlen allein, und verlängert den Quotienten linker Hand mit ſoviel Nullen, als nöthig iſt, um ſelbigem die nöthige Anzahl von Ziffern zu verſchaffen. Z. E. wenn 0,006492 durch 1,2 dividiret werden ſoll, ſo dividiret 6492 durch 12, und ſchreibet vor dem Quotienten 541 drey Nullen,

len, als 0,00541. Da nemlich von dem Quotienten soviele Decimale abzusondern sind, als der Dividende mehr wie der Divisor enthält, jener aber 6 Decimale und dieser nur eine enthält, und also fünf Decimale abgesondert werden müssen, weil 6 — 1 = 5: so muß, da der Quotient nur drey Ziffern giebet, die Anzahl der zwey fehlenden durch soviel Nullen ersetzet, und vor selbigen, wegen des Commatis, noch eine andere Null vorangeschicket werden, und daher wird der Quotient seyn = 0,00541.

9) Wenn sowohl der Dividende als der Divisor linker Hand Nullen hat, z. E. wenn 0,006492 durch 0,12 zu dividiren ist, so dividiret, wie vorhin, die bedeutenden Zahlen mit den bedeutenden allein, und verlängert den Quotienten linker Hand mit soviel Nullen als nöthig ist, um selbigem die nöthige Anzahl Ziffern zu verschaffen. Dividiret also 6492 durch 12, und verlängert den Quotienten 541 durch zwey Nullen; so kömmt 0,0541, und es wird seyn

$$\frac{0,006492}{0,12} = 0,0541$$

10) Wenn der Dividende für den Divisor zu klein ist, so verlängert den Dividenden durch eine oder mehr Nullen. Z. E. wenn 0,002 durch 25 zu dividiren ist, so verwandelt den Dividenden in 0,00200. Wenn nun $\frac{200}{25} = 8$, so ist der Quotient, um die fünf Decimalstellen für selbigen zu erhalten, = 0,00008.

Anmerkung.

Wenn irgendwo ein bedenklicher Fall vorkömmt, so probire man die Division durch die Multiplication, oder man arbeite die Aufgabe arithmetisch aus, und übersetze hernach den Quotienten in eine Decimalzahl.

(IX.) Die Quadratwurzel aus ungezeichneten Decimalzahlen zu ziehen. §. 647.

Die Ausziehung der Quadratwurzel an sich geschiehet auf die im §. 63 sq. gelehrte Art; nur ist zu merken, 1) daß, bey Classificirung der Ziffern einer Quadratzahl, das Comma allezeit am Ende einer Classe stehen muß, oder welches einerley

ist,

ist, daß man erst die Ganzen von der Rechten gegen die Linke, und alsdenn die Decimalen von der Linken gegen die Rechte classificiret; 2) daß, wenn die Anzahl der Decimalen ungerade ist, man allezeit am Ende, oder rechter Hand, eine Nulle hinzufüget, um die Classe voll zu machen; 3) daß, wenn die Wurzel mit einem Rest begleitet ist, man entweder eine, zwey oder mehr ganze Classen anhänget, je nachdem man die Wurzel genauer haben will, und 4) daß man von der gefundnen Wurzel soviele Decimale absondert, als Classen von Decimalen in der Quadratzahl enthalten sind. Z. E. die Quadratwurzel zu ziehen

α) Aus 2,4964.

geometrisch.

Also $\sqrt{2,|49|64}$

$1,58 = 1\frac{58}{100}$ die Quadratwurzel.

arithmetisch.

Es ist $2,4964 = 2\frac{4964}{10000} = \frac{24964}{10000}$

Also $\sqrt{\frac{24964}{10000}} = \frac{158}{100} = 1\frac{58}{100} = 1,58$

die gefundne Quadratwurzel.

β) Aus 24,964

Hier wird in der Ausarbeitung eine Null hinzugefüget, nach der Vorschrift bey 2).

Also $\sqrt{24,|96|40}$

$4,99 = 4\frac{99}{100}$ die Quadratwurzel.

Oder durch mehrere Annäherung.

$\sqrt{24,|96|40|00}$

$4,996 = 4\frac{996}{1000}$ die Quadratwurzel.

γ) Aus 249,64.

Also $\sqrt{2|49,|64}$

$15,8 = 15\frac{8}{10}$ die Quadratwurzel.

δ) Aus 2496,4.

Also $\sqrt{24|96,|40|}$

$49,9 = 49\frac{9}{10}$ die Quadratwurzel.

Oder durch mehrere Annäherung.

$\sqrt{24|96,|40|00}$

$49,96 = 49\frac{96}{100}$ die Quadratwurzel.

Anmerkung.

Man wird gefunden haben, daß die Ziffern der vorhergehenden Exempel überall einerley sind, als 24964, und daß gleichwohl bey α) und γ) die Wurzel = 158, und bey β) und δ) die Wurzel 499 ist. Dieser Unterscheid rühret von der verschiedenen Setzung des Commatis her, und es ist hiermit wie mit den geraden und ungeraden Kennziffern der Logarithmen beschaffen, da z. E. ganz andere Zahlen

für

für die Quadratwurzel kommen, wenn ein durch 4 characteriſirter Logarithmus durch 2 getheilet wird, als wenn er die 5 zur Kennziffer hat, wie aus folgenden Exempeln zu erſehen iſt.

2) $\frac{4,3973142}{2,1986571}$ Valor 158. 2) $\frac{5,3973142}{2,6986571}$ Valor 499.

Ungeachtet alles dieſes aus der Natur der Sache klar iſt, da der durch 4 characteriſirte Logarithmus die Zahl 24964, und der durch 5 die Zahl 249640 zu ſeinem Werthe hat, und folglich, nach den gewöhnlichen Extractionsregeln, die erſtere Zahl wie 2|49|64, und die leztere wie 24|96|40 claßificiret wird: ſo iſt es dennoch vielleicht nicht überflüßig, wegen gewiſſer öfters vorkommenden beſonderen Fälle auf dieſen Umſtand aufmerkſam gemachet zu werden. Auch aus vorigen Gründen iſt es nicht einerley, ob man, in einer Quadratzahlentabelle, die Wurzel einer unvollkommenen □ Zahl z. E. unter den aus 4, 6, 8, 10ic. oder 5, 7, 9, 11ic. Ziffern in jeder Reihe beſtehenden Columnen ſuchet.

(X.) Die Cubikwurzel aus ungezeichneten Decimalzahlen zu ziehen. §. 648.

Die Ausziehung der Cubikwurzel an ſich geſchicht auf die im §. 65 ſq. oben gelehrte Art; nur iſt zu merken, 1) daß bey Claßificirung der Ziffern einer Cubikzahl, das Comma allezeit am Ende einer Claſſe ſtehen muß, oder welches einerley iſt, daß man erſt die Ganzen von der Rechten gegen die Linke, und alsdenn die Decimalen von der Linken gegen die Rechte claßificiret; 2) daß, wenn die lezte Claſſe nur eine oder zwey Decimale enthält, man zwey oder eine Nulle hinzufüget, um die Claſſe voll zu machen; 3) daß, wenn die Wurzel mit einem Reſt begleitet iſt, man entweder eine, zwey oder mehr ganze Claſſen anhänget, je nachdem man die Wurzel genauer haben will; und 4) daß man von der gefundenen Wurzel ſoviele Decimale abſondert, als Claſſen von Decimalen in der Cubikzahl enthalten ſind. Z. E. Die Cubikwurzel zu ziehen

α) aus 9,70299.

Geometriſch. Hier wird in der Ausarbeitung eine Null hinzugefüget, um die Claſſe voll zu machen.

Also $\sqrt[3]{\overline{9,|702|990}} = 2,13 = 2\frac{13}{100}$ Cubikwurzel.

Arithmetisch.

Es ist $9,702990 = 9\frac{702990}{1000000} = \frac{9702990}{1000000}$

Also $\sqrt[3]{\frac{9702990}{1000000}} = \frac{213}{100} = 2\frac{13}{100} = 2,13$ die gefundne Cubikwurzel.

β) Aus 97,0299.

Hier werden zwey Nullen hinzugefüget, um die Classe voll zu machen.

Also $\sqrt[3]{\overline{97,|029|900}} = 4,59 = 4\frac{59}{100}$ Cubikwurzel.

γ) Aus 970,299.

Also $\sqrt[3]{\overline{970,|299}} = 9,9 = 9\frac{9}{10}$ Cubikwurzel.

δ) Aus 9702,99.

Hier wird zuvörderst eine Null hinzugefüget, um die Classe voll zu machen, und hernach annoch eine ganze Classe von Nullen angehänget, um desto genauer die Wurzel zu finden.

Also $\sqrt[3]{\overline{9|702,|990|000}} = 21,32 = 21\frac{32}{100}$ Cubikwurzel.

ε) Aus 97029,9.

Hier sind zuvörderst zwey Nullen hinzugefüget worden, um die Classe voll zu machen, und alsdenn ist noch eine ganze Classe von Nullen hinzugekommen.

Also $\sqrt[3]{45,95} = 45\frac{95}{100}$ Cubikwurzel.

Anmerkung

Ungeachtet die Ziffern der vorhergehenden Exempel alle einerley sind, nemlich 970299: so ist gleichwohl bey γ) eine andere Wurzel gekommen, als bey α) und β), und bey δ) findet sich wieder eine andere Wurzel. Die Ursache dieser Verschiedenheit ist die verschiedne Setzung des Commatis. Man sehe die Anmerkung zur vorhergehenden 1Xten Aufgabe die: Quadratwurzel aus Decimalzahlen zu ziehen, und applicire das daselbst gesagte verhältnißmäßig hieher.

Zweyter Artikel.

Von dem Decimalcalcul in gezeichneten Decimalen.

§. 649.

Eine angenommene Größe, nach welcher andere Größen von eben dieser Art ausgemessen werden, wird ein **Maaß** genennet, und nach dem dreyfachen Unterscheid der Größen in ein **Längen-, Flächen-** und **Körpermaaß** unterschieden. Zum Längenmaaß bedienet man sich gerader Linien; zum Flächenmaaß eines Quadrats, und zum Körpermaaß eines Cubus; daher das Flächenmaaß auch **Quadratmaaß**, und das Körpermaaß **Cubikmaaß** genennet wird. Diese beyde leztere Maaßen, das Quadrat- und Cubikmaaß, werden durch die bloße **Rechnung** gefunden.

§. 650.

Das größte in der Geometrie gebräuchliche Maaß wird eine **Ruthe** genennet, die, wenn sie von 10 zu 10 eingetheilet wird, eine **Decimal-** oder **zehntheilige Ruthe**, und wenn sie von 12 zu 12 eingetheilet wird, eine **Duodecimal-** oder **zwölftheilige Ruthe**, insgemein **rheinländische Ruthe**, genennet wird. In beyderley Maaßen wird dasjenige, dessen man sich zur Vorstellung einer

Größe

Größe im Kleinen bedienet, ein verjüngtes Maaß, oder ein verjüngter Maaß- oder Zollſtab genennet. Wir werden allhier mit keinem andern als dem Decimalmaaß zu thun haben.

(XI.) Ein Decimalmaaß in ein duodecimales, und umgekehrt, ein Duodecimalmaaß in ein decimales zu verwandeln. §. 651.

Saget: wie 10 zu 12, ſo die im Decimalmaaß gegebne Größe zu der im Duodecimalmaaß kommenden Größe; und umgekehrt: wie 12 zu 10, ſo die im Duodecimalmaaß gegebne Größe zu der im Decimalmaaß kommenden Größe. Z. E. Wenn die im Decimalmaaß gegebne Größe = 75, ſo iſt die im Duodecimalmaaße = 90, indem

10:12=75:90, und 12:10=90:75.

§. 652.

Die Theile einer Ruthe ſind Schuhe, Zolle, Linien und Scrupel, welche leztere Theile in 1ſte, 2te, 3te, 4te Scrupel, u. ſ. w. unterſchieden werden. In allen drey Größenmaaßen zeichnet man, nach der neuen Manier, die Ruthen durch (°); die Schuhe durch (′); die Zolle durch (″); die Linien durch (‴); die erſten Scrupel durch (⁗); die zweyten Scrupel durch (′); die dritten Scrupel durch (″), u. ſ. w. Anſtatt Schuh ſaget man auch Fuß; anſtatt Zoll Daumen, und anſtatt Linie Gran. Man pfleget aber im Längenmaaß nur die äußerſte Ziffer rechter Hand zu zeichnen; im Flächenmaaß wird der äußerſten Signatur ein □, und im Körpermaaß ein C (das iſt *Cubus*) angehänget. Wann in irgend einem Exempel das Größenmaaß nicht beſtimmet wird, ſo verſtehet man allezeit das Längenmaaß.

Erſte Anmerkung.

In den gezeichneten Decimalen wird das Comma, deſſen man ſich in dem ungezeichneten Decimalcalcul bedienet, weggelaſſen, als:

Gezeichnet.	Ungezeichnet
12° 34′56″□	12,3456

Zweyte Anmerkung.

Da die Grade, Minuten und Secunden ꝛc. eines Zirkels, wie schon in der 1sten Anmerkung zum §. 120 gesaget worden, ebenfalls wie die Ruthen, Schuhe und Zolle ꝛc. des Decimalmaaßes, durch °, ′, ″ u. s. w. gezeichnet werden, so kann man zum Unterscheid die Zeichen des Zirkelmaaßes durch Commata (oder Punkte) von einander absondern, und diesem zu Folge wird z. E. 45°, 30′, 20″ Zirkelmaaß und 45° 30′ 20″ Decimalmaaß bezeichnen. Jenes heißet also 45 Grade, 30 Minuten, 20 Secunden, und dieses 45 Ruthen, 30 Schuhe und 20 Zolle.

§. 653.

Es enthält aber im **Längenmaaße** eine Decimalruthe 10 Schuhe, 1 Schuh 10 Zolle, 1 Zoll 10 Linien, 1 Linie 10 erste Scrupel, 1 erstes Scrupel 10 zweyte Scrupel, u. s. w.

Folglich ist $1^{\circ} = 10' = 100'' = 1000'''$
$1' = 10'' = 100''' = 1000''''$
$1'' = 10''' = 100'''' = 1000''''' \text{ u. s. w.}$

Im **Flächenmaaße** enthält eine zehntheilige Quadrat-Ruthe 100 □ Schuhe; ein □ Schuh 100 □ Zolle, 1 □ Zoll 100 □ Linien, u. s. w.

Folglich ist $1^{\circ}\square = 100'\square = 10000''\square$
$1'\square = 100''\square = 10000'''\square$
$1''\square = 100'''\square = 10000''''\square \text{ u. s. w.}$

Es ist aber eine **Quadratruthe** ein durch Rechnung concipirtes Quadrat, welches 1 Ruthe lang und 1 Ruthe breit ist; ein **Quadratschuh** ein solches Quadrat, welches 1 Schuh lang und 1 Schuh breit ist; ein Quadratzoll ein solches Quadrat, welches 1 Zoll lang und 1 Zoll breit ist, u. s. w.

Im **Körpermaaß** enthält eine zehntheilige Cubikruthe 1000 Cubikschuhe; ein Cubikschuh 1000 Cubikzolle; ein Cubikzoll 1000 Cubiklinien, u. s. w.

Folglich ist $1^{\circ c} = 1000'^{c} = 1000000''^{c}$
$1'^{c} = 1000''^{c} = 1000000'''^{c}$
$1''^{c} = 1000'''^{c} = 1000000''''^{c} \text{ u. s. w.}$

Es ist aber eine Cubik- oder Würfelruthe ein durch Rechnung in Form eines Würfels concipirtes Maaß, welches 1 Ruthe lang, 1 Ruthe breit, und 1 Ruthe dick (das ist hoch oder tief) ist; ein Cubikschuh ein solches Maaß, welches 1 Schuh lang, 1 Schuh breit und 1 Schuh dick ist; ein Cubikzoll ein solches Maaß, welches 1 Zoll lang, 1 Zoll breit und 1 Zoll dick ist, u. s. w.

(XII.) Ruthen in Schuhe, Schuhe in Zolle, Zolle in Linien, u. s. w. oder größere Sorten von Decimaltheilen in kleinere zu verwandeln, welche zusammengenommen der größern gleich sind. §. 654.

Hänget an die gegebne größere Sorte im Längenmaaß eine Null; im Flächenmaaß zwey, und im Körpermaaß drey Nullen, z. E.

Im Längenmaaß.

$9^{\circ} = 90' = 900'' = 9000'''$

Im Flächenmaaß.

$9^{\circ}\square = 9^{\circ}00'\square = 9^{\circ}00'00''\square = 9^{\circ}00'00''00'''\square$

Im Körpermaaß.

$9^{\circ c} = 9^{\circ}000'^{c} = 9^{\circ}000'000''^{c} = 9^{\circ}000'000''000'''^{c}$ u. s. w.

(XIII.) Eine Größe nach ihren Ruthen und Schuhen aufzuschreiben und zu lesen. §. 655.

α) Im Längenmaaße.

Schreibet die Zahlen der verschiednen Decimaltheile nach der Ordnung hintereinander; ersetzet die in der Mitte fehlenden Sorten durch Nullen und zeichnet die Ziffern. Z. E.

$23^{\circ}\,5'\,4''\,6'''$ heißet 23 Ruthen, 5 Schuhe, 4 Zolle und 6 Linien.

$362^{\circ}\,0'\,4''\,0'''\,3''''$ heißet 362 Ruthen, 4 Zolle und 3 erste Scrupel. Die fehlenden Schuhe und Linien sind durch Nullen ersetzet worden.

$3'\,0''\,4''$

3′ 0″ 4‴ heißet 3 Schuh und 4 Linien.

Es können dieſe Exempel aber auch anders ausgeſprochen werden, z. E. das erſte von

23546‴, durch 235 Schuhe, 4 Zolle und 6 Linien;
oder: 235 Schuhe, 46 Linien;
oder: 2354 Zolle, 6 Linien;
oder: 23546 Linien.

β) Im Flächenmaaße.

Verfahret wie vorhin, nur daß allhier auf jede Claſſe der Decimaltheile zwey Ziffern kommen, und alſo im Leſen zwey Ziffern für jede Claſſe von der Rechten gegen die Linke abgeſondert werden müſſen. Die in der Mitte fehlenden Sorten werden folglich durch zwey Nullen ergänzet. Z. E.

321° 57′ 63″ 43‴□ heißet 321 □ Ruthen, 57 □ Schuhe, 63 □ Zolle und 43 □ Linien.

24° 00′ 67′□ heißet 24 □ Ruthen und 67 □ Zolle. Der Mangel der Schuhe iſt durch zwey Nullen erſetzet worden.

49′ 00″ 75‴□ heißet 49 □ Schuhe, und 75 □ Linien.

Es können dieſe Exempel aber auch anders geleſen werden, z. E. das erſte von

321° 57′ 63″ 43‴□ durch 32157 □ Schuhe, 63 □ Zolle und 43 □ Linien;
oder: 3215763 □ Zolle u. 43 □ Linien;
oder: 321 Millionen, 576 tauſend, 343 □ Linien.

γ) Im Körpermaaße.

Verfahret wie vorhin, nur daß allhier auf jede Claſſe der Decimaltheile drey Ziffern kommen, und alſo im

Leſen drey Ziffern für jede Claſſe von der Rechten gegen die Linke abgeſondert werden müſſen. Die in der Mitte fehlenden Sorten werden alſo durch drey Nullen ergänzet. Z. E.

2°713′582″ heißet 2 Cubikruthen, 713 Cubikſchuhe und 582 Cubikzolle.

34°000′217″634‴C heißet 34 Cubikruthen, 217 Cubikzolle und 634 Cubiklinien. Die fehlenden Schuhe ſind durch 3 Nullen erſetzet worden.

125′000″241‴C heißet 125 Cubikſchuhe, und 241 Cubiklinien.

Es können dieſe Exempel aber auch anders geleſen werden, z. E. das erſte von

2°713′582‴C durch 2713 Cubikſchuhe u. 582 Cubikzolle; oder: 2 Millionen, 713582 Cubikzolle.

Anmerkung.

Wir haben aus vorhergehenden Exempeln geſehen, wie die in der Mitte fehlenden Sorten durch Nullen erſetzet werden. Bey dieſen Sorten können im Flächen- und Cubikmaaß auch Theile fehlen, und ſolche muß man ebenfalls durch Nullen erſetzen, wie man aus folgenden Exempeln ſehen wird, als

Im Flächenmaaß. Wenn 9 Ruthen und 9 Schuhe □ Maaß, ingleichen 60 Ruthen, 3 Zolle □ Maaß geſchrieben werden ſollen, ſo iſt

9°09′□ und 60°00′03″□.

Im Cubikmaaß. Wenn 34 Ruthen, 2 Schuhe und 30 Zolle, ingleichen 6 Ruthen, 6 Zolle, 60 erſte und 600 zweyte Scrupel Cubikmaaß geſchrieben werden ſollen, ſo iſt

34°002′030‴C, und 6°000′006‴060‴600‴C.

§. 656.

Die alte Eintheilung der Decimalruthe beſtehet darinnen, daß man zwiſchen der Ruthe und jedem ihrer Theile im Flächenmaaße ein Zwiſchenmaaß, und im Körpermaaße

maaße zwey Zwischenmaaße annimmt, um dort nicht von 1 auf 100, und hier um nicht von 1 auf 1000 zu springen. Vermöge dieser Eintheilung werden gerechnet

auf 1 Quadratruthe		10 Riemenruthen (I)
	oder	100 Quadratschuhe (II)
	oder	1000 Riemenschuhe (III)
	oder	10000 Quadratzolle (IV)
	oder	100000 Riemenzolle (V)
	oder	1000000 Quadratlinien (VI)
	oder	10000000 Riemenlinien, (VII)
		und so weiter.
auf 1 Cubikruthe		10 Schachtruthen (I)
	oder	100 Balkenruthen (II)
	oder	1000 Cubikschuhe (III)
	oder	10000 Schachtschuhe (IV)
	oder	100000 Balkenschuhe (V)
	oder	1000000 Cubikzolle (VI)
	oder	10000000 Schachtzolle (VII)
		und so weiter.

Es hat nemlich

1 Quadrat- oder Kreutzruthe 10 Riemenruthen	1 Cubikruthe 10 Schachtruthen
1 Riemenruthe 10 Quadratschuhe	1 Schachtruthe 10 Balkenruthen
1 Quadratschuh 10 Riemenschuhe	1 Balkenruthe 10 Cubikschuhe
1 Riemenschuh 10 Quadratzolle	1 Cubikschuh 10 Schachtschuh
1 Quadratzoll 10 Riemenzolle	1 Schachtschuh 10 Balkenschuh
1 Riemenzoll 10 Quadratlinien	1 Balkenschuh 10 Cubikzolle
1 Quadratlinie 10 Riemenlinien	1 Cubikzoll 10 Schachtzolle
und so weiter.	und so weiter.

§. 657.

Da, nach der neuen verkürzten Manier, in allen drey Größenmaaßen die Ruthe durch 0, der Schuh durch $(^{I})$, der Zoll durch $(^{II})$, die Linie durch $(^{III})$ u. s. w. gezeichnet wird: so muß nach der alten Manier, z. E. der Längenschuh durch $(^{I})$, der □ Schuh durch $(^{II})$, und der Cubikschuh durch $(^{III})$, und ferner der Längenzoll durch $(^{II})$, der □ Zoll durch $(^{IV})$, und der Cubikzoll durch $(^{VI})$ ausgedrücket werden. Diese

Art, die Decimalen zu zeichnen, erfordert allezeit vieles Nachdenken, und wenn man die davon unzertrennliche beschwerliche Aussprache dazu rechnet: so ist es kein Wunder, daß, wenn sie auch annoch hin und wieder in einigen neuern Schriften vorkömmt, man dennoch in Praxi wenigen Gebrauch mehr davon macht. Das einzige, was die alte Schreibart vor der neuern voraus hat, ist, daß man die ungezeichneten und gezeichneten Decimalen im Calcul just auf eben dieselbe Art und Weise handhaben kann, anstatt daß, nach der neuern Schreibart, hin und wieder eine oder zwey Nullen hinzuzufügen sind. Ich setze sowohl aus dem Flächen- als Cubikmaaße ein auf beyderley Arten gezeichnetes Exempel zum Lesen her, als:

nach der neuen Art	nach der alten Art.
im Flächenmaaße $1°23'45''67'''□$ oder $1°23'45''67(^{III}□$ das ist, 1 □ Ruthe, 23 □ Schuhe, 45 □Zolle, und 67 □Linien.	$1°2'3''4'''5''''6'''7''''□$, das ist 1 □Ruthe, 2 Riemenruthen, 3 □ Schuhe, 4 Riemenschuhe, 5 □ Zolle, 6 Riemenzolle, 7 □ Linien.
Im Körpermaaße $1°234'567'''^{C}$ oder $1°234'567(^{IIC}$. das ist, 1 Cubikruthe, 234 Cubikschuhe und 567 Cubikzolle.	$1°2'3''4'''5''''6'''7''''^{C}$, das ist 1 Cubikruthe, 2 Schacht- und 3 Balkenruthen; 4 Cubikschuhe, 5 Schacht- und 6 Balkenschuhe; 7 Cubikzolle.

§. 658.

Wenn ein nach alter Manier geschriebnes Exempel nach der neuern ausgedrücket werden soll, so ist in Acht zu nehmen, 1) daß, wenn im Flächenmaaß nur eine Decimale vorhanden ist oder übrig bleibet, man rechter Hand eine Nulle zusetzen muß, und 2) daß, wenn im Körpermaaß nur eine oder zwey Decimale vorhanden sind, oder übrig bleiben, man rechter Hand zwey oder eine Null zusetzen muß, um die Classen vollzählig zu machen. Auf diese Weise sind folgende

Exempel

Exempel aus der alten Schreibart in die neue übertragen worden.

	Alte Schreibart.		Neue Schreibart.
im Flächenmaaß	$9^{\circ}9'\square$	=	$9^{\circ}90'\square$
	$9^{\circ}1'2''3'''\square$	=	$9^{\circ}12'30''\square$
im Körpermaaß	$9^{\circ}9'^{c}$	=	$9^{\circ}900'^{c}$
	$9^{\circ}9'1''^{c}$	=	$9^{\circ}910''^{c}$
	$9^{\circ}9'1''2'''3^{tc}$	=	$9^{\circ}912'300''^{c}$
	$9^{\circ}9'1''2'''3^{tc}4^{tc}$	=	$9^{\circ}912'340''^{c}$

Wenn nemlich 1 Ruthe 10 □Schuhe enthält, so enthalten 9 Ruthen 90 □Schuhe, u. s. w. Wenn eine Schachtruthe 10 Balkenruthen, und 1 Balkenruthe 10 Cubikschuhe enthält, so enthalten 9 Schachtruthen 90 Balkenruthen, und da $90 \times 10 = 900$, so sind in 9 Schachtruthen 900 Cubikschuhe enthalten, und so weiter.

(XIV.) Eine gezeichnete Decimale in einen gemeinen Decimalbruch zu verwandeln. §. 659.

Setzet unter die Decimale einen dekadischen Nenner mit so viel Nullen im Längenmaaße, als ihre Signatur Einheiten hat; im Flächenmaaße mit zweymal so viel, und im Körpermaaße mit dreymal so viel Nullen. Z. E. wenn 5′ oder 3″ in einen gemeinen Decimalbruch verwandelt werden soll, so ist

im Längenmaaße $5' = \frac{5}{10} = 0,5$ und $3'' = \frac{3}{100} = 0,03$
im Flächenmaaße $5' = \frac{5}{100} = 0,05$ und $3'' = \frac{3}{10000} = 0,0003$
im Körpermaaße $5' = \frac{5}{1000} = 0,005$ und $3'' = \frac{3}{1000000} = 0,000003$

(XV.) Gezeichnete Decimalzahlen zu addiren.

Von der Addition in ungezeichneten Decimalzahlen ist bey der VIten Aufgabe gehandelt worden. §. 660.

Lehrsätze. 1) Alles was unter einander addiret werden soll, muß von einerley Geschlecht und Maaß seyn. Also können nur Längen zu Längen, Flächen zu Flächen, Körper zu Körpern, und ferner Ruthen zu Ruthen, Schuhe zu Schuhen, u. s. w. addiret werden. 2) Die Arten der

Summen sind allezeit den Arten der zu addirenden Größenmaaßen gleich; das ist Längen zu Längen addiret geben Längen, Flächen zu Flächen geben Flächen, und Körper zu Körpern geben Körper.

Die Addition an sich wird dergestalt verrichtet, daß man, 1) zur Erleichterung der Operationen, alle gegebne Decimalposten, nach Anleitung der XIIten Aufgabe des Decimalcalculs in die kleinste Sorte der gegebnen verwandelt, welches durch Anhängung von Nullen geschicht; und 2) daß man, nach Anleitung der XIIten Aufgabe des Decimalcalculs die in der Mitte fehlenden Decimaltheile überall durch Nullen ergänzet. Es seyn aber zu addiren z. E.

α) im Längenmaaße 16 Ruthen 1 Zoll, ferner 45 Ruthen, 1 Schuh und 2 Linien, ingleichen 6 Schuhe und 2 Zolle, und endlich 3 Schuhe und 4 Linien. Die kleinste Sorte der Decimalen ist allhier die Linie. Also

16°0′1″0‴
45 1 0 2
0 6 2 0
0 3 0 4

Summe 62°0′3″6‴ das ist 62 Ruthen, 3 Zoll und 6 Linien Längenmaaß.

Im ungezeichneten Decimalcalcul würde vorhergehendes Exempel folgendergestalt erscheinen:

16,01
45,102
0,62
0,304
62,036 Summe.

β) im Flächenmaaße 6 □ Ruthen und 5 □ Zolle; ferner 7 □ Schuhe, 50 □ Zolle, und 3 erste □ Scrupel; ingleichen 6 □ Zolle und 17 □ Linien. Die kleinste Sorte ist allhier das erste □ Scrupel, und da

da im Flächenmaaße jede Classe aus zwey Ziffern besteht, so muß mit der Ergänzung eines Decimaltheils durch Nullen zu Folge verfahren werden, als:

6°00′05″00‴00⁗□
07 50 00 03
06 17 00

Summe 6°07′61″17‴03⁗□

Das ist 6 Ruthen, 7 Schuhe, 61 Zolle, 17 Linien und 3 erste Scrupel, alles im □ Maaß.

γ) im Körpermaaße 6 Cubikruthen und 5 Cubikzolle; ferner 7 Cubikschuhe, 50 Cubikzolle und 3 erste Cubikscrupel; ingleichen 301 Cubikruthen, 310 Cubikschuhe, 13 Cubikzolle, 31 Cubiklinien, 103 erste Cubikscrupel und 130 zweyte Cubikscrupel, und endlich 6 Cubikzolle und 17 Cubiklinien. Die kleinste Sorte ist allhier das zweyte Cubikscrupel, und da im Körpermaaße jede Classe aus drey Ziffern besteht, so muß mit der Ergänzung eines Decimaltheils durch Nullen zu Folge verfahren werden; als

6°000′005″000‴000⁗000ᵛᶜ
007 050 000 003 000
301 310 013 031 103 130
006 017 000 000

307°317′074″048‴106⁗130ᵛᶜ

Das ist, 307 Ruthen, 317 Schuhe, 74 Zolle, 48 Linien, 106 erste und 130 zweyte Scrupel, alles im Cubikmaaße.

(XIV.) Gezeichnete Decimalzahlen von einander zu subtrahiren. Von der Subtraction in ungezeichneten Decimalzahlen ist in der VIten Aufgabe gehandelt worden. §. 661.

Lehrsätze. 1) Alles was von einander subtrahiret werden soll, muß von einerley Geschlecht und Maaß seyn, wie bey der Addition. Die Arten der kommenden Reste

oder Differenzen ſind den Arten der von einander ſubtrahirten Größenmaaßen gleich, ebenfalls wie dort.

Die **Subtraction** an ſich wird dergeſtalt verrichtet, daß man, 1) zur Erleichterung der Operationen, ſo wie bey der Addition, alle gegebne Poſten in die kleinſte Sorte der Decimalen, nach Anleitung der XIIten Aufgabe des Decimalcalculs verwandelt, und 2) daß man, nach Anleitung der XIII. Aufgabe, die in der Mitte fehlenden Decimaltheile überall mit Nullen ergänzet. Es ſey aber zu ſubtrahiren

α) im **Längenmaaße** 1 Ruthe, 2 Schuhe, 3 Zolle und 4 erſte Scrupel von 3 Ruthen, 1 Linie und 2 zweyten Scrupeln; ingleichen 6 Schuhe, 4 Linien und 5 zweyte Scrupel von 8 Ruthen. Die kleinſten Sorten ſind in beyden Exempeln die zweyten Scrupel. Alſo

3°0′0″1‴0‴″2‴	8°0′0″0‴0‴0‴
1 2 3 0 4 0	6 0 4 0 5
3°7′7″0‴6‴″2‴ das iſt 1 Ruthe 7 Schuhe, 7 Zolle, 6 erſte und 2 zweyte Scrupel.	7°3′9″5‴9‴″5‴

β) im **Flächenmaaße** 11 □Ruthen, und 6 □Zolle von 12 □Ruthen, 30 □Schuhen und 45 □Linien; ingleichen 15 □Zolle und 70 □Linien von 21 □Ruthen, 1 □Schuh, und 6 erſten □Scrupeln. Im erſten Exempel iſt die Linie, und im zweyten das erſte Scrupel die kleinſte Sorte.

12°30′00″45‴□	21°01′00″00‴06‴
11 00 06 00	00 15 70 00
Reſt oder Differenz. 1°29′94″45‴□. Das iſt 1 Ruthe, 29 Schuhe, 94 Zolle und 45 Linien, alles im □ Maaß.	21°00′84″30‴06‴, das iſt 21 Ruthen, 84 Zolle, 30 Linien und 6 erſte Scrupel, alles im □ Maaße.

γ) im **Körpermaaße** 8 Cubikruthen, 6 Cubikſchuhe und 34 Cubikzolle von 72 Cubikruthen, 123 Cubikſchuhen 456 Cubikzollen; ingleichen 6 Cubikruthen,

234 Cubikſchuhe, 580 Cubikzolle und 60 Cubiklinien von 500 Cubikruthen und 345 Cubikzollen. In dem erſten Exempel iſt der Zoll, und in dem zweyten die Linie die kleinſte Sorte. Alſo

$72°123'456''^{c}$	$500°000'345''000'''^{c}$
8 006 034	6 234 580 060
$64°117'422''^{c}$	$493°765'764''940'''^{c}$, das iſt
Das iſt 64 Ruthen, 117 Schuhe, und 422 Zolle, alles im Cubikmaaße.	493 Ruthen, 765 Schuhe, 764 Zolle und 940 Linien, alles im Cubikmaaße.

Auf den Proceß der Subtraction gründet ſich die Auflöſung folgender Aufgabe.

(XVII.) Eine Decimalzahl mit jedem andern Bruch zu vergleichen, z. E. 6″ oder 6 Zolle mit $\frac{1}{4}$ Schuh. §. 662.

1) Verwandelt die $\frac{1}{4}$ Schuhe in Decimalzahlen, kömmt 75‴ oder 7 Zolle, 5 Linien. 2) Ziehet von den 7 Zollen 6 Zolle ab, bleiben 1″5‴, das iſt 1 Zoll 5 Linien, und um dieſen 1 Zoll und 5 Linien iſt $\frac{1}{4}$ Schuh größer als 6 Zolle. Hier iſt die Ausarbeitung.

Erſte Operation.	Zweyte Operation.	
4) 300‴	75‴	oder 75‴
75‴	—6	— 60‴
	15‴	15‴ Differenz.

(XVIII.) Gezeichnete Decimalzahlen unter einander zu multipliciren. Von der Multiplication in ungezeichneten Decimalen iſt bey der VIten Aufgabe gehandelt worden. §. 663.

Lehrſätze. 1) Wenn Längen mit Längen multiplicirt werden, ſo giebet das Product Flächenmaaß. (Es iſt aus der Lehre von den Polygonalzahlen bekannt, daß das Product zweyer Zahlen eine Flächenzahl iſt, z. E. 2 X 2 giebet die Quadratzahl 4, und 2 X 3 giebet die länglichte Zahl 6.) 2) Wenn Längen und Flächen unter einander multiplicirt werden, ſo iſt das Product Körpermaaß. (Es iſt aus der Lehre von den Polygonalzahlen bekannt, daß das Product dreyer

dreyer Zahlen eine Körperzahl ist, z. E. 2 × 2 × 2 giebet den Cubus 8, und 2 × 3 × 2 giebet das Prisma 12, und 2 × 3 × 4 giebet das Parallelepipedum 24.) 3) Wenn Decimal- und gemeine Zahlen unter einander multipliciret werden, so giebet das Product Decimalen von einerley Geschlecht mit den Decimalfactoren. 4) Flächen mit Flächen, Körper mit Körpern, Längen mit Körpern, und Flächen mit Körpern werden nicht multipliciret. (Es würden dadurch Zahlen entstehen, welche das dreyfache Größenmaaß der Geometrie übersteigen. Ein anders ist es, wenn man nach No. 3) eine Linie, Fläche oder Körper mit einer gemeinen Zahl multipliciret, um die Größe des Raums zu erfahren, den jene Linie, Fläche oder Körper, zwey- oder mehrmal genommen, einnehmen würde.)

Die Multiplication an sich wird dergestalt verrichtet, 1) daß man die gegebnen Posten, nach Anleitung der XIIten Aufgabe, in die kleinste Sorte verwandelt, 2) die in der Mitte fehlenden Decimalstellen, jedem Größenmaaße gemäß, ergänzet; 3) die Ziffern, wie bey der gewöhnlichen Multiplication unter einander setzet, ohne auf die Größe und Folge der Signaturen Acht zu haben; ordentlich multipliciret, die äusserste Ziffer des Products durch die kleinste Sorte zeichnet, und hernach von der Linken nach der Rechten zu, im Flächenmaaße zwey, und im Körpermaaße drey Ziffern auf jede Classe der Decimalen bringet. Die Probe der Multiplication ist, wie im gewöhnlichen Calcul, die Division.

α) Es sollen 6 Ruthen, 7 Schuhe Längenmaaß durch 12 Ruthen Längenmaaß multipliciret werden. (Hier ist der Schuh die kleinste Sorte.)

Also $6^{0}7'$
$1\ 2^{0}0'$

13 4 0
67

$80^{0}4\ 0$ (□ das ist 80 Ruthen und 40 Schuhe Flächenmaaß.

β) Es sollen 6 Ruthen, 7 Schuhe Längenmaaß durch 1 Schuh 2 Zolle Längenmaaß multipliciret werden. (Hier ist der Zoll die kleinste Sorte.)

Also $6^{0}7'0''$
$1'2''$

13 40
67 0

$80'40$ ('' □, das ist 80 Schuhe, und 40 Zolle Flächenmaaß.

γ) Es

γ) Es seyn zu multipliciren 3 Ruthen, 5 Zolle und 7 erste Scrupel Längenmaaß mit 12 Ruthen und 3 Linien Längenmaaß. (Hier ist das erste Längenscrupel die kleinste Sorte.) Also

3°0507(''
12°0030('''

oder

bequemer: 12°0030('''
3 0507('''

840210
600150
360090

36°61'75''52'''10('''□

das ist 36 Ruthen, 61 Schuhe, 75 Zolle, 52 Linien und 10 erste Scrup. Flächenm.

δ) Es seyn zu multipliciren 21 Ruthen Längenmaaß durch 5 Ruthen, 69 Schuhe, und 32 Zolle Flächenmaaß. (Hier ist der Zoll die kleinste Sorte.) Also

21°0'0''
5°69'32''□

oder

bequemer: 5°69'32''□
21°00''

5693200
113864

119°557'200(ac,

das ist 119 Ruthen, 557 Schuhe und 200 Zolle Cubikmaaß.

ε) Es seyn zu multipliciren 5 Ruthen, 6 Schuhe, 9 Zolle, 3 Linien und 2 erste Scrupel Längenmaaß durch 21 Ruthen Flächenmaaß. (Hier ist das erste Scrupel die kleinste Sorte.) Also

5°6'9''3'''2('''
21°00'00''00'''00('''□

5693200000000
113864

119°557'200''000'''000('''c

das Product ist 119 Ruthen, 557 Schuhe und 200 Zolle Cubikmaaß, und die sechs folgende Nullen können weggeworfen worden.

ζ) Es seyn zu multipliciren 3 Ruthen, 5 Zolle und 7 erste Scrupel Längenmaaß durch 12 Ruthen, und 30 Zolle Flächenmaaß. (Das erste Scrupel ist die kleinste Sorte.) Also

3°0507('''
12°00'30''00'''00('''□

9152100000
61014
30507

36°617'552''100'''000('''c

die drey lezten Nullen bleiben nach der Ausarbeitung weg, und das Product ist 36 Ruthen, 617 Schuhe, 552 Zolle und 100 Linien Cubikmaaß.

Durch

Durch vorhergehende Exempel werden die Lehrsätze der Multiplication von No. 1 und 2 hinlänglich erläutert seyn. Hier ist ein Exempel, um zu zeigen, wie nach No. 3 Decimal- und gemeine Zahlen unter einander multipliciret werden. Das Product erhält das Zeichen der Decimalen, als:

Im Längenmaaße.

9 Ruthen 4 Schuhe durch die gemeine Zahl 10.

Also $9^{\circ}\ 4'$

10

$9\ 4^{\circ}0'$ d. i. 94 Längenruthen.

Imgleichen 9 Schuhe 4 Zoll durch die gemeine Zahl 2.

Also $9'4''$

2

$1^{\circ}\ 8'8''$ d. i. 1 Ruthe, 8 Schuhe 8 Zolle Längenmaaß.

Ferner.

3 Ruthen, 7 Zolle, 2 erste Scrupel durch die gemeine Zahl 20.

Also

$3^{\circ}0'\ 7''0'''2\ (^{IV}$

20

$61^{\circ}\ 4'\ 0''\ 4'''0(^{IV}$

das ist, 61 Ruthen, 4 Schuhe, und 4 Linien Längenmaaß.

Im Flächenmaaße.

90 Ruthen und 2 Schuhe durch die gemeine Zahl 10, als:

$90^{\circ}02'\square$

10

$900^{\circ}20(^{I}\square$

das ist, 900 Ruthen, 20 Schuhe Flächenmaaß.

Ferner.

88 Schuhe, 4 Linien durch die gemeine Zahl 10, als:

$88'\ 00''04'''\square$

10

$8^{\circ}8\ 0'0\ 0''40(^{III}\square$

das ist, 8 Ruthen, 80 Schuhe, und 40 Linien Flächenmaaß.

Im Körpermaaße.

3 Ruthen, 423 Schuhe durch die gemeine Zahl 5.

Also $3^{\circ}\ 423'^{C}$

5

$17^{\circ}\ 115(^{IC}$

das ist, 17 Ruthen, 115 Schuhe Cubikmaaß.

Und

340 Schuhe, 506 Linien durch die gemeine Zahl 10.

Also

$340'000''506'''$,

10

$3^{\circ}400''005''060(^{IIIC}$

das ist, 3 Ruthen, 400 Schuhe, 5 Zolle und 60 Linien Cubikmaaß.

(XIX.) Gezeichnete Decimalzahlen zu dividiren. Von der Division in ungezeichneten Decimalzahlen ist in der VIIIten Aufgabe gehandelt worden. §. 664.

Lehrsätze. 1) Wenn Flächen mit Linien dividiret werden, so kömmt Längenmaaß. Ist die Linie eine Länge,

so

ſo kömmt eine Breite; und iſt ſie eine Breite, ſo kömmt eine Länge. 2) Wenn Körpermaaß mit Flächenmaaß dividiret wird, ſo kömmt Längenmaaß. 3) Wenn Körpermaaß mit Längenmaaß dividiret wird, ſo kömmt Flächenmaaß. 4) Wenn Längen mit Längen, Flächen mit Flächen und Körper mit Körpern dividiret werden, ſo giebet der Quotient eine gemeine Zahl. 5) Wenn Decimalzahlen durch gemeine Zahlen dividiret werden, ſo giebet der Quotient Decimalen von einerley Geſchlecht mit den dividirten Decimalen. 6) Längen können nicht mit Flächen oder Körpern, ingleichen Flächen nicht mit Körpern dividiret werden.

Die Diviſion an ſich wird dergeſtalt verrichtet, 1) daß man die gegebnen Poſten, nach Anleitung der XIIten Aufgabe, in die kleinſte Sorte verwandelt; 2) daß man die in der Mitte fehlenden Decimalſtellen, jedem Größenmaaße gemäß, ergänzet; 3) daß bey dem Diviſionsproceß, den ein jeder nach der ihm gewöhnlichen Art verrichten kann, ſo wenig als bey der Multiplication, auf die Größe und Folge der Signaturen im Dividenden und Diviſor Acht gegeben wird. 4) Daß, wenn die Diviſion nicht aufgehet, man dem Reſt des Dividenden, nach Beſchaffenheit ſeines Größenmaaßes, allezeit eine, zwey oder drey Nullen zugleich anhänget; 5) daß die äußerſte Ziffer des ohne die vorhergehende Anhängung von Nullen gekommnen Quotienten durch die kleinſte Sorte der Decimalen zu zeichnen, und die Größe der andern Decimalen darnach zu beſtimmen iſt. Man ſehe folgende Exempel, in welchen zur Erſparung des Raums, der Diviſionsproceß weggelaſſen, und bloß der Dividende und Diviſor bruchweiſe über einander geſetzet worden, wie an andern Orten. Da von dieſen Exempeln keines überflüßig iſt, ſondern ein jedes was beſonders hat, ſo ſind ſie alle durchzuarbeiten. Die Probe kann überall auf gehörige Art, durch die Multiplication gemachet werden.

(A) Flächen mit Linien zu dividiren. §. 665.

Es sollen dividiret werden 7 Ruthen, 20 Schuhe und 80 Zolle Flächenmaaß durch 21 Ruthen und 2 Schuhe Längenmaaß. Der Dividende hat kleinere Sorten als der Divisor, und es ist der Zoll die kleinste Sorte. Wir hängen dem Divisor also eine Nulle an, und bringen ihn von 21°2′ auf 21°2′0″, um die Sorten im Divisor und Dividenden gleich zu machen. Folglich

$$\frac{7°20′80(″□}{21°2′0″} = 3′4″$$

das ist 3 Schuhe und 4 Zoll Längenmaaß. Ist nun der Divisor 21°2′ die Länge der Fläche 7°20′80″, so ist 3′4″ die Breite.

Ingleichen.

Es sollen dividiret werden 720 Ruthen und 80 Schuhe Flächenmaaß durch 2 Ruthen, 1 Schuh und 2 Zolle Längenmaaß. Hier hat der Divisor kleinere Sorten als der Dividende, und der Zoll ist die kleinste Sorte. Da nun der Dividende Flächenmaaß enthält, so wird demselben, vermittelst zweyer Nullen, eine Classe von Zollen angehänget, als:

Es sollen dividiret werden 2 Ruthen, 1 Schuh, 20 Zolle und 4 Linien Flächenmaaß durch 1 Ruthe, 2 Schuhe Längenmaaß. Der Dividende hat wiederum kleinere Sorten als der Divisor. Es findet sich aber, daß, wenn dem Divisor zwey Nullen angehänget werden, um seine Sorten den Sorten des Dividenden gleich zu machen, der Quotient von einem Bruche 804 begleitet wird. Es müssen also dem Dividenden, da er Flächenmaaß enthält, annoch zwey Nullen hinzugefüget werden, und der Quotient wird seyn 167667. Wenn nun die beyden lezten Ziffern 67 des Quotienten bloß durch die beyden dem Dividenden angehängten Nullen gekommen sind, so muß durch die vor beyden vorhergehende Ziffer 6 die Größensorte der Decimalen bestimmet, und solche nach dem Hauptexempel durch Linien, und also durch (‴) bezeichnet werden, welches in allen ähnlichen Fällen zu beobachten ist. Das Exempel stehet demnach folgendergestalt:

$$\frac{720°80'00''\square}{2°1'2''} = 340°0'0''$$

das ist, 340 Ruthen Längenmaaß. Die beyden Nullen werden, als hier überflüßig, nach der Ausarbeitung weggeworfen.

Ingleichen.

Es sollen dividiret werden 72 Ruthen und 8 Schuhe Flächenmaaß durch 2 Ruthen, 1 Schuh und 2 Zolle Längenmaaß. Der Divisor hat wiederum kleinere Sorten als der Dividende; folglich

$$\frac{72°08'00''\square}{2°1'2''} = 34°0'0''$$

das ist, 34 Ruthen Längenmaaß. Die beyden Nullen werden wieder weggeworfen.

Ingleichen.

Es sollen dividiret werden 7 Ruthen, 20 Schuhe, 80 Zolle Flächenmaaß, durch 2 Ruthen, 1 Schuh und 2 Zolle Längenmaaß. Hier sind die kleinsten Sorten des Dividenden und Divisors einander gleich. Also:

$$\frac{7°20'80''\square}{2°1'2''} = 3°4'0''$$

das ist, 3 Ruthen und 4 Schuhe Längenmaaß. Die Nulle wird weggeworfen.

$$\frac{2°01'20''04'''(00)\square}{1°2'0''0'''} = 1°6'7''6'''6''''7(''$$

das ist, 1 Ruthe, 6 Schuhe, 7 Zolle, 6 Linien, nebst 6 ersten und 2 zweyten Scrupeln Längenmaaß.

Hier ist die Probe durch die Multiplication in welcher nach den Regeln derselben, dem Divisor zwey Nullen angehänget worden, um seine Sorten den Sorten des Dividenden gleich zu machen.

167667(''
120000(''

335334 0000
167667

201'20''04'''00''00''\square

Ingleichen.

Es sollen dividiret werden 4 Ruthen und 80 Linien Flächenmaaß durch 50 Ruthen und 1 Linie Längenmaaß. Hier sind sowohl im Dividenden als Divisor die fehlenden Decimalstellen zu ergänzen. Also:

$$\frac{4°00'00''80'''\square}{50°0'0''1'''} = 8''0'''$$

das ist 8 Längenzolle. Die Nulle wird weggeworfen, oder man spricht den Quotienten durch 80 Linien Längenmaaß aus.

(B) Körpermaaß mit Flächenmaaß zu dividiren. §. 666.

Es ſollen dividiret werden 8 Ruthen, 460 Zolle Körpermaaß durch 40 Ruthen und 23 Zolle Flächenmaaß. Die kleinſte Sorte iſt in den beyden Poſten gleich. Hingegen fehlet ſowohl im Körper- als Flächenmaaß der Schuh, der alſo dort mit drey, und hier mit 2 Nullen ergänzet werden muß. Folglich

$$\frac{8^{\circ}000'460''^{c}}{40^{\circ}00'23''\square} = 2'0''$$

das iſt, 2 Schuhe oder 20 Zolle Längenmaaß.

Ingleichen.

Es ſollen dividiret werden 2 Ruthen, 907 Schuhe 80 Zolle Körpermaaß durch 2 Ruthen, 20 Schuhe Flächenmaaß. Hier hat der Dividende kleinere Sorten, und wir hängen dem Diviſor alſo eine Claſſe von Zollen in Nullen an, um die Sorten, in beyden Poſten einander gleich zu machen. Da aber der Quotient $1^{\circ}3'2''$ mit einem Reſte von 1080 begleitet wird, ſo ſetzen wir dem Dividenden, welcher Körpermaaß enthält, annoch drey Nullen hinzu, und

Es ſollen dividiret werden 744 Ruthen Körpermaaß durch 1 Ruthe 24 Schuhe Flächenmaaß. Hier hat der Diviſor kleinere Sorten. Wir hängen alſo dem Dividenden eine Claſſe von Schuhen an, als:

$$\frac{744^{\circ}000'''^{c}}{1^{\circ}24'\square} = 600^{\circ}0'$$

Alſo 600 Längenruthen.

Die Probe durch die Multiplication iſt:

$$\begin{array}{r} 1^{\circ}24'\square \\ 600^{\circ},0' \\ \hline 744^{\circ}000'''^{c} = 744^{\circ}\,\text{Cub.} \end{array}$$

Ingleichen.

Es ſollen dividiret werden 1 Ruthe, 710 Schuhe und 132 Zolle Körpermaaß durch eine Ruthe 2 Schuhe Flächenmaaß. Um die Sorten einander gleich zu machen, wird dem Diviſor, welcher Flächenmaaß enthält, eine Claſſe von zwey Nullen, und weil die Diviſion nicht aufgehet, dem Dividenden, welcher Körpermaaß enthält, eine Claſſe von drey Nullen angehänget, als:

der Calcul stehet alsdenn folgendermaßen:

$$\frac{2°907'080''^{c}(000)}{2°20'00''\square} = 1°32140('$$

das ist, 1 Ruthe, 3 Schuhe, 2 Zolle, 1 Linie und 4 erste Scrupel. Die Null kann übergangen werden.

Probe durch die Multiplication.

1°32140'
2°20'00''00'''00''''00(''
26428000000000
2 64280
2°907'080''|000'''000''''000('''

$$\frac{1°710'132''(000)^{c}}{1°02'00''\square} = 1676°6'0''$$

das ist 1676 Ruthen und 6 Schuhe Längenmaaß.

Probe.

1676°6'0''
1°02'00''
33532000
167660
1°710'132''(000)

(C) Körpermaaß mit Längenmaaß zu dividiren. §. 667.

Es sollen dividiret werden 2 Ruthen, 400 Zolle Körpermaaß durch 1 Ruthe, 2 Schuhe Längenmaaß. Hier ist zuvörderst in dem Dividenden der fehlende Schuh durch eine Classe von drey Nullen zu ergänzen, und alsdenn dem Divisor, welcher Längenmaaß enthält, vermittelst einer Null die Sorte von Zollen hinzuzufügen, als:

$$\frac{2°000'400''^{c}}{1°2'0''} = 1°66'70''\square$$

das ist 1 Ruthe, 66 Schuhe und 70 Zolle Flächenmaaß.

Es sollen dividiret werden 1 Ruthe, 710 Schuhe und 132 Zolle Körpermaaß durch 1 Ruthe und 2 Zolle Längenmaaß. Hier muß der im Divisor fehlende Schuh durch eine Null ergänzet werden, und alsdenn wird seyn:

$$\frac{1°710'132''^{c}}{1°0'2''} = 1°67'66''\square$$

das ist 1 Ruthe, 67 Schuhe und 66 Zolle Flächenmaaß.

Probe.

1°67'66''
1°0'2''
33532
16766
1°710'132''^{c}

(D) Längen mit Längen, Flächen mit Flächen und Körper mit Körpern zu dividiren. §. 668.

Längen.	Flächen.	Körper.
$\frac{7404'''}{1234'''} = 6$	$\frac{74°04'\square}{12°34'\square} = 6$	$\frac{7°404'^c}{1°234'^c} = 6$

(E) Decimalzahlen durch gemeine Zahlen zu dividiren. §. 669.

$\frac{7404'''}{6} = 1234'''$ | $\frac{74°04'\square}{6} = 12°34'\square$ | $\frac{7°404'^c}{6} = 1°234'^c$

Wenn in irgend einem Exempel, ungeachtet der beim Dividenden hinzugefügten Nullen, die Division nicht aufgehen will, so lässet man es bey der Annäherung bewenden.

(XX) Aus gezeichneten Decimalzahlen sowohl die Quadrat- als Cubikwurzel zu ziehen. §. 670.

Von der Extraction der Wurzeln in ungezeichneten Decimalzahlen ist in der IX und Xten Aufgabe gehandelt worden.

Auf eben die Art, als nach Anleitung der IX und Xten Aufgabe die Quadrat- und Cubikwurzeln aus ungezeichneten Decimalen gezogen werden, geschicht diese Ausziehung aus gezeichneten Decimalen, nur daß, da alle Wurzeln einer Potenz Längenmaaß enthalten, die Zeichen der Wurzel nach diesem Größenmaaße zu ordnen sind. Die Quadratzahl sey überall 54756, und die Cubikzahl 12812904 in ungezeichneten Ziffern, und in gezeichneten, wie folget. Z. E.

Es sey die Quadratwurzel zu ziehen

α) aus $5°47'56''\square$

Also $\sqrt{5°|47'|56''\square}$

$2°3'4''$ Längenm.

Es sey die Cubikwurzel zu ziehen.

αα) aus $1°281'290''400'''^c$.

(Hier sind zur Erfüllung der Classen zwey Nullen angehänget worden.)

Also $\sqrt[3]{1°|281'|290''|400'''^c}$

$1°0'8''6'''$ Längenm.

β) Aus

β) aus 54°75′60″□. (Hier iſt zur Erfüllung der Claſſen eine Null hinzugeſetzet worden.

Alſo 54°|75′|60″□

$\sqrt{}$ 7°39″ Längenm.

γ) Aus 547°56′□

Alſo 5|47°|56′□

$\sqrt{}$ 23°4′ Längenm.

δ) Aus 5475°60′□. (Hier iſt zur Erfüllung der Claſſen eine Nulle hinzugefüget worden.

Alſo 54|75°|60′□

$\sqrt{}$ 73°9′ Längenm.

ββ) aus 12°812′904″□

Alſo 12°|812′|904″

$\sqrt[3]{}$ 2°3′4″ Längenm.

γγ) aus 128°129′040″. (Hier iſt zur Erfüllung der Claſſen eine Null angehänget worden.)

Alſo 128°|129′|040″□

$\sqrt[3]{}$ 5°0′4″ Längenm.

δδ) aus 1281°290′400″. (Zur Erfüllung der Claſſen ſind zwey Nullen angehänget worden.)

Alſo 1|281°|290′|400″

$\sqrt[3]{}$ 10°8′6″ Längenm.

εε) Aus 12812°904″□

Alſo 12|812°|904″□

$\sqrt[3]{}$ 23°4′ Längenm.

ζζ) Aus 128129°040′. (Es iſt zur Erfüllung der Claſſen eine Nulle angehänget worden.)

Alſo 128|129°|040′□

$\sqrt[3]{}$ 50°4′ Längenm.

ηη) Aus 1281290°400′. (Hier ſind zur Erfüllung der Claſſen zwey Nullen angehänget worden.)

Alſo 1|281|290°|400′

$\sqrt[3]{}$ 108°6′ Längenm.

§. 671.

Es ſoll aus $2\frac{1}{4}$ □ Ruthe die Quadratwurzel gezogen werden. Verwandelt den Bruch in $\frac{1}{4}$, und dieſen (nach der Vten Aufgabe) in 2,75. Wenn nun $\sqrt{2°75'} = 1,6$, oder durch mehrere Annäherung $\sqrt{2°75'00''} = 1,65$: ſo iſt 1°6′ oder 1°6′5″ die □ Wurzel aus $2\frac{1}{4}$ □ Ruthe. Soll nun aus $2\frac{1}{4}$ Cubikruthe die Cubikwurzel gezogen werden, ſo machet zuvörderſt in 2,75 die Claſſe der Decimalen voll, als 2,750 und hänget hernach ein paar Claſſen an. Alsdenn wird $\sqrt[3]{2750000000} = 1°4'0''1'''$ Cubikwurzel aus $2\frac{1}{4}$ Ruthe.

§. 672.

Wenn aus einer Decimalzahl die Quadrat- oder Cubikwurzel gezogen werden ſoll, wo in der Mitte Decimalſtellen fehlen, ſo müſſen die fehlenden Decimalſtellen jedem Größenmaaße gemäß, erſetzet werden. Z. E. Aus 4 Ruthen, 20 Zollen, und 36 erſten Scrupeln Flächenmaaß die Quadratwurzel zu ziehen. Folglich

$$\sqrt{4°|00'|20''|00'''|36''' \square}$$
$$2°0'0''0'''5(''.$$

Ingleichen, wenn aus 1 Ruthe, 600 Zollen, 120 Linien, und 90 erſten Scrupeln Körpermaaß die Cubikwurzel gezogen werden ſoll, ſo heiſſet es:

$$\frac{1°|000'|600''|120'''|090''' c}{1°0'0''0'''2''' \quad}$$

Will man wegen des ſowohl der Quadrat- als der Cubikwurzel anhängenden Reſtes, dieſe Wurzeln accurater haben, ſo muß man ſowohl der Quadrat- als Cubikzahl annoch eine oder mehrere Claſſen mit Nullen anhängen.

§. 673.

Ein gewiſſer Schriftſteller bringet in ſeinem Tractat von der Decimalrechnung die Aufgabe vor:

„Aus 458 Ruthen, 4 Zoll, 2 Linien, 5 zweyten „Scrupeln, 4 dritten Scrupeln, und 2 fünften „Scrupeln die Quadratwurzel zu ziehen;„

und

und löſet ſie mit Anhängung einiger Claſſen folgendergeſtalt auf:

$$\sqrt{\frac{4|58^{0}|0'4''|2'''0''''|5^{v}4^{vi}|0^{vii}2^{viii}|0^{ix}0^{x}|0^{xi}0^{xii}}{2\ 1°4'\ 0''1'''9''''1^{v}7^{vi}}}$$

Da der Auctor die Aufgabe nach der alten Methode zeichnet und ausarbeitet, ſo mußte die Aufgabe auf folgende Art vorgetragen werden:

Aus 458 Quadratruthen, 4 Quadratſchuhen, 2 Riemſchuhen, 5 Riemzollen, 4 Quadratlinien, und 2 erſten Quadratſcrupeln die Quadratwurzel zu ziehen.

Aus der Frage des Auctoris, die nach der alten Methode bloß dem Längenmaaße angemeſſen iſt, ſollte man ſchlieſſen, daß auch aus Längenzahlen als Längenzahlen Quadratwurzeln gezogen werden könnten; und da dieſer Schluß ſehr falſch ſeyn würde, ſo iſt dieſes die Urſache, warum ich den Fehler des Auctoris (*) gerüget habe.

Nach der neuern Methode kann die vorhabende Aufgabe mit den Worten deſſelben und hinzugefügten Flächenmaaß vorgetragen werden. Alsdenn kömmt aber die Quadratzahl folgendergeſtalt zu ſtehen,

$$4|58°|00'|04''|02'''|00''''|05^{v}|04^{vi}|00^{vii}|02^{viii}|00^{ix}$$

und es kömmt auch eine ganz andre Wurzel heraus. Denn wenn die obige Wurzel kommen ſollte, ſo müßte nach neuerer Art die Aufgabe folgendergeſtalt lauten:

Aus 458 Ruthen, 4 Schuhen, 20 Zollen, 54 Linien, und 2 erſte Scrupeln Flächenmaaß die Quadratwurzel zu ziehen, nemlich

$$4|58°|04'|20''|54'''|02''''|00^{v}|00^{vi}$$

§. 674

(*) Bey den Cubikzahlen hat derſelbe auf ähnliche Art gefehlet.

§. 674.

In den vortrefflichen Lehrbüchern der Arithmetik der Herren von Wolf, von Segner, Käſtner, Karſten, Clemm und anderer Neuern, iſt von dem Decimalcalcul zum Theil in beſondern Abſchnitten, zum Theil zerſtreut bey jeder Art der andern Rechnungen, ausführlich gehandelt worden.

Seite 41. Lin. 13 von unten, leſe man Factoren, anſtatt Factorer.
— — 10 eine Triquadratzahl fälle, anſtatt ein ꝛc. fälle
— 112. Lin. 22. leſe man der beyden Winkel x und y ſeinen ꝛc. anſtatt der beyden Winkel ſeinen ꝛc.
— 212. Lin. 5. leſe man als die Seite der Grundfläche Kugeln hat, anſtatt als die Pyramide Ecken hat.
— 261. Lin. 10. leſe man der gefundne Cubus von 11, anſtatt der gefundne Cubus von 111.
— 276. Lin. 4. leſe man $32-(2\times 7)=18$, anſtatt $32-2+7=18$.
— 299. Lin. 16. leſe man $-2\,(=2)=+4$, anſtatt $-2=2=+4$.
— 323. zwiſchen Lin. 21 und 22 leſe man 45 Binionen, anſtatt 45 Binionen.
— 328. in der Tabelle leſe man *Nonenniones*, anſtatt Nonenſiones.
— 447. §. 473. Lin. 2. der Auflöſung leſe man daß BD und AC jede = der Chorde von 60°, und beſchreibet ꝛc. anſtatt daß AD und BC jede = AB, und beſchreibet ꝛc.

Seite 72 und 73. unter der Rubrik: **Vortheil bey der Ausziehung der Wurzeln**, ſind aus Verſehen einige Perioden weggelaſſen worden, welches die ganze Anweiſung unvollſtändig macht. Ich erſuche meine Leſer, ſelbige folgendergeſtalt zu verändern:

Geſetzt, es wird eine Cubikzahl gegeben, ſo theile man ſie zuvörderſt in ihre Claſſen ein, und ſuche hernach in den Tabellen eine Cubikzahl auf, die den erſten drey oder vier Claſſen der gegebenen Zahl am nächſten kömmt, (dreyen nemlich, wenn die Tabelle nur bis auf 1000, und vieren, wenn ſie bis auf 10000 berechnet iſt.) Dieſe gefundene Cubikzahl ſubtrahire man von der gegebnen, ſchreibe ihre gefundne Wurzelziffern hinter den Bogen, und verfahre alsdenn mit dem Reſt und den folgenden Claſſen, wie gewöhnlich. Man hat ſich dadurch wenigſtens die Ausrechnung der 3 oder 4 erſten Wurzelziffern erſparet. Will man die Wurzel genauer haben, ſo iſt ſchon aus dem vorhergehenden bekannt, daß man für die Decimalſtellen mehrere Claſſen von Nullen willkührlich anhangen kann. Z. E. es ſeyn von folgenden drey Cubikzahlen die Wurzeln zu finden, ſo iſt der Anfang der Operation wie folget:

α) 731 | 919 | 964 | 878, | 000 (9012, .
731 | 919 | 889 | 728 |
75 150, 000

β) 73 | 191 | 996 | 698, | 000 . . . (4183, . .
73 | 191 | 996 | 487 |
211, 000 . . .

γ) 788 | 632 | 947 | 383 | 452 | 879 (9239 . .
788 | 632 | 918 | 919 |
28 | 464 | 452

Es ist hierbey wohl zu merken, daß die aus den Tabellen zu nehmende und abzuziehende Potenz aus eben so viel Ziffern bestehen müsse, als in den ersten 3 oder 4 Classen der gegebnen Potenz enthalten sind. Z. E. die 11 ersten Zahlen des ersten Exempels bey α) machen gerade den Cubus von 4183 aus. Allein da die vier ersten Classen hier 12 Ziffern haben, so mußte auch der nächst kleinere Cubus von 12 Ziffern gesuchet werden, und es wäre folgende Rechnung falsch gewesen:

731 | 919 | 964 | 878 (4183
731 | 919 | 964 | 87
8

Uebrigens ist es leicht, obige Anweisung auch auf die Ausziehung der Quadratwurzeln anzuwenden.

Nachricht für den Buchbinder.

Die 44 Kupfertafeln werden am Ende des Buchs gebunden, und jeder Tafel wird soviel Papier als nöthig ist, angesetzet, daß sie bey dem Lesen ganz herausgeschlagen werden könne.

Fig. 2

Fig. 4

Fig. 6

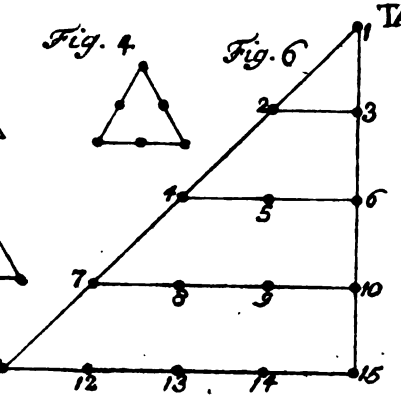
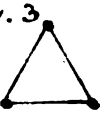


Fig. 3



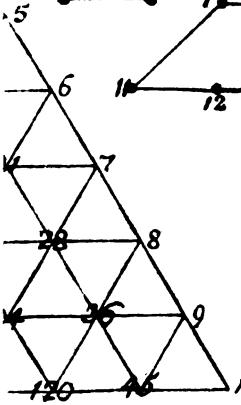


Fig. 5

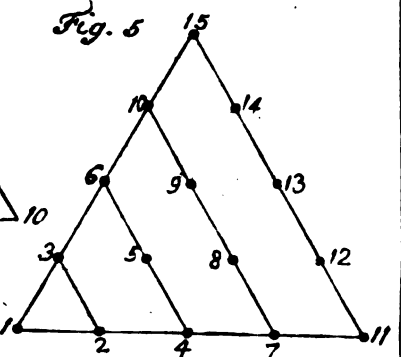


Fig. 9

Fig. 12

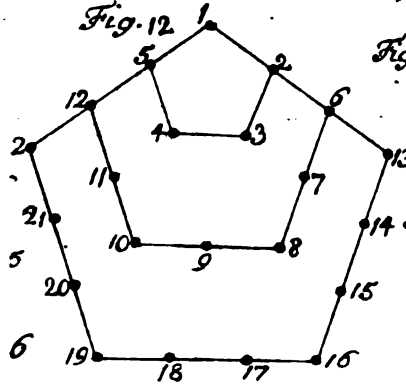


Fig. 10

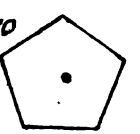
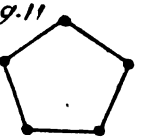


Fig. 11



C.F.H. Gericke Funfc Berol

TAB: II.

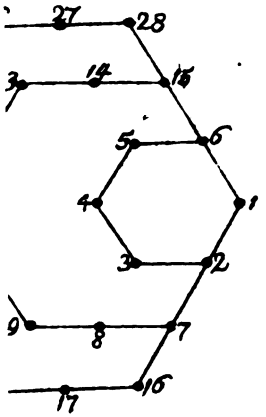


Fig: 4

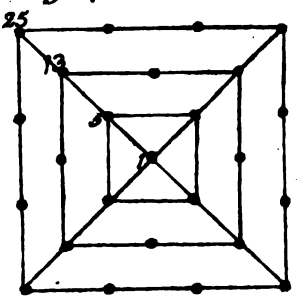
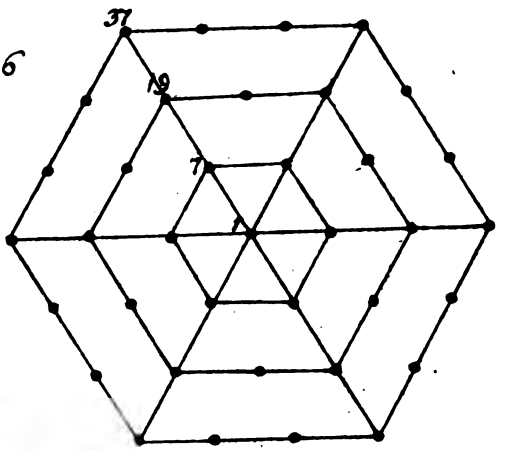


Fig. 6



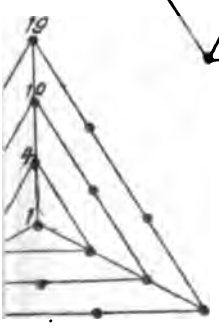
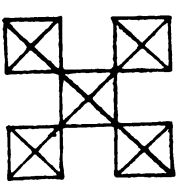


Fig. 8



4

6

Fig. 11

Fig

Fig. 1

4

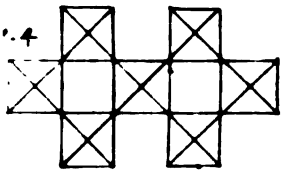
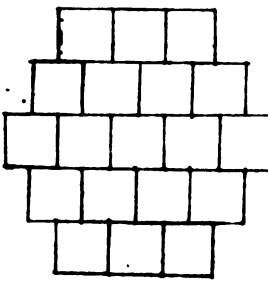


Fig. 5



6

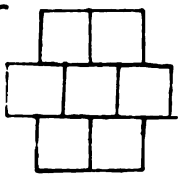


Fig. 11

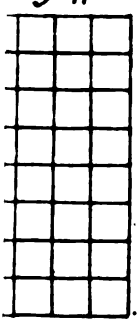


Fig. 10

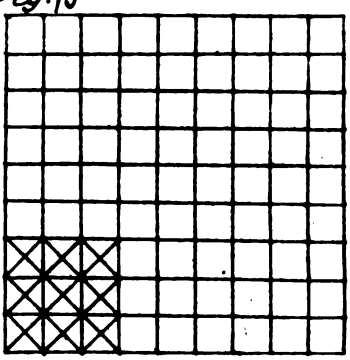


Fig. 15

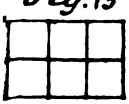


Fig. 16

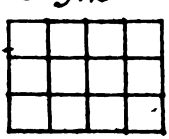


Fig. 8

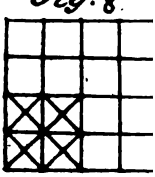


Fig. 12

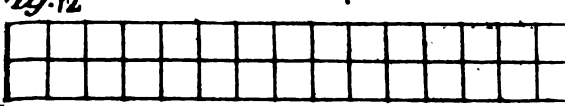


Fig. 3.

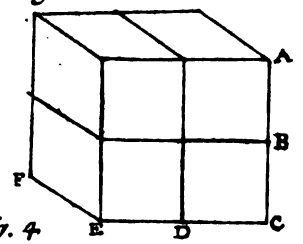
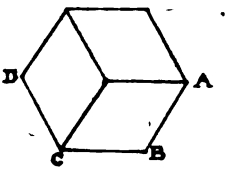


Fig. 8



g. 4

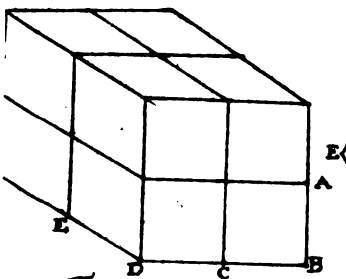


Fig. 9

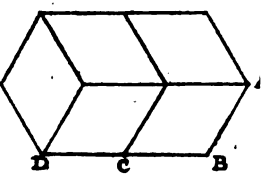


Fig. 10

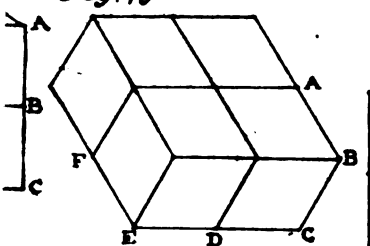


Fig. 12

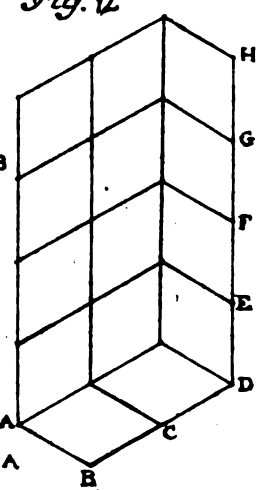


Fig. 11

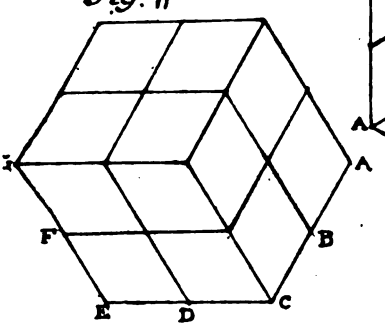


Fig. 4

TAB: V.

Fig. 1

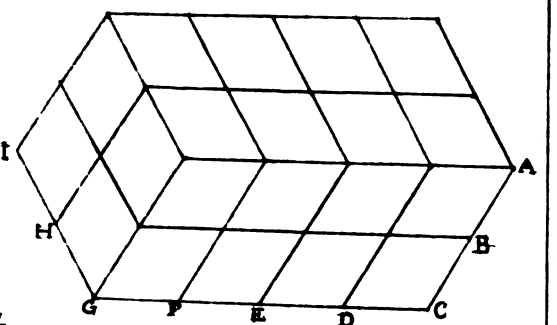


Fig. 4

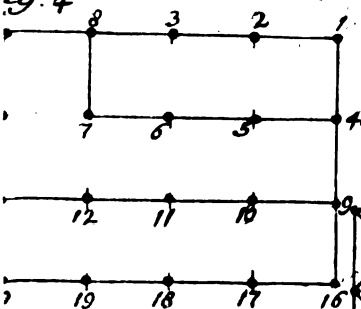
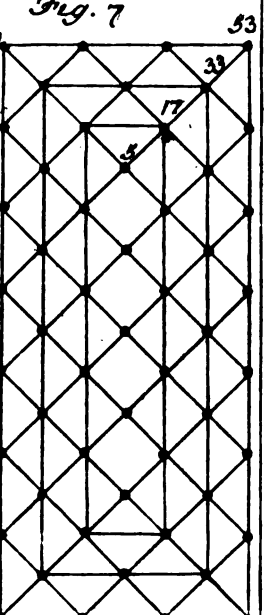
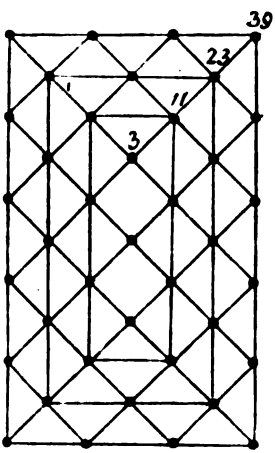


Fig. 7





ig. 4

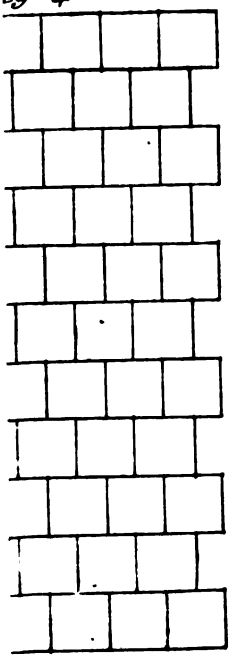


Fig. 2

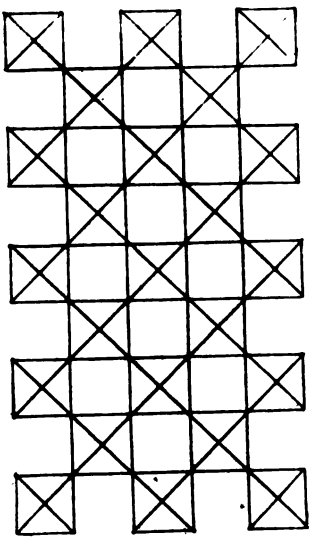
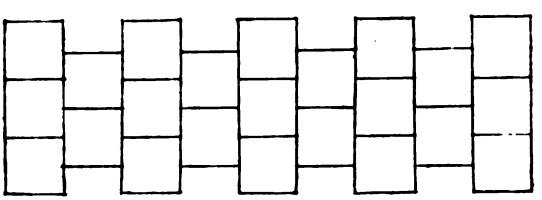


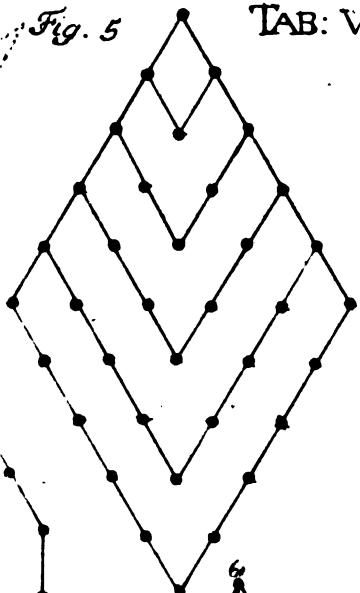
Fig. 5



TAB: VII

Fig. 4

Fig. 5



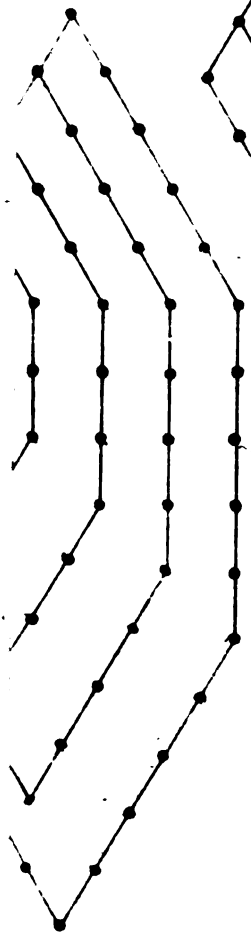
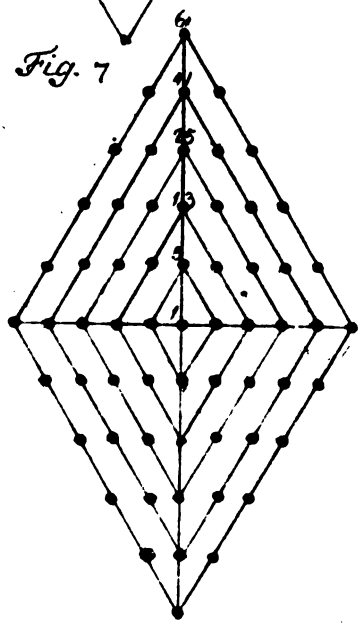


Fig. 7



TAB. VIII.

Fig. 1

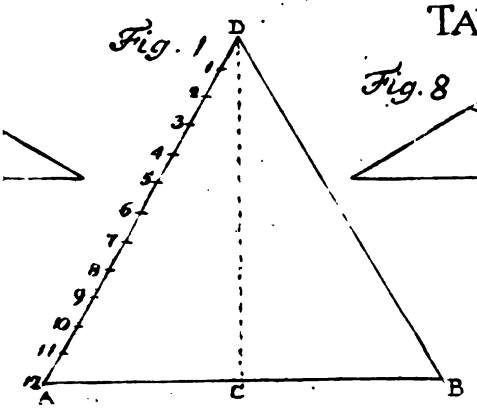
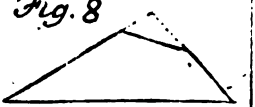


Fig. 8



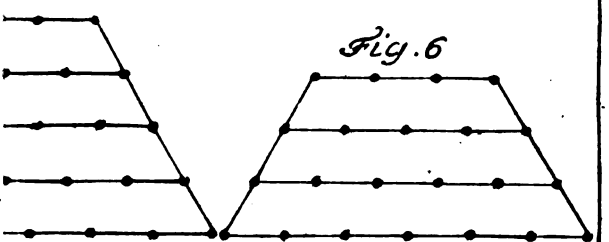
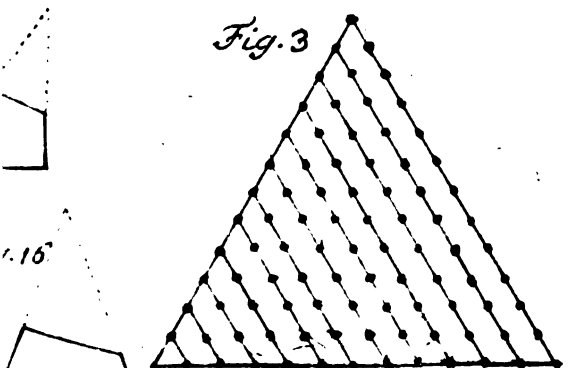
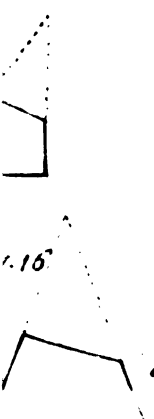


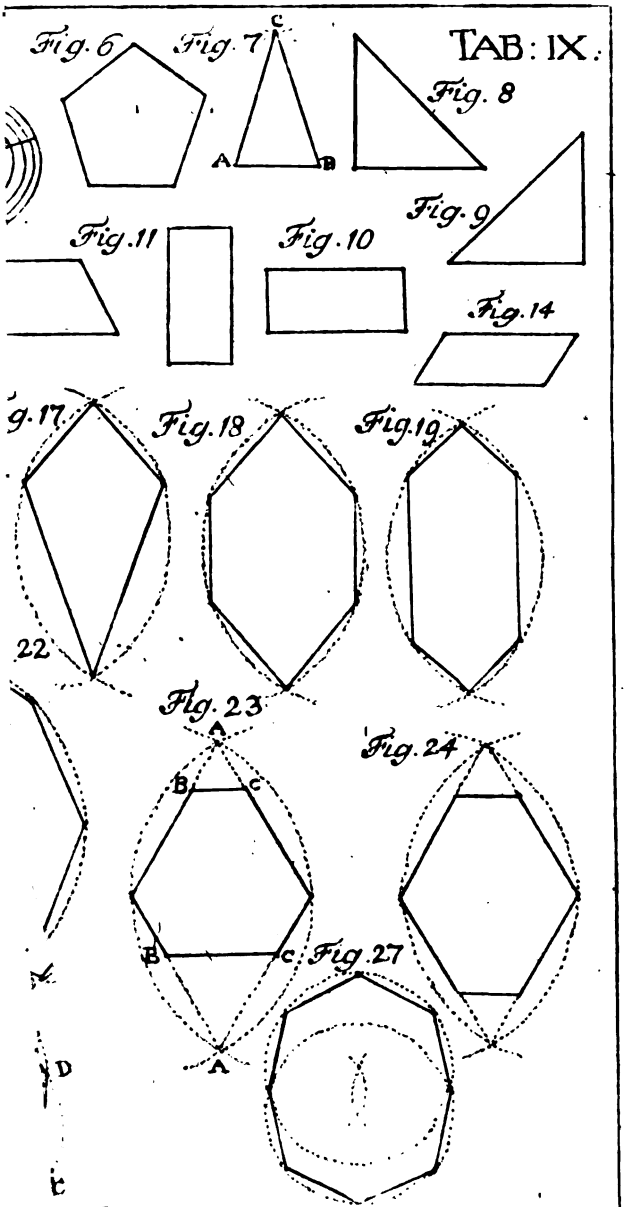
Fig. 6

Fig. 3





TAB: IX.



C F H Gericke fun. sc. Berol.

TAB: X.

Fig. 3

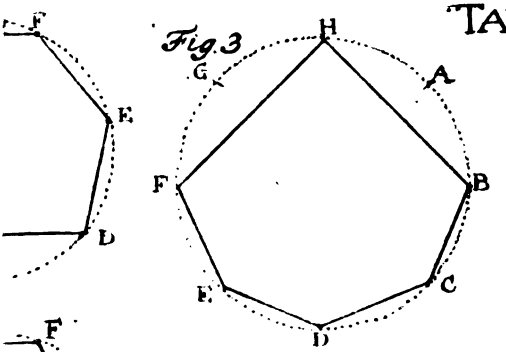


Fig. 6

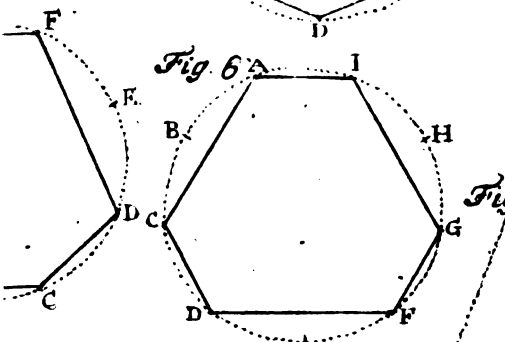


Fig. 9

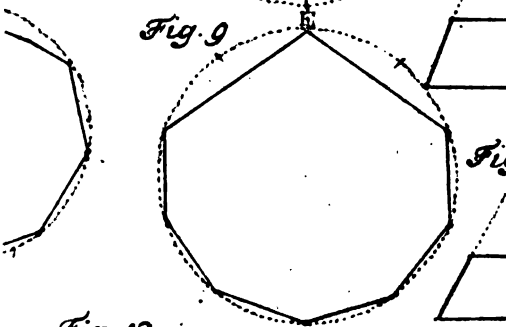


Fig. 11

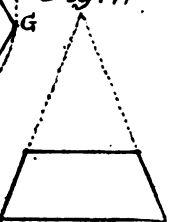


Fig. 10

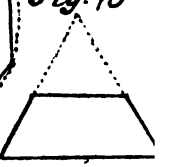


Fig. 13

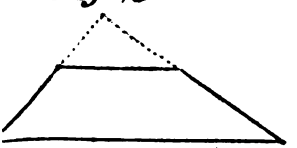
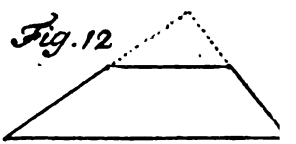


Fig. 12



TAB: XI.

Fig. 3

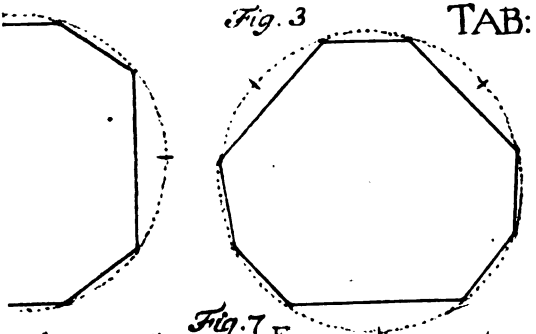


Fig. 6

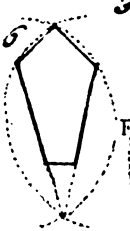


Fig. 7

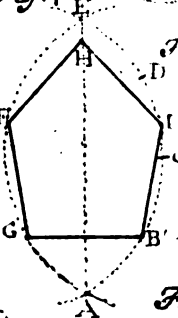


Fig. 8

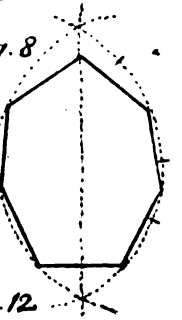


Fig. 11

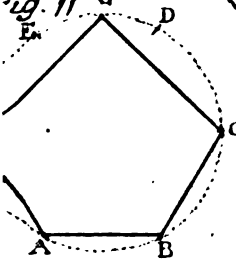


Fig. 12

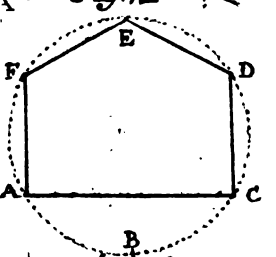


Fig. 14

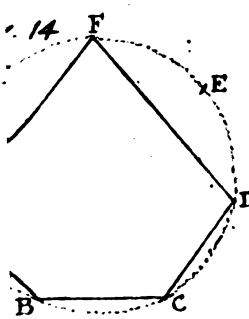
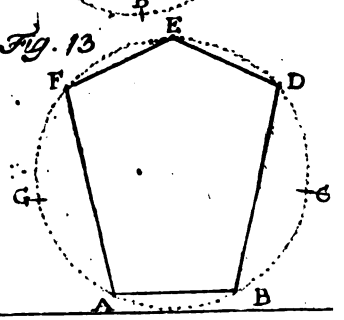


Fig. 13



TAB: XII.

Fig. 3

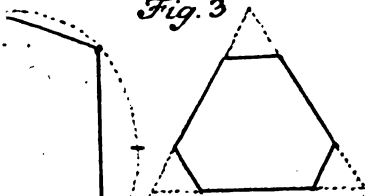
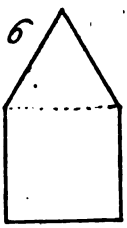


Fig. 7

Fig. 6



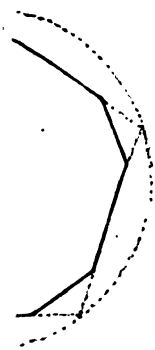


Fig. 9

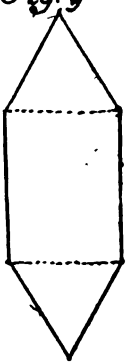


Fig. 8

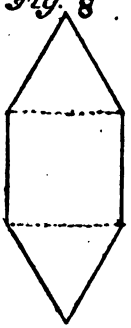


Fig. 10

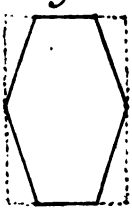


Fig. 13

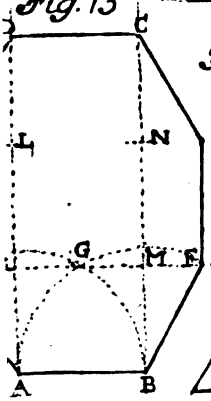


Fig. 14

Fig. 15

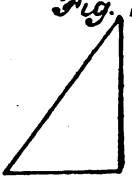


Fig. 18

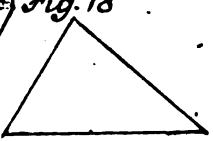
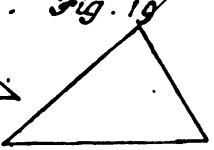


Fig. 19



TAB: XIII.

Fig. 4

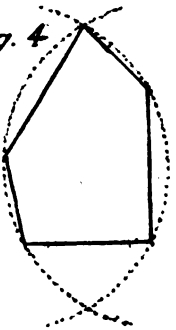
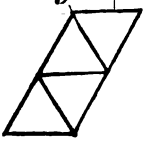


Fig. 16



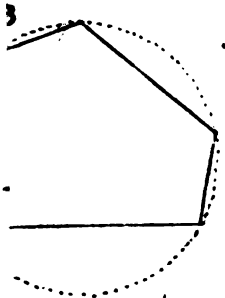
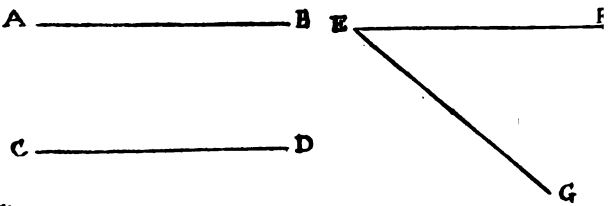


Fig. 7

Fig. 8



g. 10

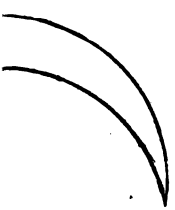


Fig. 11

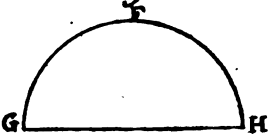
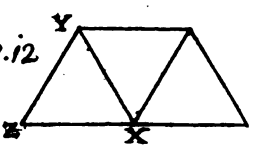


Fig. 12



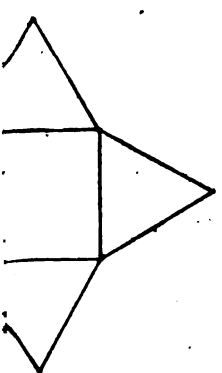
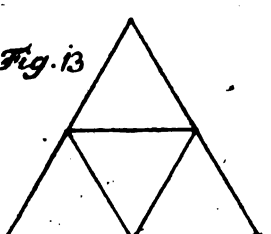


Fig. 13



C.F.H. Gericke Fec. /c. B

TAB: XV.

Fig. 4

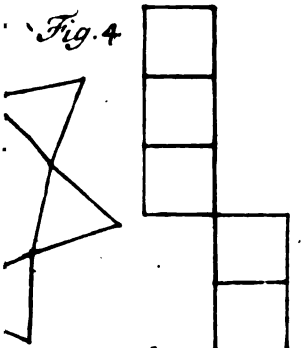


Fig. 5

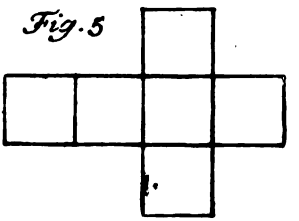


Fig. 7

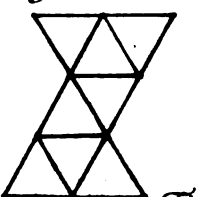


Fig. 6

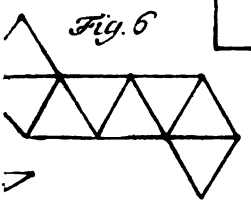


Fig. 11

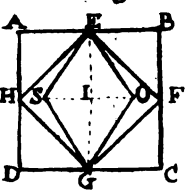
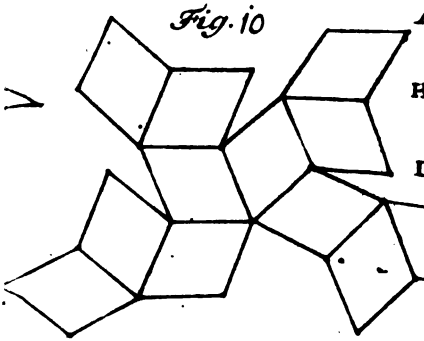
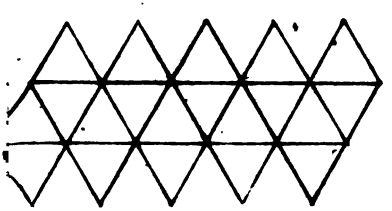


Fig. 10





TAB: XV.

Fig. 1

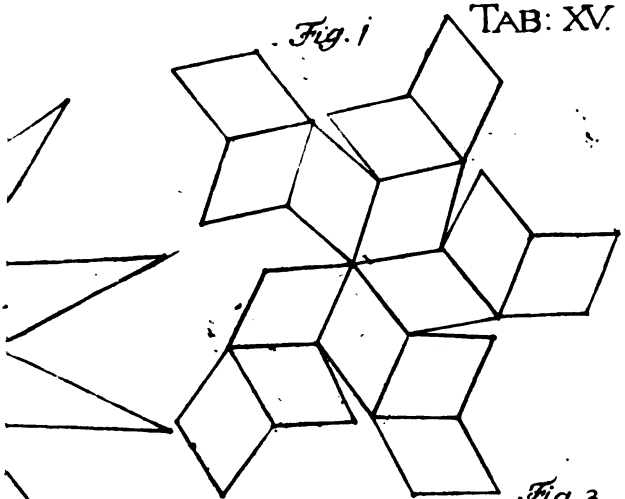


Fig. 2

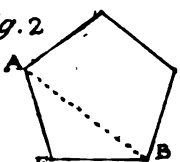


Fig. 3

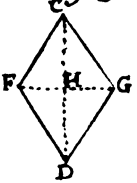


Fig. 6

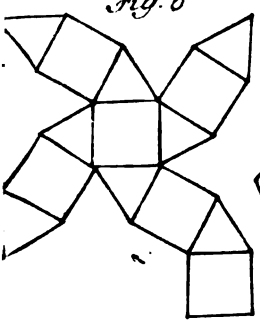
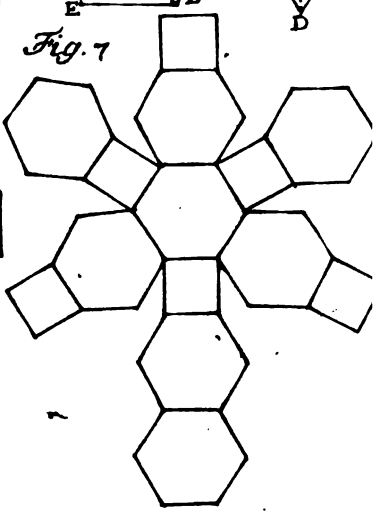


Fig. 7



TAB: XVI.

Fig. 2

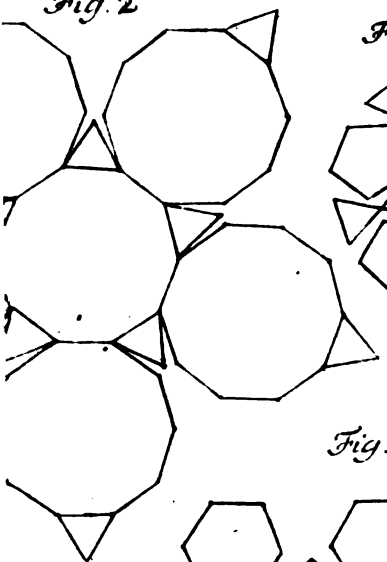


Fig. 3

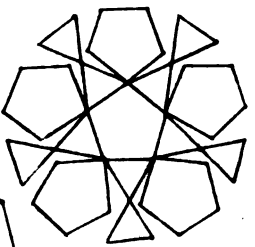


Fig. 4

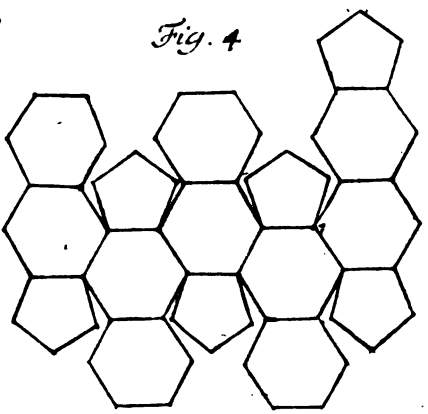


Fig. 6

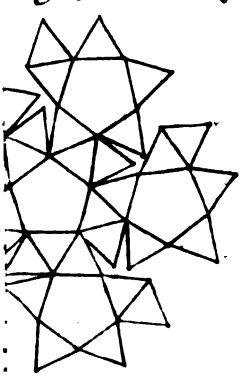


Fig. 9

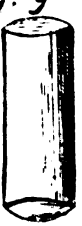
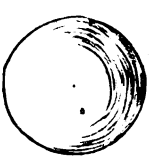


Fig. 7



TAB: XVI

Fig. 2

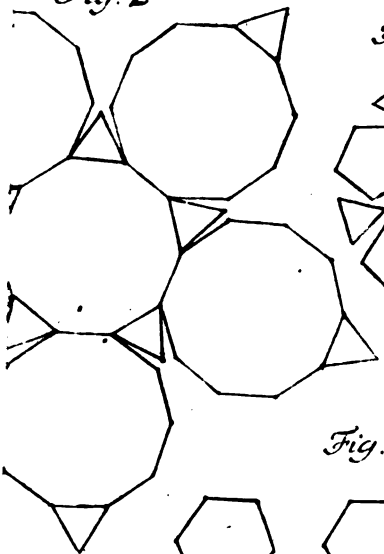


Fig. 3

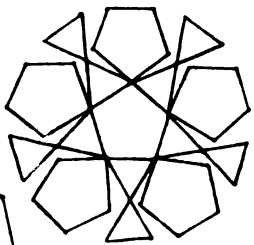


Fig. 4

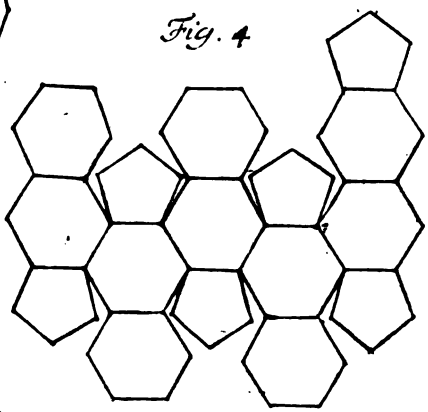


Fig. 6

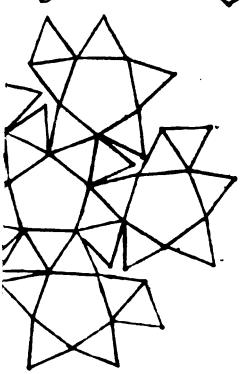


Fig. 9

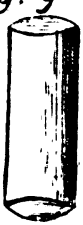


Fig. 7

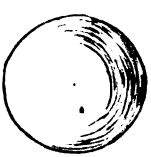


Fig. 2

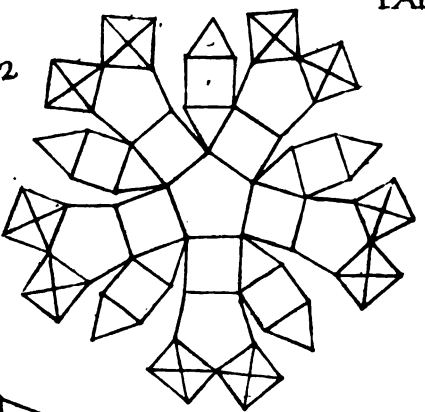


Fig. 3

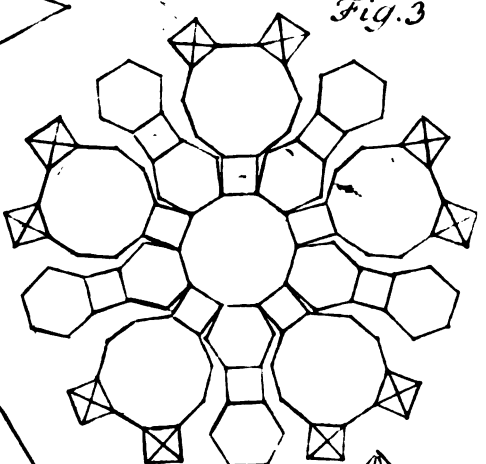
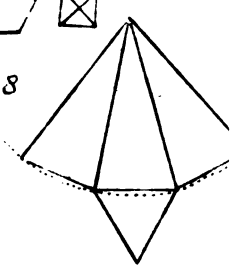
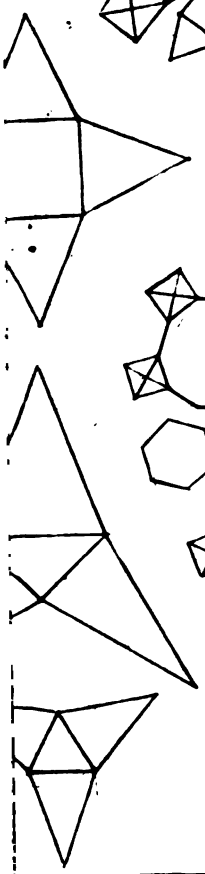
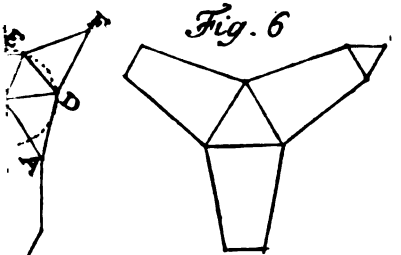


Fig. 8





C.F.H. Gericke, Fun. Sc. Be



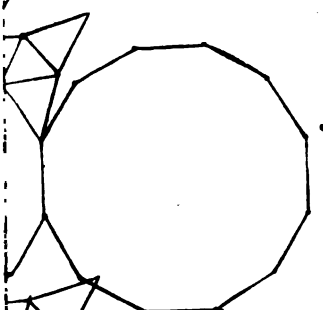


Fig. 3

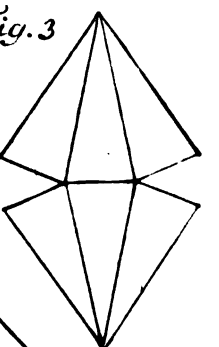
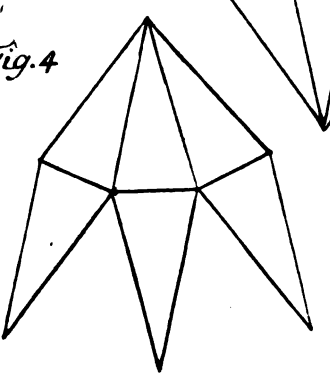
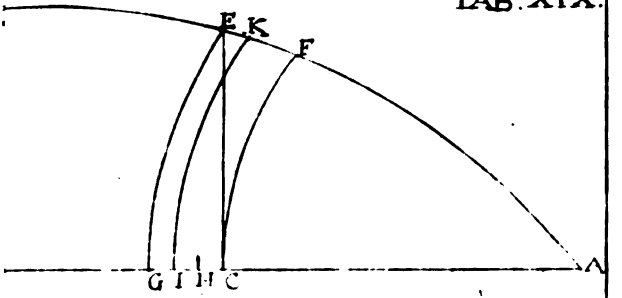


Fig. 4



TAB: XIX.



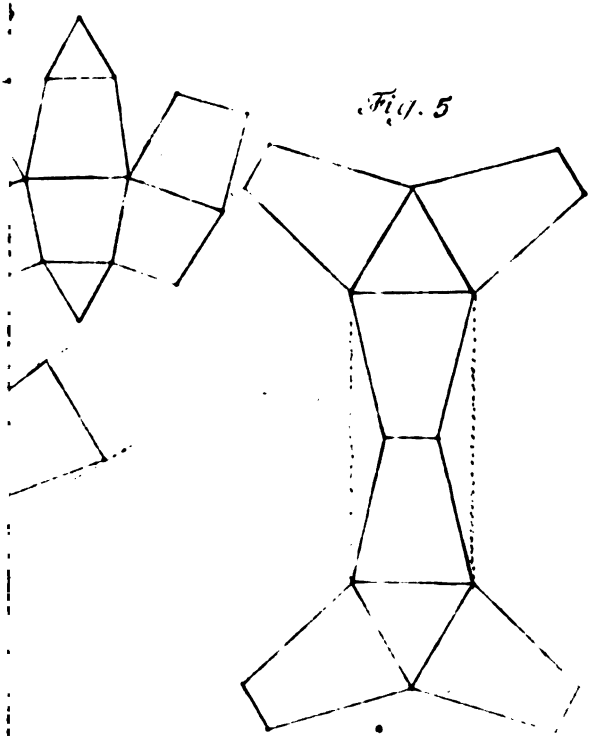


Fig. 5

TAB: XX.

Fig. 2

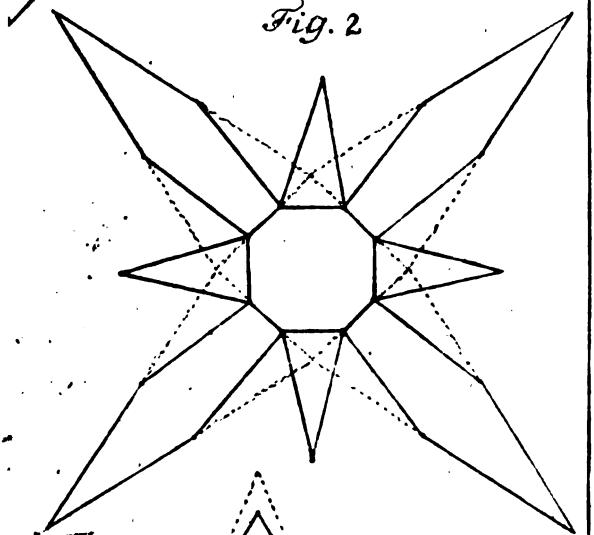
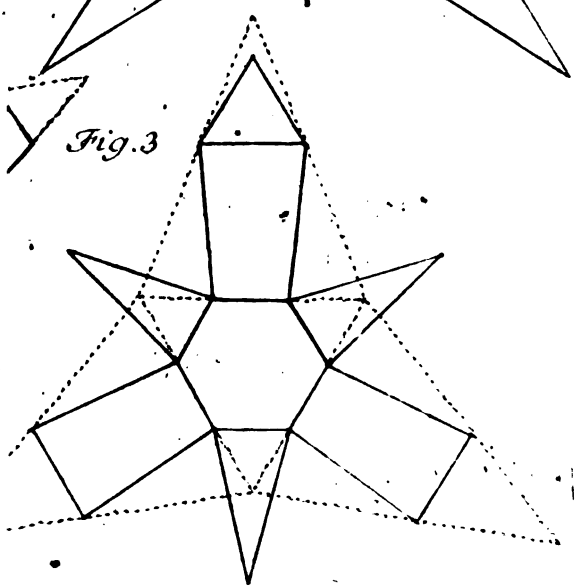
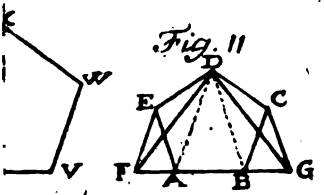
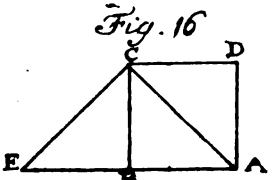


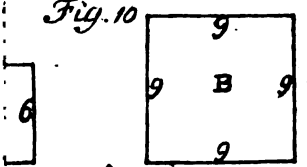
Fig. 3

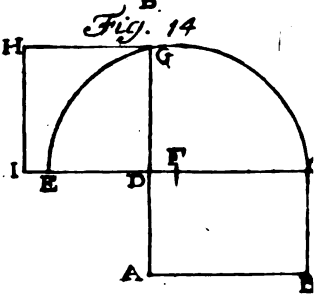


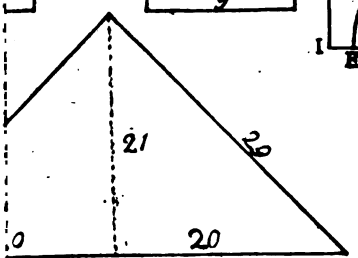
TAB: XXI.

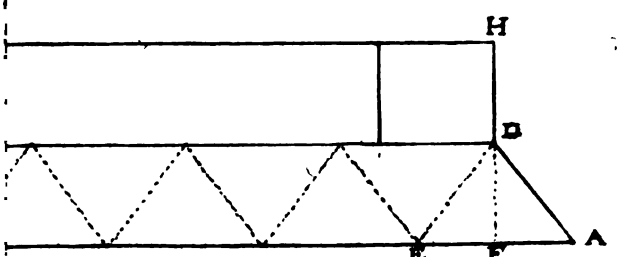


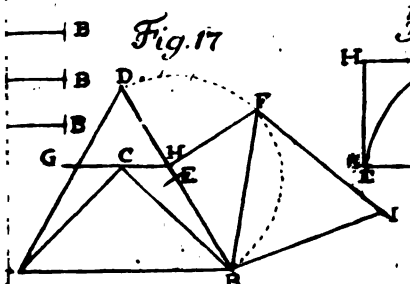


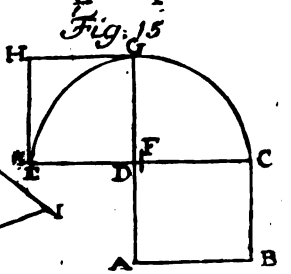












C.F.H. Gericke, Fun. sc. Berl

TAB: XXII.

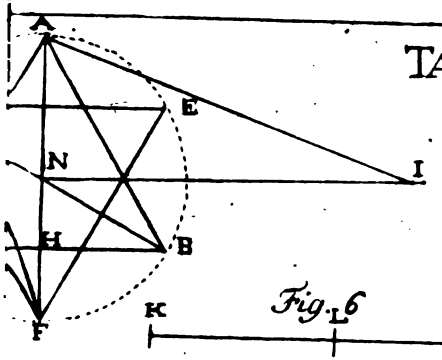


Fig. 6

Fig. 3

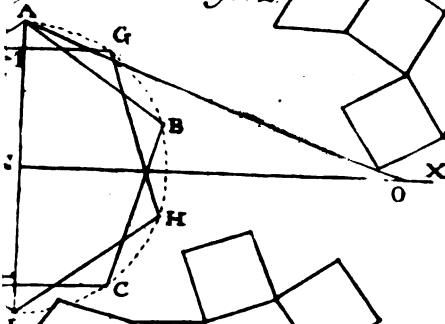


Fig. 12

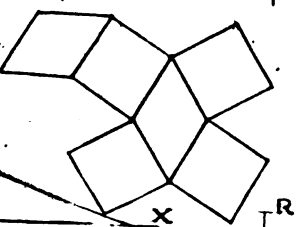


Fig. 4

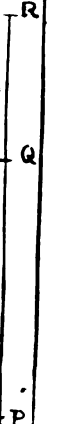
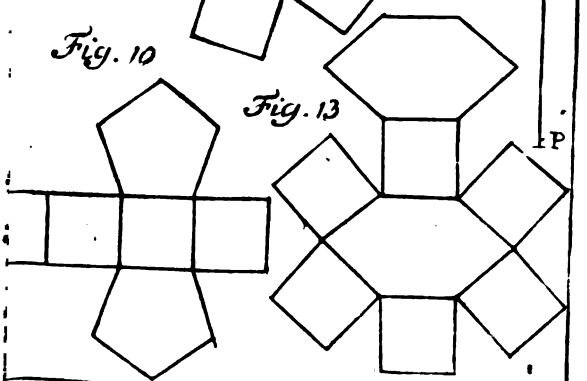


Fig. 10

Fig. 13



TAB: XXIII.

Fig. 2

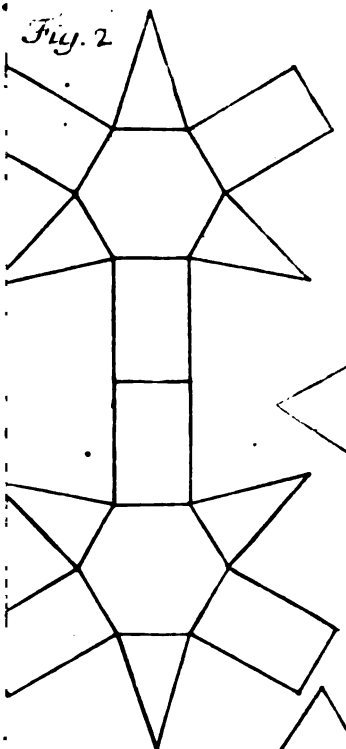


Fig. 3

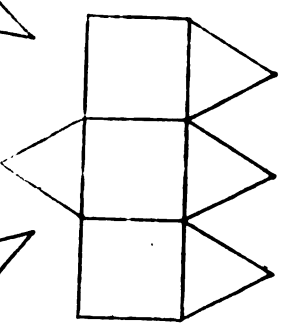


Fig. 4

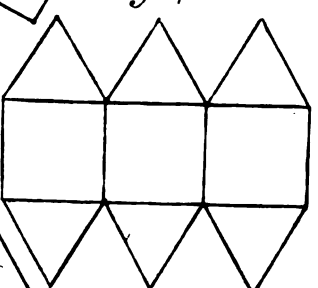
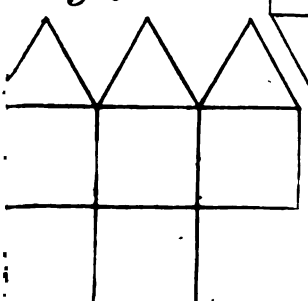


Fig. 5



TAB: XXIV.

Fig. 10

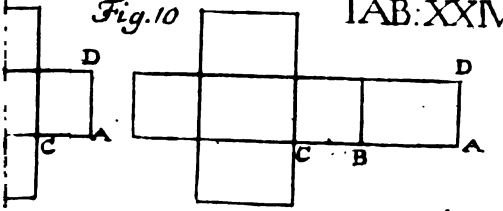


Fig. 12

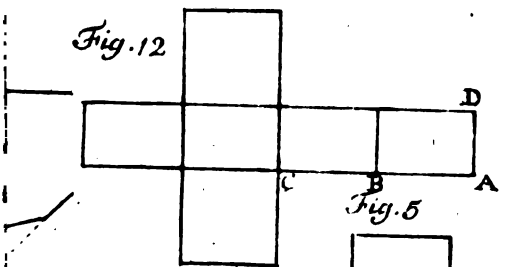


Fig. 5

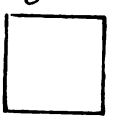


Fig. 13

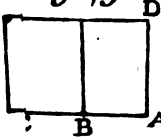
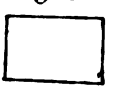


Fig. 4

Fig. 7

Fig. 6



g. 3

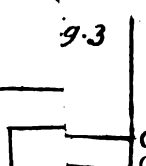
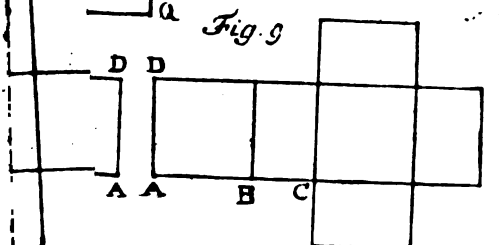
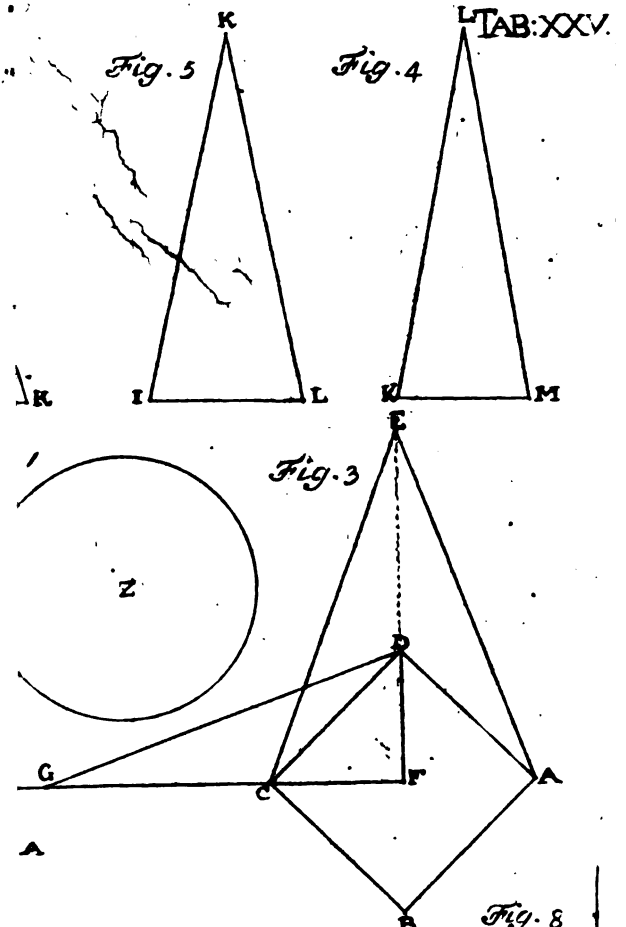


Fig. 9

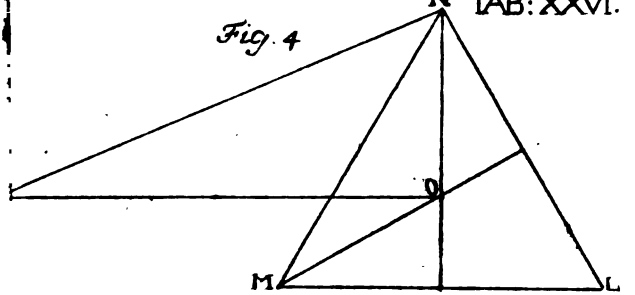




C.F.H. Gericke Jc: Berol.

TAB: XXVI.

Fig. 4



A

Fig. 5

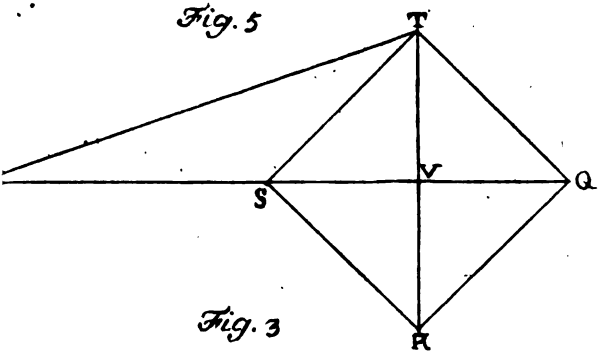
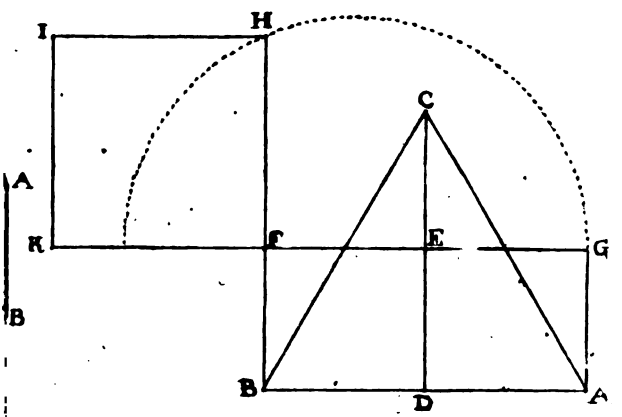


Fig. 3



TAB:XXVII.

Fig. 3

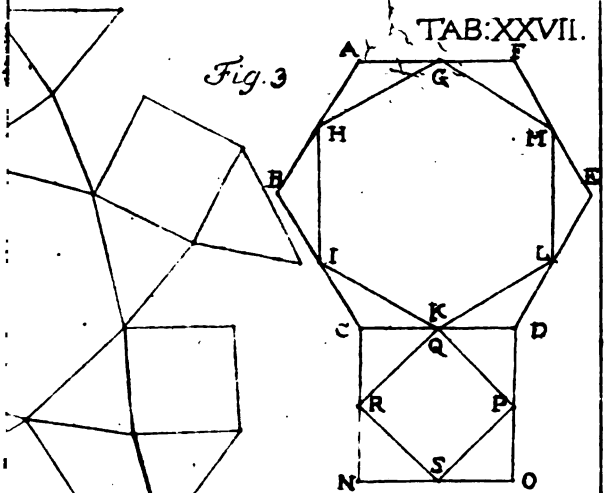
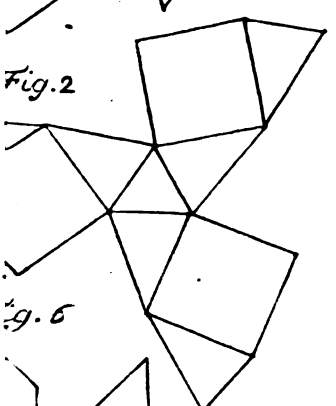


Fig. 1

Fig. 2



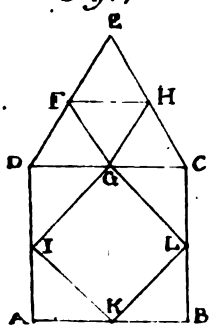


Fig. 6

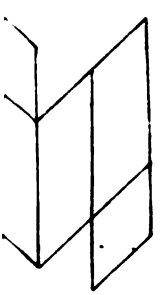


Fig. 7

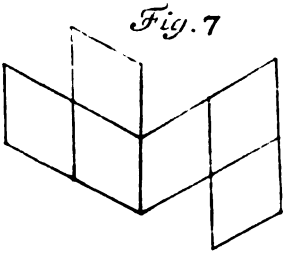


Fig. 2

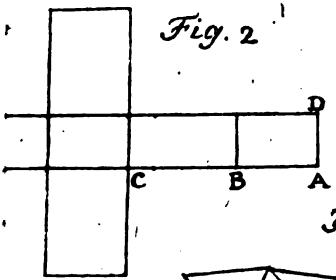
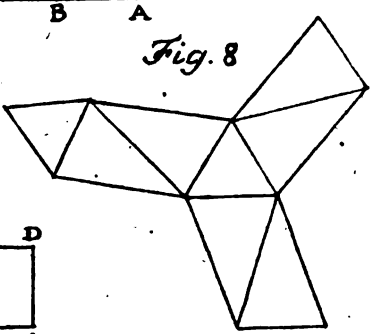


Fig. 8



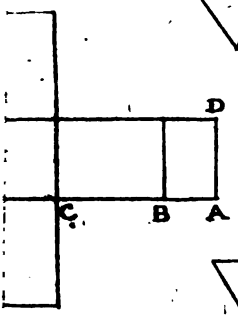
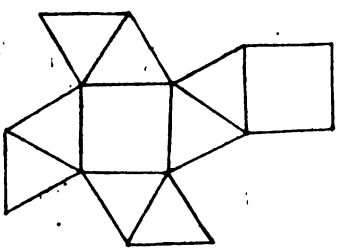
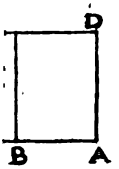
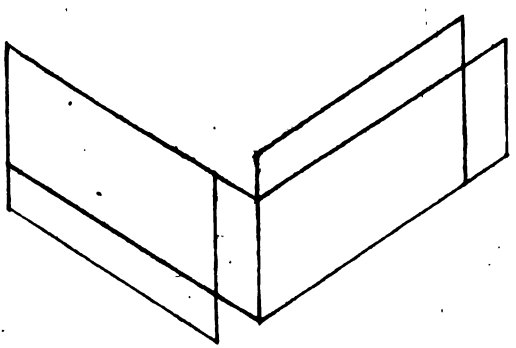


Fig. 7





9



TAB: XXIX

Fig. 6

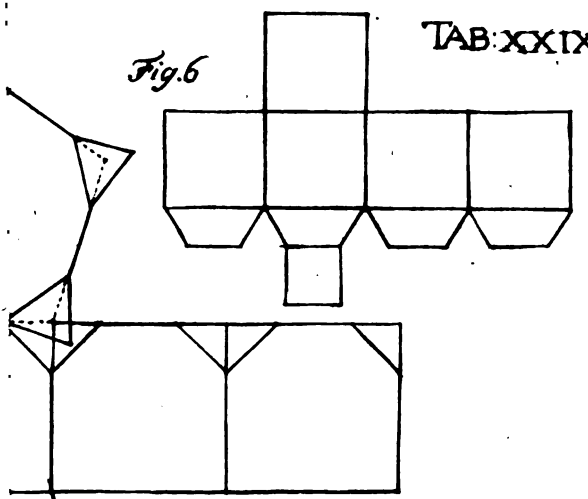


Fig. 3

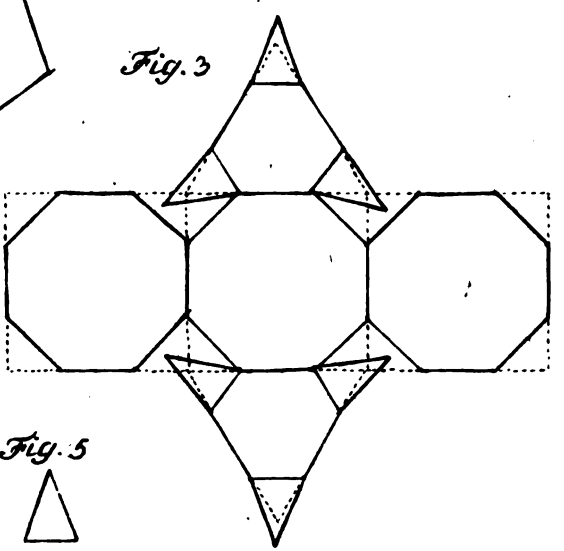


Fig. 5

C. F. H. Gericke, Jun. sc. Bero.

TAB. XXX

Fig. 5

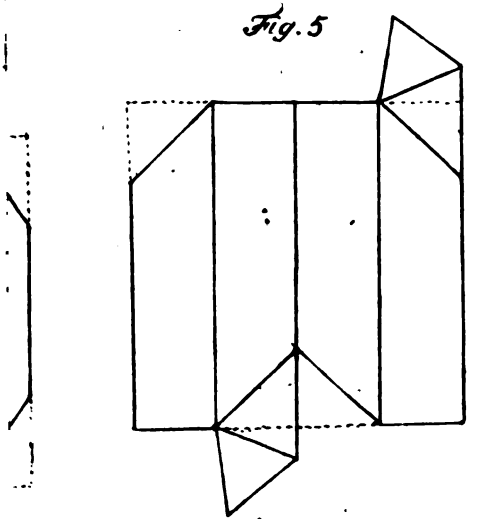
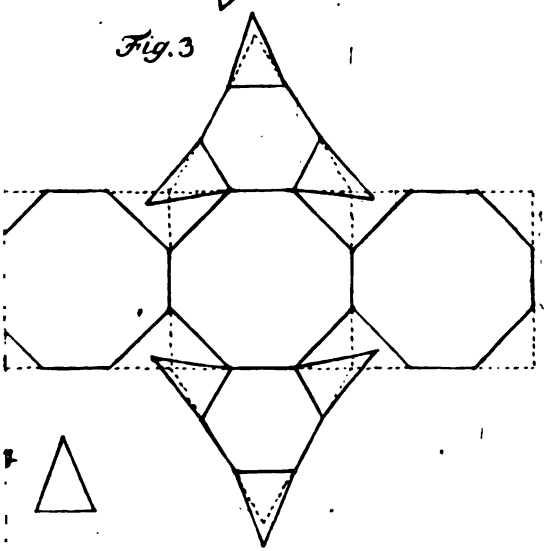


Fig. 3



TAB:XXXI

Fig. 3

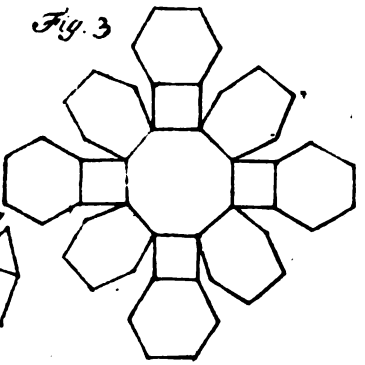


Fig. 4

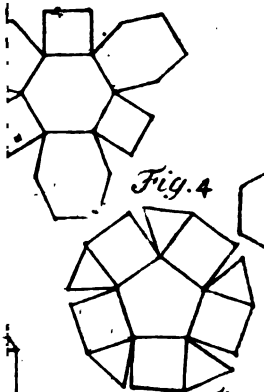


Fig. 10

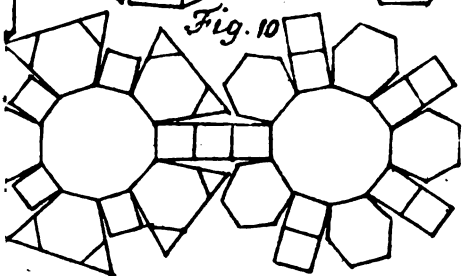
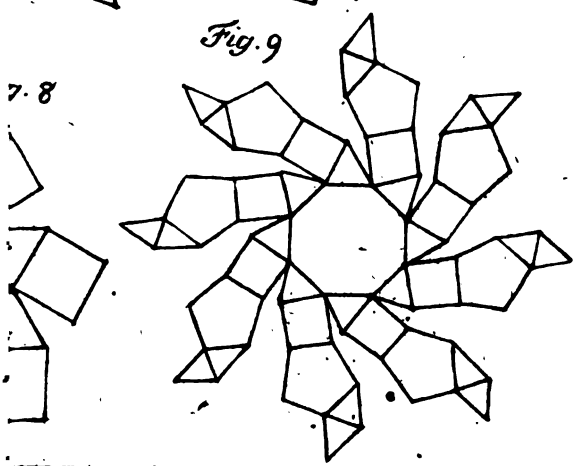


Fig. 9

7. 8



TAB: XXXII

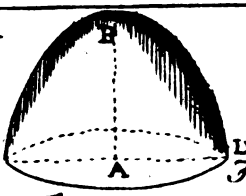


Fig. 2

Fig. 3

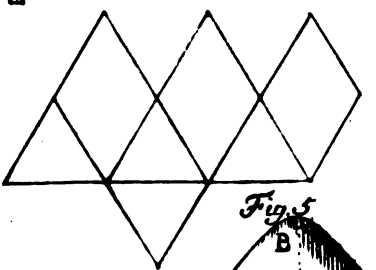
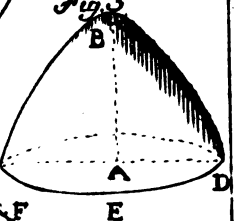


Fig. 5



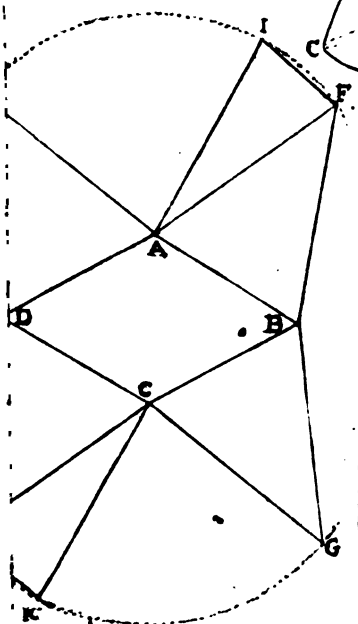
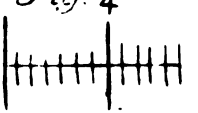
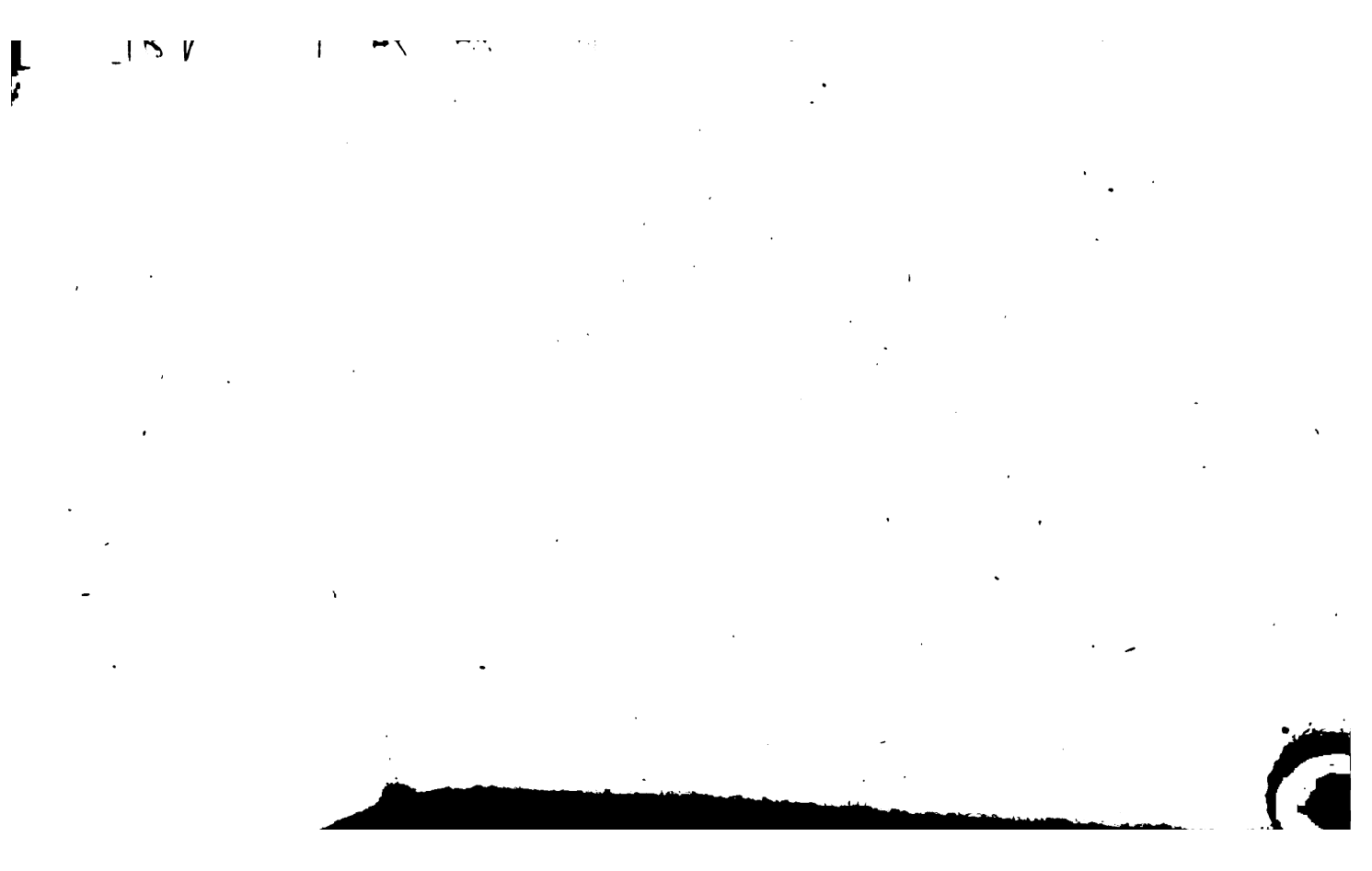


Fig. 4





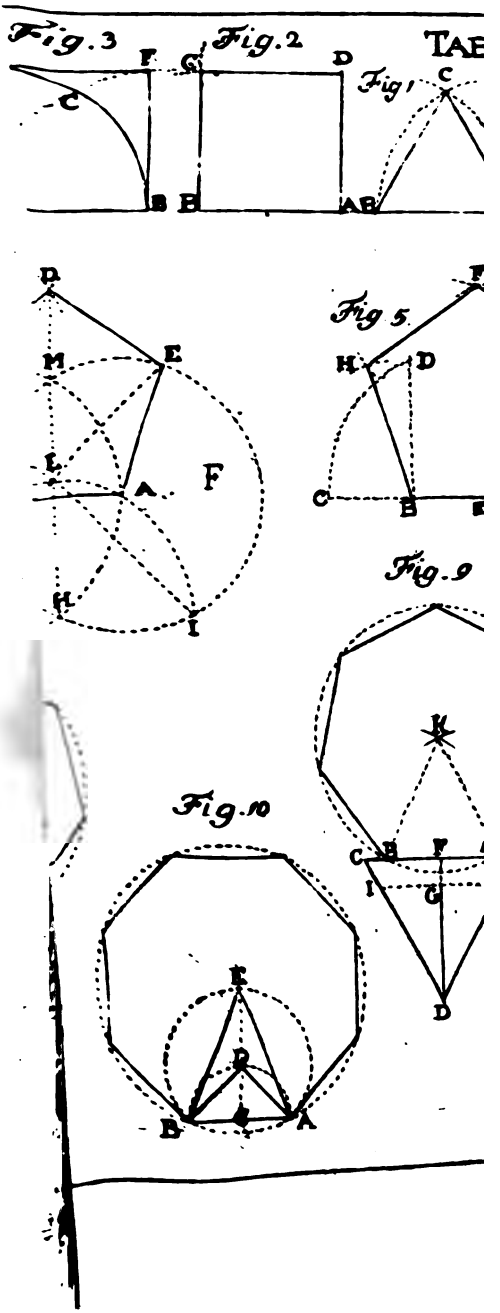


Fig. 3
Fig. 2
TAB
Fig. 1
C
F
G
D
C
B
B
AB
D
M
E
L
A
F
H
I
Fig. 5
H
D
C
B
Fig. 9
K
C
F
I
G
D
Fig. 10
E
D
B
A

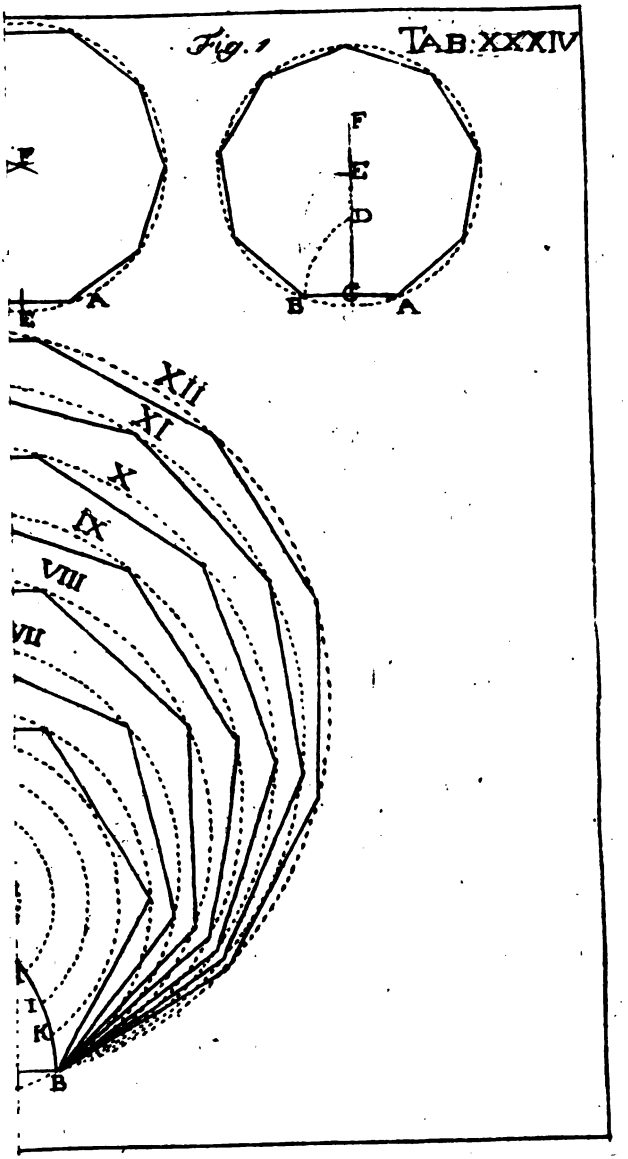


Fig. 1
TAB: XXXIV
F
E
D
C
B
A
XII
XI
X
IX
VIII
VII
I
K
B

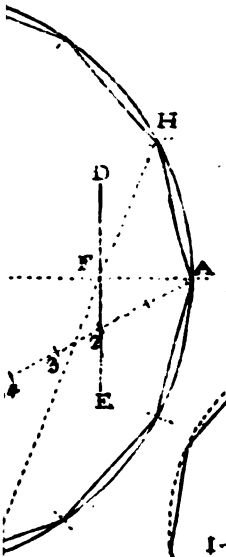


Fig. 1

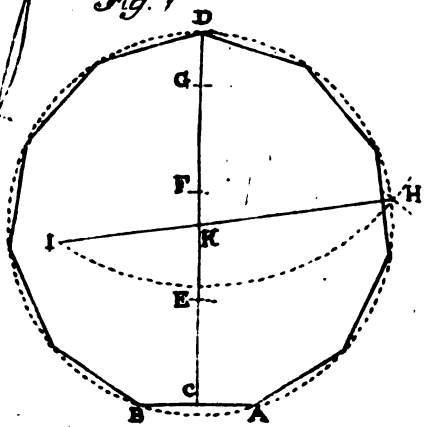
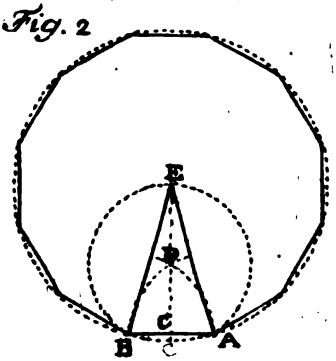
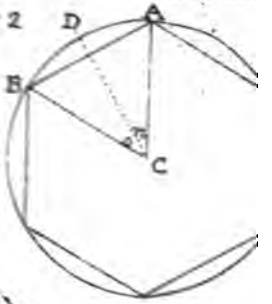


Fig. 2

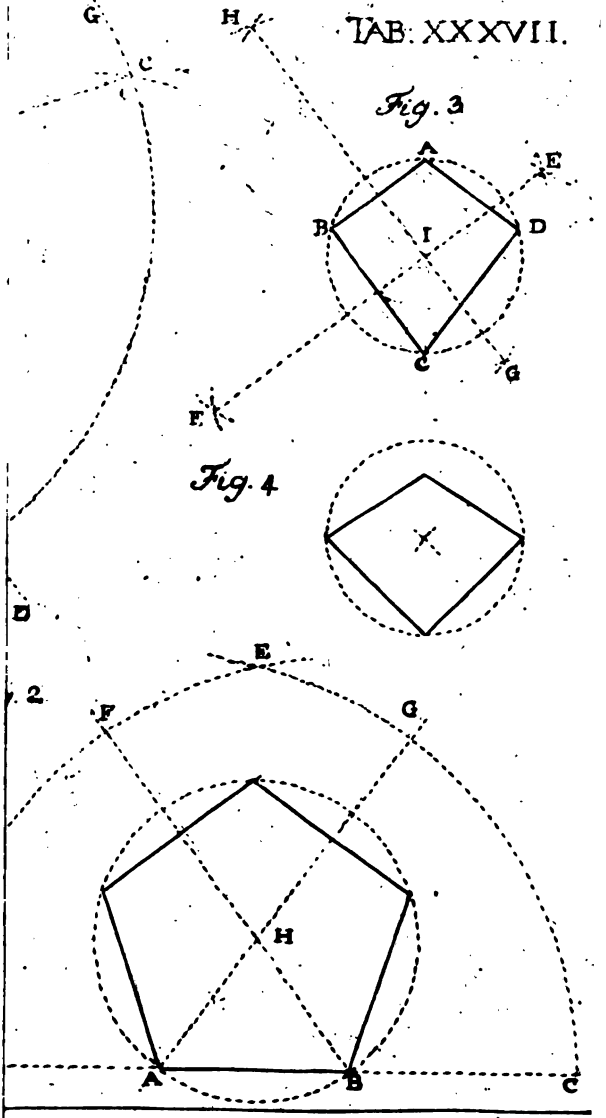


TAB X

Fig 2



TAB. XXXVII.



TAB: XXXVIII.

Fig. 3

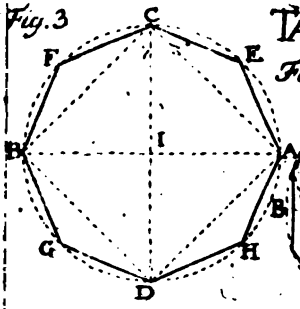


Fig. 4

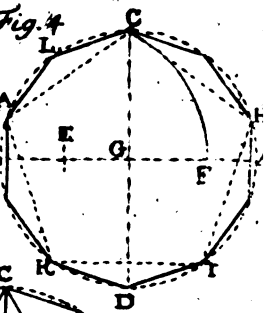
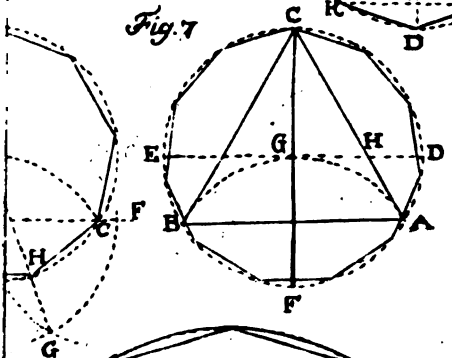
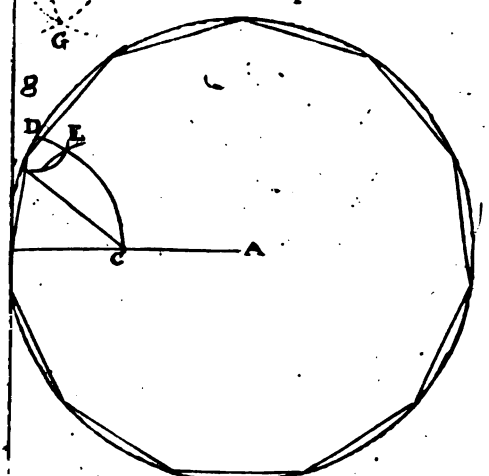


Fig. 7

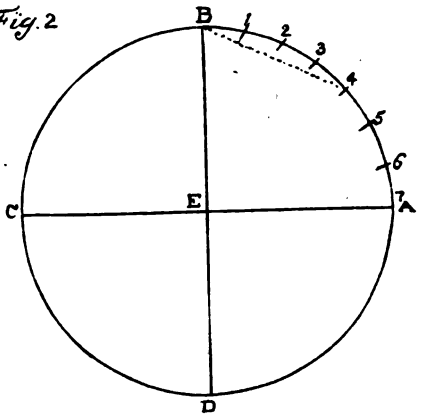


8



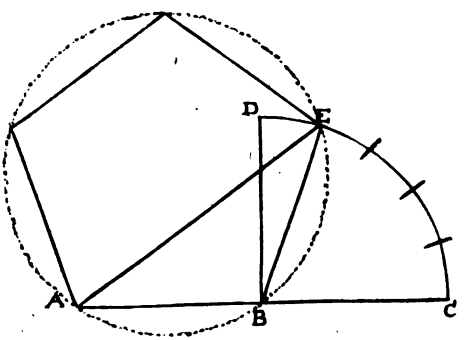
TAB: XXXIX.

Fig. 2

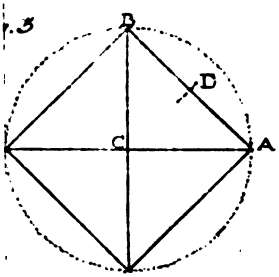


C

Fig. 1



TAB. XL.



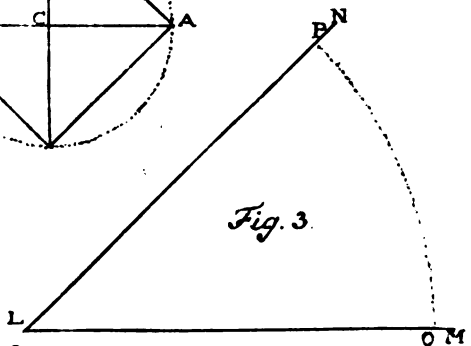


Fig. 3.

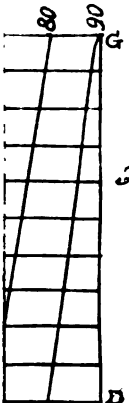


Fig. 2.

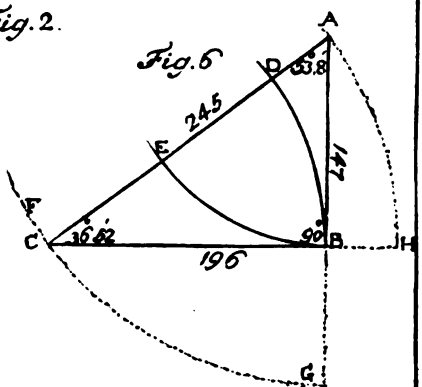


Fig. 6

TAB XLI

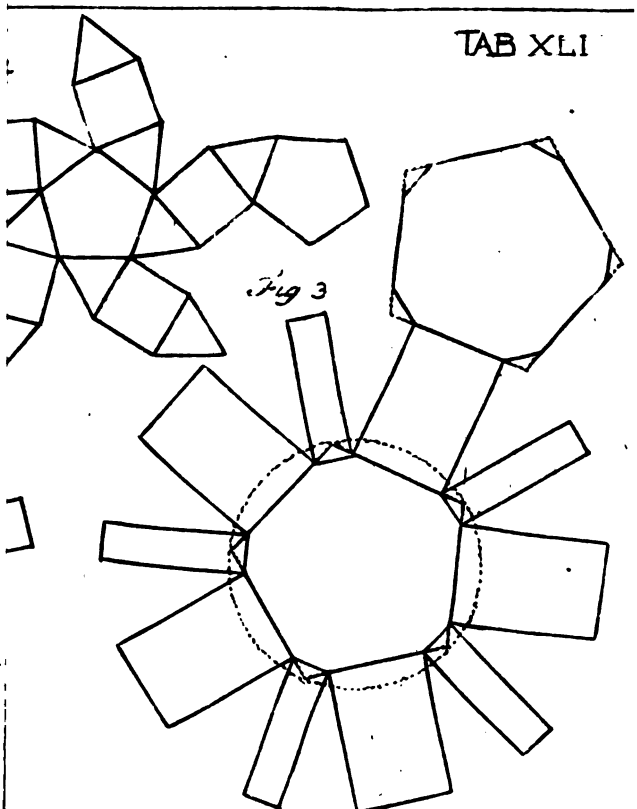


Fig 3

Fig 7

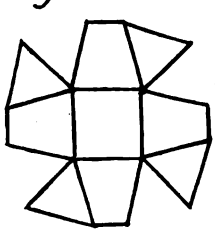
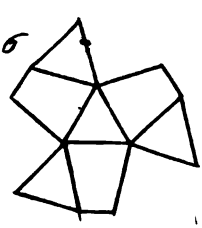


Fig 6



TAB XLII

Fig 3

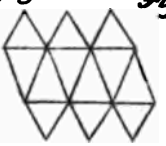


Fig 4

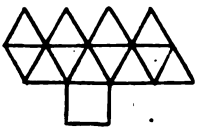


Fig 7

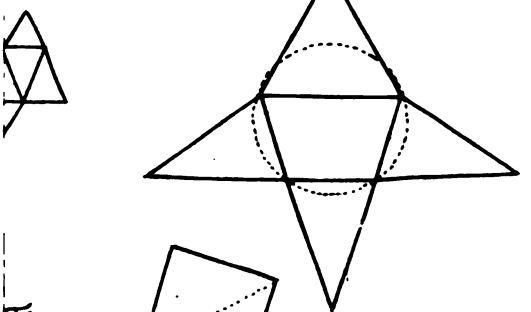
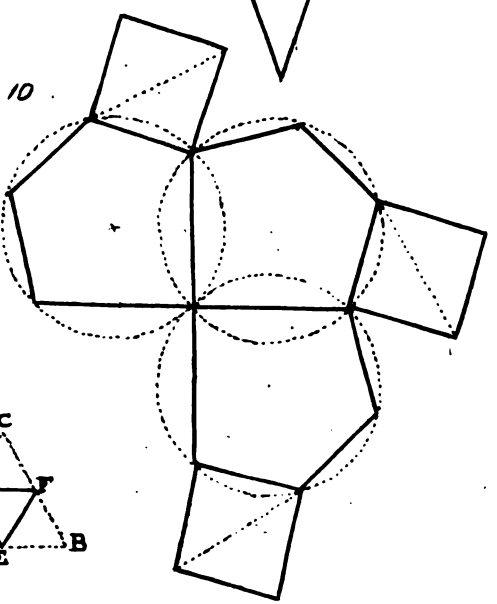
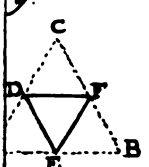


Fig. 10



9.



TABXL.III

Fig 1.

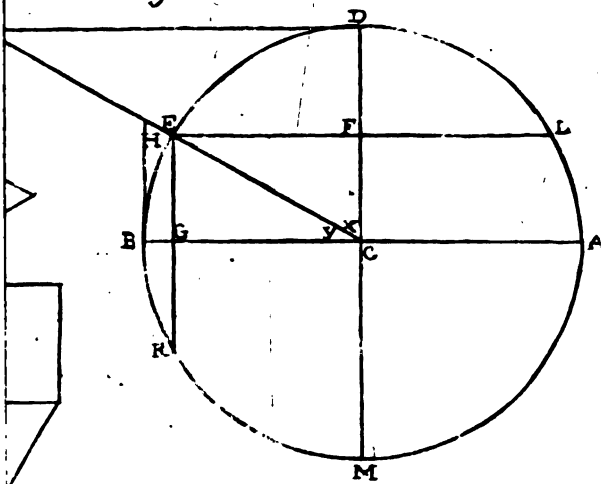
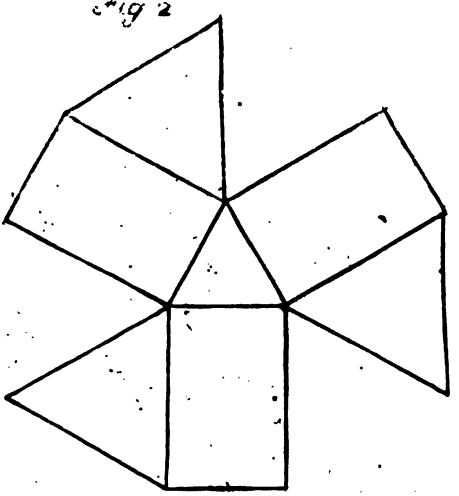


Fig 2



TAB. XLIV

Fig. 4

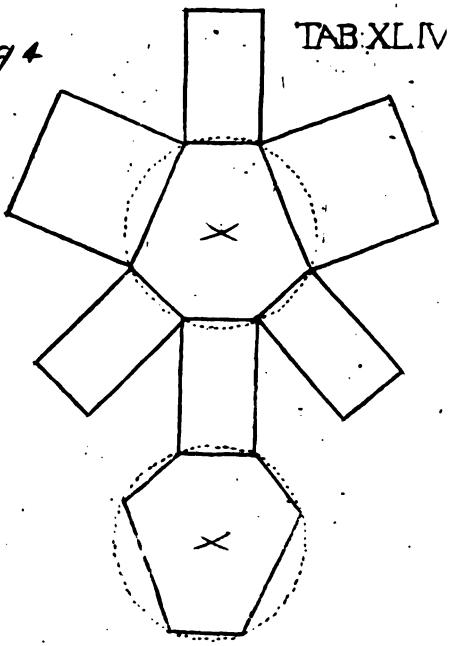
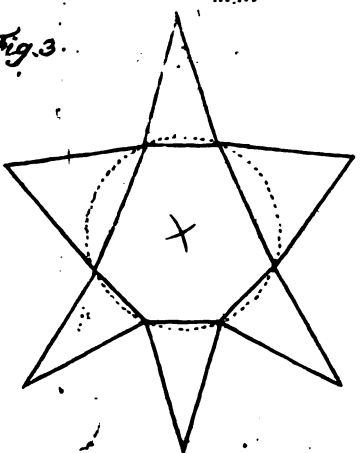


Fig. 3



21. 2 de

May 97